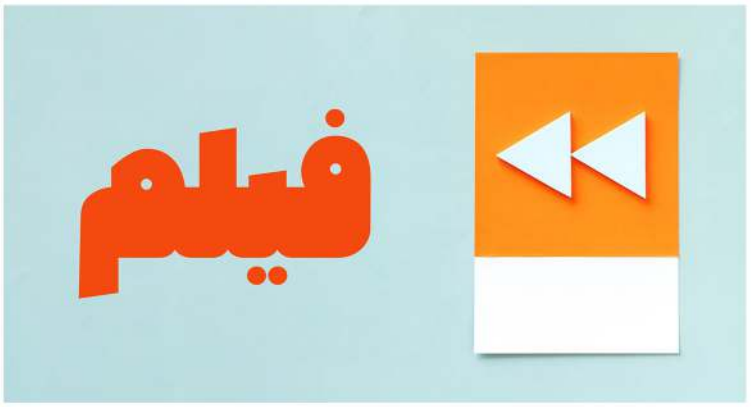
آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

دفتـــــرچه شمـــــاره ۱

جمعه ۱۴ فروردین‌ماه ۱۴۰۵

جمع‌بندی و مرور نیم‌سال اول دوازدهم

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۵

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ‌گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه	۴۰ سؤال ۷۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

بودجه‌بندی دروس این آزمون

حسابان ۲	هندسه ۳	ریاضیات گسسته
تابع + مثلثات + حدهای نامتناهی، حد در بی‌نهایت صفحه‌های ۱ تا ۶۹	**ماتریس و کاربردها + آشنایی با مقاطع مخروطی** صفحه‌های ۹ تا ۴۶	**آشنایی با نظریه اعداد** (کل فصل ۱) **گراف و مدل‌سازی** (معرفی گراف) صفحه‌های ۱ تا ۴۲
سهم در کنکور: ۴ سؤال	سهم در کنکور: ۲ سؤال	سهم در کنکور: ۱ سؤال

فیزیک ۳	شیمی ۳
فصل های ۱ تا ۳ (تا ابتدای موج و انواع آن) صفحه‌های ۱ تا ۶۹	**مولکول‌ها در خدمت تندرستی:** کل فصل **آسایش و رفاه در سایه شیمی:** کل فصل صفحه‌های ۱ تا ۶۶
سهم در کنکور: ۹ سؤال	سهم در کنکور: ۹ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴

نیم‌سال دوم: ۹ مرحله آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید + فرصت‌هایی برای مرور و جبران + ۳ آزمون جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری

۱- **شروع نیم‌سال دوم؛ شروع نیمهٔ دوم رقابت با مهارت بیشتر:** فرصت برای شروع نیم‌سال دوم و پیشروی ۵۰ یا صددرصدی پایه دوازدهم + تکمیل مرور و یادگیری پایه یازدهم
(فرصت برای شروع نیم‌سال دوم+ تکمیل مرور و یادگیری پایه یازدهم)

۲- **فرصت‌های طلایی برای مرور و جبران:** در دو آزمون ۶ و ۱۴ فروردین می توانید به ترتیب مباحث پایه دهم و یازدهم + مباحث نیم‌سال اول دوازدهم را به طور کامل مرور و جمع بندی کنید.
(زمان مرور و جمع بندی دهم و یازدهم+ نیم سال اول دوازدهم)

۳- **تکمیل تسلط بر نیم‌سال دوم + آزمون‌های مبحثی:** سه مرحله آزمون برای تکمیل و تسلط بر ۵۰ درصد پایانی نیم‌سال دوم + مرور پایه با نگاه ترکیبی به مباحث ✔ با آرامش خاطر و تسلط صد درصدی به استقبال امتحانات نهایی بروید!
(زمان تکمیل و تسلط بر نیم‌سال دوم دوازدهم)

۴- **آزمون‌های جامع شبیه‌ساز و پیش‌بینی کنکور سراسری:** در سه آزمون جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری، شرایط کاملاً مشابه با کنکور سراسری را تجربه کنید!
(ایستگاه جمع‌بندی و جبران)

۱- نمودار تابع $y=x^2-6x+1$ را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع f به‌دست آید. مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f(2x-6)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{22}{3}$ ۳) ۶ ۴) ۲

۲- تابع $f(x)=2x^2+6x-1$ مفروض است. اگر تابع $y=2f(2x-1)$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً یکنوا باشد، حداکثر a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -3 ۳) -4 ۴) $-\frac{1}{4}$

۳- تابع $f(x)=\frac{3x-2}{x+b}$ مفروض است. نمودار تابع $y=f(\frac{1}{x})$ را دو واحد به راست انتقال داده و سپس طول نقاط تابع به‌دست آمده را دو برابر می‌کنیم. اگر نمودار تابع نهایی، نمودار تابع $y=\frac{1}{x}$ را در نقطه‌ای به طول یک قطع کند، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{10}{3}$ ۲) $-\frac{10}{3}$ ۳) -4 ۴) ۴

۴- اگر $f(x)=1-\sqrt{x+2}$ و $g(x)=2f(\frac{1-x}{3})$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-5,1]$ ۲) $[1,7]$ ۳) $[-5,7]$ ۴) $[-1,5]$

۵- تابع $f(x)=3-\sqrt{x-1}$ مفروض است. اگر اشتراک دامنه و برد تابع $y=a-3f(1+ax)$ شامل یازده عدد صحیح باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -1 ۲) -2 ۳) ۱ ۴) ۲

۶- اگر $f(x)=x-\sqrt{2-x}$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $fof(x)\le f(2x-2)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۷- چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x+2$ برابر ۳- است. مجموع ضرایب باقی‌ماندهٔ تقسیم $xf(x)$ بر $4-x^2$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) -2

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
WWW.ArefOnline.ir

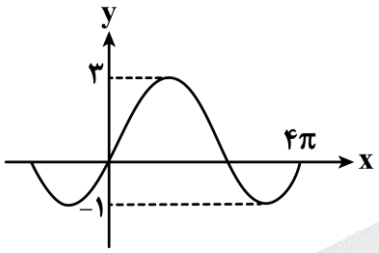
۸- اگر $۲x+۳$ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^۴-۴x^۲+ax+b$ بر $x^۲+x-۲$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)f(-x)$ بر $x+۲$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) -۹ ۳) -۷ ۴) -۵

۹- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\cos^۲(\frac{\pi}{a}x)$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. دورهٔ تناوب تابع $g(x)=a\sin(\frac{a}{۳}x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۲) ۶π ۳) ۹π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(cx+\frac{\pi}{۶})$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b-c$ کدام است؟



۱) $-\frac{۱}{۲}$
۲) $-\frac{۳}{۲}$
۳) $\frac{۵}{۲}$
۴) $\frac{۳}{۲}$

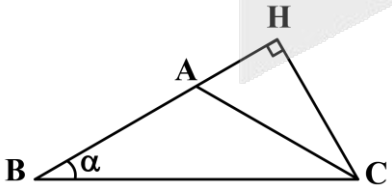
۱۱- تابع $y=a-۲\tan(\frac{\pi}{۲}x)$ در بازهٔ $(-\frac{۴}{۳},\alpha)$ اکیداً یکنواست. حداکثر مقدار α کدام است؟

۱) $-\frac{۲}{۳}$ ۲) -۱ ۳) $\frac{۱}{۳}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

۱۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۴\cos x\cos(x-\frac{\pi}{۲})=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) $\frac{۱۳\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۳π

۱۳- در شکل مقابل، $AB=AC=۱۰$ و $\tan\alpha=\frac{۱}{۳}$ می‌باشد. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{BHC}$ کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۴
۳) ۵۶
۴) ۴۵

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
WWW.ArefOnline.ir

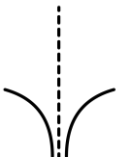
۱۴- اگر $x=\frac{5\pi}{6}$ یک جواب معادلهٔ $\sin^2 x+a\cos 2x=0$ باشد، مجموع سایر جواب‌های معادله در بازهٔ $[0,2\pi]$ کدام است؟

۱) 4π ۲) $\frac{3\pi}{2}$ ۳) $\frac{17\pi}{6}$ ۴) $\frac{19\pi}{6}$

۱۵- اگر $\lim\limits_{x\to(\frac{\pi}{3})^+}\frac{2ax+b\pi}{3+a\tan^2 x}=-\infty$ باشد، حداقل مقدار $[3b]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -2 ۳) -1 ۴) ۲

۱۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^2+x+2b}{(x-a)(2x+b)}$ در مجاورت $x=a$ به‌صورت مقابل است. برای a چند مقدار صحیح قابل قبول وجود دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

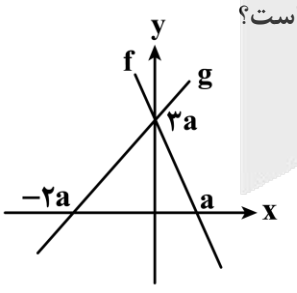
۱۷- اگر $f(x)=mx-\sqrt{4x^2+x}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{3x-1}{f(2x)}=\frac{1}{2}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{7}{2}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۱۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}xf^{-1}(\frac{a}{x})=2$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) ۲

۱۹- نمودار توابع خطی f و g به‌صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)-g^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) ۴/۸
۲) ۳/۶
۳) ۶/۳
۴) ۸/۴

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۲۰- خط $x=a$ مجانب قائم تابع $y=\tan\frac{2\pi}{3x-1}$ است. بیشترین مقدار a کدام است؟

۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{10}-3\\ \sqrt{10}+3 & 0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^5+A^7+A^9$ کدام است؟

۱) A ۲) $3A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $3I$

۲۲- اگر $B-C=\begin{bmatrix}1 & 4\\ 5 & 3\end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix}-1 & -3\\ 1 & 4\end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $ACA^{-1}-ABA^{-1}$ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

۲۳- اگر مجموع ماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix}a+2 & 0\\ b+1 & 5\end{bmatrix}$ و ماتریس $B=\begin{bmatrix}3 & c-1\\ d & 4\end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری باشد، دستگاه معادلات $(A-B)^2\begin{bmatrix}x\\ y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a\\ b\end{bmatrix}$ چند جواب دارد؟

۱) یک جواب منحصر به فرد دارد.
۲) بی‌شمار جواب دارد.
۳) فاقد جواب است.
۴) جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

۲۴- اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و $a_{ij}=\begin{cases}i & i\neq j\\ j^2 & i=j\end{cases}$ و $B=\left[\begin{array}{cc|c}1 & 0 & 1\\ \multicolumn{2}{c|}{A} & 3\\ \hline \multicolumn{2}{c|}{} & -1\end{array}\right]\left[\begin{array}{cc|c}2 & & \\ 0 & \multicolumn{2}{c}{A}\\ \hline 3 & 1 & -1\end{array}\right]$ باشد، دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) -66 ۳) ۶۶ ۴) -33

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix}2 & 2 & 4\\ 0 & 0 & 6\\ 1 & 2 & 3\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}1 & 2 & 1\\ 0 & 2 & 4\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}1 & 2 & 0\\ 0 & 3 & 2\\ 2 & 0 & 0\end{bmatrix}$ و رابطهٔ $AB+DA=AC$ بین ماتریس‌های A، B، C و D برقرار باشد، دترمینان وارون ماتریس $2D$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{1}{4}$ ۴) $\frac{1}{8}$

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۲۶- فصل مشترک یک صفحه و یک رویهٔ مخروطی کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) دو خط متقاطع ۲) سهمی ۳) دایره ۴) دو خط موازی

۲۷- نقاط A,B,C,D در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاطی که از A و B و همچنین از C و D به یک فاصله باشند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

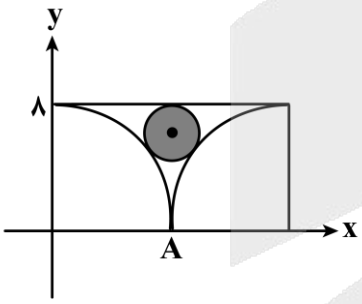
۲۸- دایره‌ای از نقطهٔ $A(۸,۳)$ گذشته و خطوط به‌صورت $(m-۱)x+(m+۲)y=۱۲m$ شامل تمام قطرهای آن هستند، بیشترین فاصلهٔ نقاط دایره از محور xها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

۲۹- معادلهٔ دایره‌ای که خطوط قائم بر آن همگی در نقطهٔ $(-۱,۱)$ همرسند و بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ مماس خارج است به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ است، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) -۴ ۴) ۲

۳۰- مطابق شکل، یک دایره بر دو ربع دایرهٔ محاط در یک مستطیل مماس است. طول قطعه مماسی که از نقطهٔ A بر این دایره رسم می‌شود، کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$
۲) $۴\sqrt{۳}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $۴\sqrt{۲}$

۳۱- به‌جای a در رابطهٔ $\frac{a^۲(a+۱)^۲}{۴۹}$ چند عدد طبیعی دو رقمی می‌توانیم قرار دهیم تا حاصل عددی زوج باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۲۶ ۴) ۳۸

۳۲- چند نقطه با مختصات طبیعی روی نمودار $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{۳}=۰$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۳۳- اگر $L=[۱۴۷,۱۳۷۲]$ باشد، حاصل عبارت $[(۲۴۵,۲۰۵۸),۶۸۶]$ کدام است؟

۱) L ۲) $\frac{L}{۲}$ ۳) $\frac{L}{۳}$ ۴) $\frac{L}{۶}$

۳۴- اگر رقم یکان دو عدد $۷a-۳$ و $۵a+۱$ با هم یکسان باشند، مجموع مقادیر باقیمانده‌های تقسیم عدد a بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

۳۵- معادلهٔ $۱۷a^{۲}x\overset{۸}{\equiv}۹-۲x$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. این معادله چند جواب طبیعی سه رقمی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸۴ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۲۴ ۴) ۲۴۲

۳۶- اگر معادلهٔ سیالهٔ $\overline{a۷۲b۱}=۳۹۶x+۴۹۵y$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب باشد، $a+b$ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۷- تعداد دورهای به طول ۳ در گراف کامل مرتبهٔ p، ۲۰ تا است. این گراف چند زیرگراف از مرتبهٔ ۴ مانند G دارد که در آن هر دو رأس مجاورند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

۳۸- در گراف G از مرتبهٔ ۱۰ اگر برای همهٔ رأس‌های آن رابطهٔ $|N_G(a)|=|N_{\bar{G}}[a]|$ همواره برقرار باشد، در این گراف $|E(G)|$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

۳۹- گراف G گرافی ۴-منتظم با $q(\bar{G})=۲۵$ است. حاصل $\sum_{i=۱}^{p}|N[v_i]|$ در این گراف کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

۴۰- اگر در گراف K_p هر یال با ۶ یال دیگر مجاور باشد، این گراف، چند زیرگراف ۲-منتظم دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۷

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

دفتـــــرچه شمـــــاره ۲

جمعه ۱۴ فروردین‌ماه ۱۴۰۵

جمع‌بندی و مرور نیم‌سال اول دوازدهم

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۵

ردیف	ماده امتحانی	تعداد سؤال	شماره سؤال		مدت زمان پاسخ‌گویی	ملاحظات
			از	تا		
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	۶۵ سؤال ۷۵ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

بودجه‌بندی دروس این آزمون

حسابان ۲	هندسه ۳	ریاضیات گسسته
تابع + مثلثات + حدهای نامتناهی، حد در بی‌نهایت صفحه‌های ۱ تا ۶۹	**ماتریس و کاربردها + آشنایی با مقاطع مخروطی** صفحه‌های ۹ تا ۴۶	**آشنایی با نظریه اعداد** (کل فصل ۱) **گراف و مدل‌سازی** (معرفی گراف) صفحه‌های ۱ تا ۴۲
سهم در کنکور: ۴ سؤال	سهم در کنکور: ۲ سؤال	سهم در کنکور: ۱ سؤال

فیزیک ۳	شیمی ۳
فصل های ۱ تا ۳ (تا ابتدای موج و انواع آن) صفحه‌های ۱ تا ۶۹	**مولکول‌ها در خدمت تندرستی:** کل فصل **آسایش و رفاه در سایه شیمی:** کل فصل صفحه‌های ۱ تا ۶۶
سهم در کنکور: ۹ سؤال	سهم در کنکور: ۹ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴

نیم‌سال دوم: ۹ مرحله آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید + فرصت‌هایی برای مرور و جبران + ۳ آزمون جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری

۱- **شروع نیم‌سال دوم؛ شروع نیمهٔ دوم رقابت با مهارت بیشتر:** فرصت برای شروع نیم‌سال دوم و پیشروی ۵۰ یا صددرصدی پایه دوازدهم + تکمیل مرور و یادگیری پایه یازدهم
(فرصت برای شروع نیم‌سال دوم+ تکمیل مرور و یادگیری پایه یازدهم)

۲- **فرصت‌های طلایی برای مرور و جبران:** در دو آزمون ۶ و ۱۴ فروردین می توانید به ترتیب مباحث پایه دهم و یازدهم + مباحث نیم‌سال اول دوازدهم را به طور کامل مرور و جمع بندی کنید.
(زمان مرور و جمع بندی دهم و یازدهم+ نیم سال اول دوازدهم)

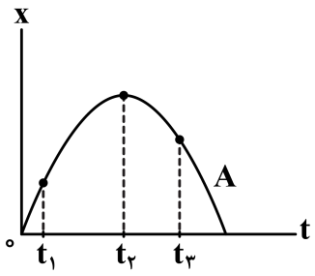
۳- **تکمیل تسلط بر نیم‌سال دوم + آزمون‌های مبحثی:** سه مرحله آزمون برای تکمیل و تسلط بر ۵۰ درصد پایانی نیم‌سال دوم + مرور پایه با نگاه ترکیبی به مباحث ✔ با آرامش خاطر و تسلط صد درصدی به استقبال امتحانات نهایی بروید!
(زمان تکمیل و تسلط بر نیم‌سال دوم دوازدهم)

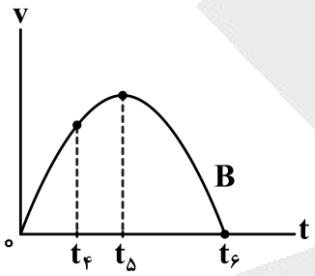
۴- **آزمون‌های جامع شبیه‌ساز و پیش‌بینی کنکور سراسری:** در سه آزمون جامع شبیه‌ساز کنکور سراسری، شرایط کاملاً مشابه با کنکور سراسری را تجربه کنید!
(ایستگاه جمع‌بندی و جبران)

۴۱- متحرکی در لحظهٔ $t=0$ از مبدأ مختصات بر روی یک خط راست شروع به حرکت می‌کند. اگر تندی متوسط این متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش برابر با $2\frac{m}{s}$ باشد و متحرک در این بازهٔ زمانی، تنها در مکان‌های $x_1=10m$ و $x_2=8m$ هر کدام یک بار تغییر جهت بدهد، سرعت متوسط این متحرک در این بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

۴۲- نمودار مکان ـ زمان متحرک A و نمودار سرعت ـ زمان متحرک B مطابق شکل‌های زیر هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟





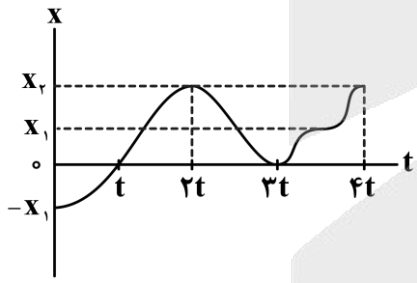
۱) تندی متحرک A در لحظهٔ t_2 بیش‌تر از سایر لحظه‌ها است.

۲) تندی متحرک B در لحظهٔ t_6 بیش‌تر از سایر لحظه‌ها است.

۳) متحرک B در لحظهٔ t_5 در بیش‌ترین فاصله از محل شروع حرکت قرار دارد.

۴) متحرک A در لحظهٔ t_2 در بیش‌ترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد.

۴۳- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t تا 4t، سه برابر سرعت متوسط آن در کل زمان حرکت باشد، نسبت $\frac{x_2}{x_1}$ در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟



۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{3}{2}$

۳) ۳ ۴) ۶

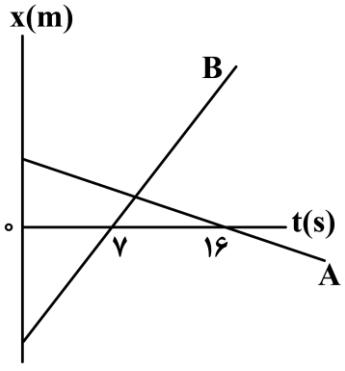
۴۴- متحرکی با سرعت ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند و در ۵ ثانیهٔ nاُم حرکتش، مسافت ۲۰m را طی می‌کند. به‌ترتیب از راست به چپ، متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت خود، چند متر را طی می‌کند و مدت‌زمان لازم برای این‌که متحرک از ۲۰ متری مبدأ مکان به ۳۰ متری مبدأ مکان برسد، چند ثانیه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۲، ۱۰ ۲) ۱۲، ۱۲/۵ ۳) ۸، ۱۰ ۴) ۸، ۱۲/۵

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۴۵- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک B، ۲ برابر تندی متحرک A و فاصلهٔ دو متحرک نسبت به یکدیگر در لحظهٔ $t = ۵s$ برابر با ۷۵m باشد، فاصلهٔ آن‌ها نسبت به یکدیگر در لحظهٔ $t = ۱۶s$ چند متر است؟

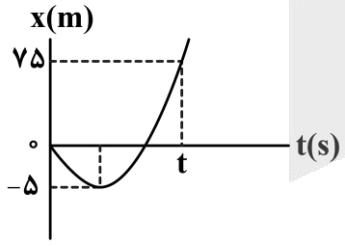


۱) ۸۵
۲) ۹۰
۳) ۹۵
۴) ۱۱۳

۴۶- متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x در مدت‌زمان ۶s از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد. اگر سرعت متحرک در لحظه‌های عبور از نقطه‌های A و B به‌ترتیب برابر با $(۵\frac{m}{s})\vec{i}$ و $(-۱۱\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، فاصلهٔ بین نقاط A و B چند متر است؟

۱) ۳۶
۲) ۳۰
۳) ۴۸
۴) ۱۸

۴۷- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر، بخشی از یک سهمی است. اگر در لحظهٔ t، سرعت متحرک برابر با $۲۰\frac{m}{s}$ باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا t، متحرک چند ثانیه در جهت محور x حرکت کرده است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

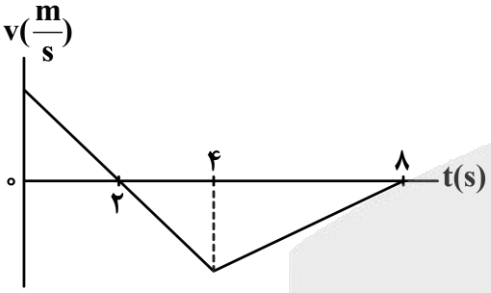
۴۸- متحرکی با شتاب ثابت، بر روی خط راست حرکت می‌کند. اگر تندی این متحرک در لحظه‌های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 9s$ برابر با $18\frac{m}{s}$ باشد، اندازهٔ آهنگ تغییر سرعت آن چند واحد SI است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

۴۹- معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، در SI به‌صورت $x_A = -2t^2 + 10t + 12$ و $x_B = 4t + 4$ است. تندی متوسط متحرک A در مدت‌زمانی که دو متحرک درحال نزدیک شدن به یکدیگر هستند، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱/۳ ۲) ۲/۶ ۳) ۳/۹ ۴) ۵/۲

۵۰- نمودار سرعت ـ زمان یک متحرک که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکتش برابر با $5\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی سرعت متوسط آن در همین بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟

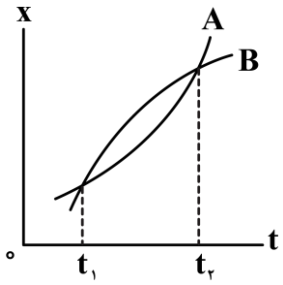


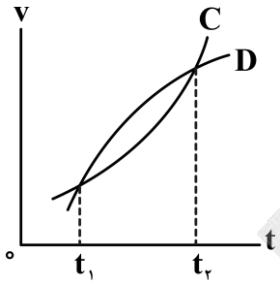
۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۴

محل انجام محاسبات

آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۵۱- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B و نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک C و D مطابق شکل‌های زیر می‌باشند. اگر هر چهار متحرک در لحظهٔ t_1 در مکان یکسانی بر روی محور x باشند، چه تعداد از عبارت‌های زیر در ارتباط با آن‌ها در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 درست است؟





الف ـ شتاب متوسط متحرک A، هم‌جهت با شتاب متوسط متحرک B است.

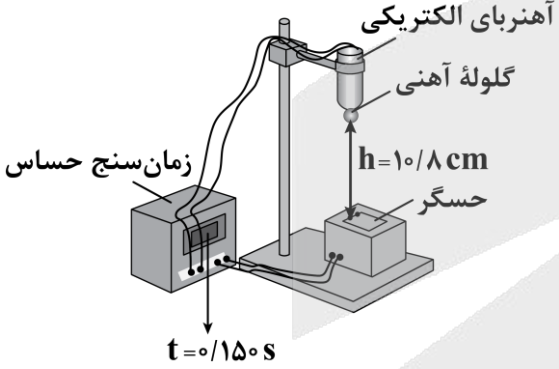
ب ـ شتاب متوسط متحرک C، برابر با شتاب متوسط متحرک D است.

ج ـ تندی متوسط متحرک A از متحرک B بیش‌تر است.

د ـ فاصلهٔ متحرک C از متحرک D ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۵۲- شکل زیر، اسباب انجام آزمایش ساده‌ای را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان شتاب گرانش را در محل آزمایش اندازه گرفت. اندازهٔ شتاب گرانش در محل آزمایش چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۹/۶

۲) ۹/۸

۳) ۱۰

۴) ۱۰/۲

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۵۳- در شرایط خلأ، دو گلولهٔ A و B به‌ترتیب در ارتفاع‌های ۸۰m و ۳۵m از سطح زمین قرار دارند. ابتدا گلولهٔ A را رها می‌کنیم و گلولهٔ B را زمانی رها می‌کنیم که گلولهٔ A هم‌ارتفاع با آن شده باشد. در لحظه‌ای که گلولهٔ A به سطح زمین می‌رسد، گلولهٔ B در ارتفاع چند متری سطح زمین می‌باشد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۱۰ ۲) ۵ ۳) ۳۰ ۴) ۲۵

۵۴- اگر نیروی خالص وارد بر جسمی در جهت حرکت جسم و اندازهٔ آن درحال کاهش باشد، نوع حرکت جسم، .....؛ و اگر نیروی خالص وارد بر جسمی در خلاف جهت حرکت جسم و اندازهٔ آن درحال افزایش باشد، نوع حرکت جسم، ..... خواهد بود.

۱) تندشونده ـ کندشونده ۲) کندشونده ـ تندشونده
۳) تندشونده ـ تندشونده ۴) کندشونده ـ کندشونده

۵۵- سه نیروی ۱۰، ۱۲ و ۱۶ نیوتونی، تنها نیروهایی هستند که به‌صورت هم‌زمان بر جسمی به جرم m وارد شده‌اند و جسم درحال تعادل قرار دارد. اگر فقط جهت یکی از آن‌ها را قرینه کنیم، بزرگی حداکثر شتاب حرکت جسم چند برابر بزرگی حداقل شتاب حرکت جسم می‌شود؟

۱) $\frac{8}{5}$ ۲) $\frac{8}{3}$ ۳) $\frac{14}{11}$ ۴) $\frac{13}{11}$

۵۶- معادلهٔ سرعت ـ زمان جسمی به جرم ۲kg که بر روی محور x در حال حرکت است، در SI به‌صورت $v=-2t^2+8t-3$ است. اگر بزرگی شتاب حرکت جسم در لحظهٔ $t=1s$ برابر با $4\frac{m}{s^2}$ باشد، بردار نیروی خالص وارد بر متحرک در لحظهٔ $t=3s$ برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟

۱) $+4\vec{i}$ ۲) $+8\vec{i}$ ۳) $-8\vec{i}$ ۴) $-4\vec{i}$

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
WWW.ArefOnline.ir

۵۷- فنر سبکی به طول $25cm$ را به سقف آسانسوری بسته و از آن یک وزنهٔ ۴ کیلوگرمی آویزان می‌کنیم. در حالت اول، آسانسور با شتاب رو به پایین $2\frac{m}{s^2}$، پایین می‌آید و طول فنر به $33cm$ می‌رسد. در حالت دوم آسانسور با شتاب رو به بالای $3\frac{m}{s^2}$ به حرکت رو به پایین خود ادامه می‌دهد. طول فنر در این حالت چند سانتی‌متر خواهد بود؟

$(g=10\frac{N}{kg})$

۱) ۳۸ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۳۴/۷۵

۵۸- چتربازی به جرم $80kg$ درحال سقوط به سمت پایین است. اگر در لحظه‌ای اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر آن $960N$ باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد حرکت چترباز پس از این لحظه تا رسیدن به زمین درست است؟

$(g=10\frac{N}{kg})$

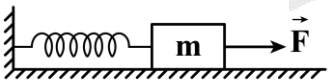
۱) نوع حرکت چترباز تندشونده است.

۲) اندازهٔ شتاب چترباز کم‌تر از $2\frac{m}{s^2}$ است.

۳) اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز درحال افزایش است.

۴) تندی چترباز تا رسیدن به تندی حدی افزایش می‌یابد و پس از آن ثابت می‌ماند.

۵۹- مطابق شکل زیر، به جسمی به جرم $800g$ که به فنری با ثابت $2\frac{N}{cm}$ متصل است، نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ را وارد کرده‌ایم. در این حالت، جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ بوده و افزایش طول فنر از حالت آزاد آن برابر با $7cm$ است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ چند نیوتون است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

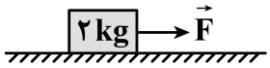
محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۶۰- دو گوی هم‌اندازهٔ A و B را که جرم یکی ۳ برابر دیگری است $(m_A = 3m_B)$، از بالای برجی به ارتفاع h به‌طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، ثابت و یکسان باشد، به‌ترتیب از راست به چپ، بزرگی سرعت متوسط و بزرگی تکانهٔ برخورد کدام گوی با سطح زمین بیش‌تر است؟

۱) A ،A ۲) A ،B ۳) B ،A ۴) B ،B

۶۱- در شکل زیر، به جسم ساکنی نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۲۵N وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به‌ترتیب ۰/۷ و ۰/۵ باشد، اندازهٔ نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟

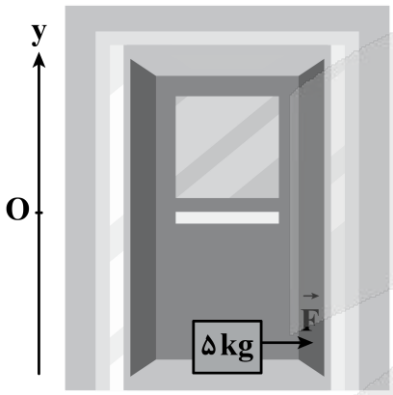


$(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) $10\sqrt{3}$ ۲) $10\sqrt{5}$ ۳) $2\sqrt{149}$ ۴) ۲۰

۶۲- در شکل زیر، آسانسور با شتابی به بزرگی $6\frac{m}{s^2}$ به‌صورت کندشونده به سمت پایین در حرکت است و به جسم ساکنی که در کف آسانسور قرار دارد، نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۶۰N وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به‌ترتیب ۰/۸ و ۰/۵ باشد، بزرگی نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، چند نیوتون است؟

$(g = 10\frac{N}{kg})$



۱) $10\sqrt{61}$

۲) ۸۰

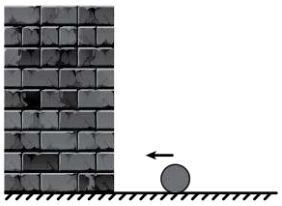
۳) $40\sqrt{5}$

۴) ۱۰۰

محل انجام محاسبات

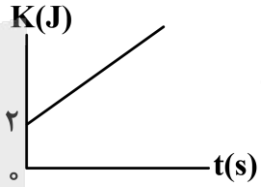
http://rubika.ir/Tahlilazemoon
آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

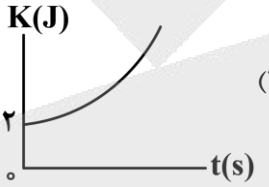
۶۳- مطابق شکل زیر، توپی به جرم ۴۰۰g در راستای افقی با تندی $15\frac{m}{s}$ به یک دیوار برخورد می‌کند و با تندی $10\frac{m}{s}$ در همان راستای افقی برمی‌گردد. اگر بزرگی نیروی متوسطی که دیوار بر توپ وارد می‌کند، برابر با ۵۰N باشد، مدت‌زمان تماس توپ با دیوار چند میلی‌ثانیه است؟

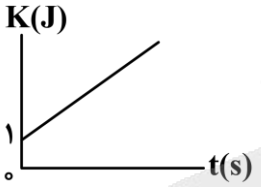


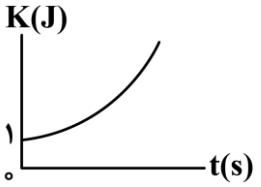
۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۱۰۰
۴) ۲۰۰

۶۴- معادلهٔ تکانه ـ زمان حرکت جسمی به جرم ۳kg در SI به‌صورت $p=\sqrt{9t+6}$ است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمودار انرژی جنبشی برحسب زمان این جسم را به‌درستی نشان می‌دهد؟

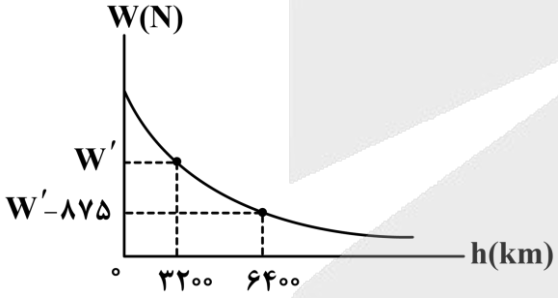
۱)


۲)


۳)


۴)


۶۵- یک ماهوارهٔ تحقیقاتی از سطح زمین پرتاب و به فضا فرستاده می‌شود. نمودار وزن ماهواره برحسب ارتفاع از سطح زمین، مطابق شکل زیر است. جرم این ماهواره چند کیلوگرم است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰km و بزرگی شتاب گرانش در سطح زمین برابر با $10\frac{N}{kg}$ است.)

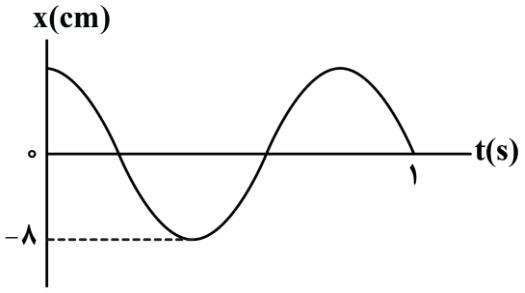


۱) ۴۵۰
۲) ۵۰۰
۳) ۹۰۰
۴) ۱۰۰۰

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۶۶- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای، مطابق شکل زیر است. معادلهٔ حرکت این نوسانگر برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟



۱) $x = ۸\cos(۲/۵\pi t)$

۲) $x = ۰/۰۸\cos(۲/۵\pi t)$

۳) $x = ۸\cos(۵\pi t)$

۴) $x = ۰/۰۸\cos(۵\pi t)$

۶۷- معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به‌صورت $x = ۰/۰۲\cos(۱۰\pi t)$ است. مسافتی که این نوسانگر در مدت‌زمان $t = ۰$ تا $t = \frac{۳}{۲۰}s$ طی می‌کند، برابر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

۶۸- جسمی را به انتهای فنری بسته و پس از کشیدن فنر، آن را رها می‌کنیم تا جسم شروع به نوسان هماهنگ ساده کند. مدت‌زمان $\frac{۳}{۴}s$ طول می‌کشد تا بزرگی تکانهٔ این نوسانگر هماهنگ ساده برای دومین بار به مقدار بیشینه برسد. حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا انرژی پتانسیل این نوسانگر از بیشینه به صفر برسد؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

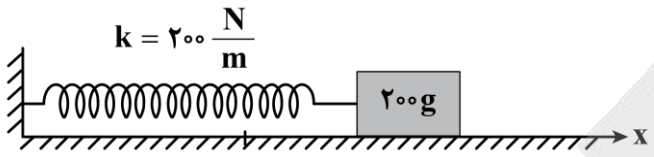
۶۹- طول نخ آونگ ساده‌ای را چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا بسامد نوسان آن ۲۰ درصد کاهش یابد؟

۱) ۳۶، کاهش ۲) ۳۶، افزایش ۳) ۵۶/۲۵، کاهش ۴) ۵۶/۲۵، افزایش

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon
آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۷۰- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم $200g$ را به انتهای فنری با ثابت $200\frac{N}{m}$ و طول $60cm$ متصل می‌کنیم. جسم را به سمت راست می‌کشیم تا طول فنر $80cm$ شود، سپس وزنه را رها کرده تا حرکت هماهنگ ساده انجام دهد. اگر اصطکاک جسم با سطح افقی ناچیز باشد، از لحظه‌ای که طول فنر $75cm$ و درحال افزایش است تا سومین بار پس از این لحظه که طول فنر $45cm$ می‌شود، چند ثانیه طول می‌کشد؟ $(\pi=\sqrt{10})$



۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۰/۳
۴) ۰/۴

۷۱- معادلهٔ نیرو ـ مکان یک نوسانگر هماهنگ ساده که بر روی پاره‌خطی به طول $10cm$ در راستای محور x نوسان می‌کند، در SI به‌صورت $F=-20x$ می‌باشد. بیشینهٔ انرژی پتانسیل این نوسانگر چند میلی‌ژول است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

۷۲- در لحظه‌ای که انرژی جنبشی یک نوسانگر هماهنگ ساده برابر با صفر است، بزرگی شتاب این نوسانگر برابر با $0/2\frac{m}{s^2}$ است. اگر بزرگی سرعت این نوسانگر در مرکز نوسان برابر با $0/1\frac{m}{s}$ باشد، زمانی که نوسانگر در فاصلهٔ $2cm$ از نقطهٔ بازگشت قرار دارد، بزرگی شتابش چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۲

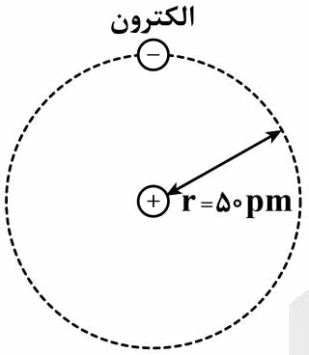
محل انجام محاسبات

آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۷۳- میل‌لنگ یک خودرو که قطر محور آن $5cm$ است، در هر دقیقه ۲۴۰۰ دور می‌چرخد. تندی نقطه‌ای روی لبهٔ محور این میل‌لنگ چند متر بر ثانیه است؟

۱) 2π
۲) 4π
۳) ۲
۴) ۴

۷۴- مطابق شکل زیر، الکترونی به جرم $9\times10^{-31}kg$ حول پروتونی، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. اندازهٔ شتاب مرکزگرا و تندی حرکت الکترون به‌ترتیب از راست به چپ برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟



($k=9\times10^{9}\frac{N.m^2}{C^2}$ ، $e=1/6\times10^{-19}C$ و نیروی وزن ناچیز است.)

۱) $1/024\times10^{23}$ و $1/6\times10^{6}$
۲) $1/024\sqrt{2}\times10^{23}$ و $1/6\times10^{6}$
۳) $1/024\times10^{23}$ و $1/6\sqrt{2}\times10^{6}$
۴) $1/024\sqrt{2}\times10^{23}$ و $1/6\sqrt{2}\times10^{6}$

۷۵- کدام گزینه در ارتباط با حرکت دایره‌ای ماهواره‌ها به دور زمین صحیح است؟

۱) مربع دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مکعب فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین است.
۲) مربع دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مکعب فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین است.
۳) مکعب دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مربع فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین است.
۴) مکعب دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مربع فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین است.

محل انجام محاسبات

آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۷۶- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) در طول سال‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی برای بیش از ۵۰٪ مردم ساکن در جهان، کمتر از ۵۰ سال است.

۲) اوره، از جمله مواد نیتروژن‌دار محلول در آب بوده و بین ذرات سازنده آن امکان ایجاد پیوندهای هیدروژنی وجود دارد.

۳) با گذشت زمان، میانگین امید به زندگی در جهان، به میانگین امید به زندگی مناطق توسعه یافته نزدیک‌تر می‌شود.

۴) عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتیلن گلیکول، منفی‌تر از عدد اکسایش اتم کربن در ساختار دی‌کلرومتان است.

۷۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ چربی‌ها، حاوی برخی از انواع مواد اسیدی بوده و نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها از نوع واندروالسی است.

ب ـ فقط یکی از کاتیون‌هایی که باعث افزایش درجه سختی آب می‌شوند، در آرایش خود ۲ لایه پر از الکترون دارد.

ج ـ اسید چرب سازندهٔ استر سه عاملی با فرمول $C_{۵۷}H_{۱۰۴}O_۶$، سیرشده بوده و دارای ۱۸ اتم کربن است.

د ـ با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، بخش قطبی ذرات صابون در کنار هم قرار می‌گیرد.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

۷۸- بر اثر واکنش ۲۴۰ گرم از یک استر سنگین سه عاملی با مقدار کافی محلول سود سوزآور، ۲۴۸/۴ گرم صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na$ تولید شده است. جرم مولی استر سنگین مصرف شده برابر با چند گرم است؟

$(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۷۵۸ ۲) ۸۸۴ ۳) ۸۴۲ ۴) ۸۰۰

۷۹- با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی در ساختار نوعی صابون، ..... .

۱) انحلال‌پذیری صابون در آب بیشتر می‌شود ۲) درصد جرمی اکسیژن در صابون کاهش می‌یابد

۳) حالت فیزیکی صابون تغییر می‌کند ۴) قدرت نیروهای بین ذره‌ای صابون با آب افزایش می‌یابد

۸۰- اگر زنجیر آلکیل متصل به بخش آب‌دوست یک صابون جامد دارای ۱۶ اتم کربن باشد، چند گرم از این صابون با ۴ لیتر محلول ۰/۴ مولار کلسیم کلرید به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟

$(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۴۴۴/۸ ۲) ۸۸۹/۶ ۳) ۴۶۷/۲ ۴) ۹۳۴/۴

۸۱- اگر مقدار مول برابر از ..... و ..... را به‌صورت مجزا در حجم یکسان از آب مقطر حل کنیم، شمار یون‌ها در دو محلول ایجاد شده برابر خواهد بود.

۱) گاز هیدروژن فلوئورید ـ نمونه جامد لیتیم اکسید ۲) گاز آمونیاک ـ نمونه جامد دی‌نیتروژن پنتاکسید

۳) گاز گوگرد تری‌اکسید ـ نمونه باریم اکسید ۴) نمونه لیتیم هیدروکسید ـ نیترو اسید

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

WWW.ArefOnline.ir

۸۲- درصد یونش مولکول‌های اسید HA در محلولی از این ماده با غلظت ۲۰ گرم بر لیتر، برابر با ۲/۵٪ است. pH محلول مورد نظر چقدر بوده و ثابت یونش این اسید در شرایط داده شده چقدر است؟ ($HA = ۵۰\ g.mol^{-1}$)

۱) ۲×۱۰^{-۴} ـ ۲ ۲) ۴×۱۰^{-۴} ـ ۱ ۳) $۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$ ـ ۲ ۴) $۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$ ـ ۱

۸۳- مقداری گاز متیل‌آمین ($K_b = ۲ \times ۱۰^{-۵}$) را در آب حل کرده و حجم محلول را به ۳/۵ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل از این فرایند برابر با ۱۱/۶ شده باشد، حجم گاز متیل آمین حل شده در محلول برابر چند لیتر است؟ (در شرایط آزمایش، حجم هر مول ماده گازی برابر ۲۴ لیتر است.)

۱) ۲۲/۴ ۲) ۴۴/۸ ۳) ۳۳/۶ ۴) ۶۷/۲

۸۴- اگر به ۰/۵ لیتر محلول ۰/۰۰۲ مولار اسید ضعیف HA، مقدار ۲۴ لیتر آب خالص اضافه کنیم، pH محلول چند واحد تغییر پیدا می‌کند و ۵۰ میلی‌لیتر از محلول غلیظ اولیه با چند مول سدیم هیدروکسید واکنش داده و خنثی می‌شود؟

۱) $۱۰^{-۴}$ ـ ۱/۷ ۲) ۲×۱۰^{-۴} ـ ۱/۷ ۳) ۲×۱۰^{-۴} ـ ۰/۸۵ ۴) $۱۰^{-۴}$ ـ ۰/۸۵

۸۵- اگر در محلولی از پتاسیم هیدروکسید، نسبت غلظت یون هیدروکسید به غلظت یون هیدروژن برابر با ۴×۱۰^{۶} باشد، pH این محلول برابر با ..... شده و غلظت یون پتاسیم در این محلول در مقیاس ppm برابر با ..... می‌شود. (چگالی محلول برابر با $۱/۰۴\ g.mL^{-۱}$ است. $K = ۳۹ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۵ ـ ۱۰/۳ ۲) ۷/۵ ـ ۱۰/۳ ۳) ۵ ـ ۱۱/۳ ۴) ۷/۵ ـ ۱۱/۳

۸۶- یک نمونه سدیم نیترات، در ساختار خود $۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۲}$ اتم اکسیژن دارد. با تجزیه این نمونه بر اساس معادله زیر، چند میلی‌لیتر گاز نیتروژن در شرایط استاندارد تولید شده و با استفاده از سدیم اکسید تولید شده، چند لیتر محلول سود با غلظت ۰/۱ مولار می‌توان تهیه کرد؟

$NaNO_۳(s) \rightarrow Na_۲O(s) + O_۲(g) + N_۲(g)$ معادله واکنش موازنه شود

۱) ۱۱۲ ـ ۰/۵ ۲) ۲۲۴ ـ ۰/۵ ۳) ۱۱۲ ـ ۰/۲ ۴) ۲۲۴ ـ ۰/۲

۸۷- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) در دما و غلظت یکسان، قدرت اسیدی محلول نیتریک اسید کمتر از قدرت اسیدی محلولی از نیتروواسید است.

۲) اسید معده، یک اسید تک‌پروتون‌دار بوده و موجب فعال کردن آنزیم‌های گوارشی موجود در معده می‌شود.

۳) مقدار pH خون موجود در رگ‌های بدن انسان، همانند آب گازدار، بیشتر از pH آب خالص است.

۴) اکسیدهای نافلزی در ساختار خود دارای پیوند اشتراکی بوده و همه آن‌ها اسید آرنیوس هستند.

۸۸- رسانایی الکتریکی کدام محلول زیر، با رسانایی الکتریکی محلولی از هیدروکلریک اسید با $pH = ۰/۵$ برابر است؟

۱) محلول آبی ۰/۱ مولار کلسیم نیترات ۲) محلول آبی ۰/۲ مولار سدیم سولفات

۳) محلول آبی ۰/۳ مولار پتاسیم فسفات ۴) محلول آبی ۰/۵ مولار لیتیم کلرید

محل انجام محاسبات

آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۸۹- به ۴۰ میلی‌لیتر محلول نیتریک اسید ۰/۰۵ مولار، مقدار $10mL$ محلول باریم هیدروکسید اضافه می‌کنیم. اگر محلول حاصل با ۲۲۴ میلی‌لیتر گاز HCl در شرایط استاندارد به‌طور کامل خنثی شود، pH محلول قبل از افزودن هیدروژن کلرید و غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید اولیه به ترتیب کدام است؟

$(Cl = ۳۵/۵ , O = ۱۶ , N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۰/۶ ـ ۱۳/۶ ۲) ۰/۶ ـ ۱۳/۳ ۳) ۰/۸ ـ ۱۳/۶ ۴) ۰/۸ ـ ۱۳/۳

۹۰- محلولی از یک اسید ضعیف با $Ka = ۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$ و $pH = ۳$ در اختیار داریم. تفاوت غلظت مولی ذرات اسید یونیده نشده و غلظت مولی یون هیدرونیوم، در این محلول چقدر است؟

۱) ۰/۰۱۲ ۲) ۰/۰۰۹ ۳) ۰/۰۰۶ ۴) ۰/۰۰۳

۹۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) برای باز کردن راه لوله‌ای که توسط رسوب آهک مسدود شده است، می‌توان از محلول سولفوریک اسید استفاده کرد.

۲) دیواره داخلی معده انسان، به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در حفره معده را جذب می‌کند.

۳) باز موجود در شیر منیزی، برخلاف باز موجود در شیشه‌پاک‌کن، نامحلول در آب بوده و نوعی ترکیب یونی است.

۴) عناصر موجود در ساختار جوش شیرین، به یقین در ساختار یک پاک‌کننده صابونی نیز وجود دارند.

۹۲- یک نمونه ۳۰۰ گرمی از اسید HB با درصد یونش ۲/۵٪ را وارد ۲ لیتر آب مقطر می‌کنیم تا محلولی با $pH = ۱/۳$ به‌دست بیاید. چند درصد از اسید در آب حل شده و در ۵۰۰ میلی‌لیتر از این محلول، چند مول یون هیدروکسید وجود دارد؟ (از تغییر حجم محلول بر اثر انحلال اسید صرف‌نظر شود. $HB = ۶۰\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۴۰ ـ $۱۰^{-۱۳}$ ۲) ۴۰ ـ ۲×۱۰^{-۱۳} ۳) ۸۰ ـ $۱۰^{-۱۳}$ ۴) ۸۰ ـ ۲×۱۰^{-۱۳}

۹۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) ساخت قوطی محتوی مواد غذایی و لوازم آشپزی مقاوم در برابر خوردگی، در گرو بهره‌گیری از دانش الکتروشیمی است.

۲) سیلیسیم، یک شبه‌فلز با سطح براق بوده و عنصر اصلی سازنده یکی از اجزای تشکیل‌دهنده چراغ‌های خورشیدی است.

۳) در زمان گذشته، از واکنش سوختن یکی از عناصر دسته s، به‌عنوان منبع نور برای عکاسی استفاده می‌شده است.

۴) در نیم‌واکنش اکسایش مربوط به تبدیل یون $MnO_۴^-$ به یون منگنز(II)، تعداد ۵ الکترون مبادله می‌شود.

۹۴- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ در سلول گالوانی روی-مس، الکترون‌های موجود در مدار خارجی به سمت تیغه روی جاری می‌شوند.

ب ـ بین آهن و مس، قدرت کاهندگی عنصر با تعداد الکترون ظرفیتی بیشتر، نسبت به عنصر دیگر کمتر است.

ج ـ واکنش سلول روی-مس مشابه واکنشی است که با ورود تیغهٔ روی به محلول مس(II) سولفات اتفاق می‌افتد.

د ـ از محلول یک مولار فورمیک اسید، می‌توان به‌عنوان الکترولیت موجود در ساختار نیم‌سلول SHE استفاده کرد.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

محل انجام محاسبات

آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

۹۵- کدام‌یک از عبارت‌های زیر در رابطه با عنصر مس، درست است؟

۱) این عنصر فلزی، به رنگ نارنجی دیده شده و در هیچ شرایطی دچار خوردگی نمی‌شود.

۲) آرایش الکترونی این عنصر، از قاعده آفبا پیروی کرده و در اتم آن، لایه $n = ۳$ پر از الکترون است.

۳) با قرار دادن این فلز در محلول آلومینیم سولفات، دمای محلول افزایش یافته و رنگ محلول آبی می‌شود.

۴) از ظروف ساخته شده با استفاده از این فلز واسطه، می‌توان برای نگهداری محلول‌های اسیدی استفاده کرد.

۹۶- در سلول گالوانی منیزیم-نقره که از اتصال دو نیم‌سلول استاندارد تشکیل شده و حجم الکترولیت‌های به کار رفته در هر نیم‌سلول آن برابر با ۰/۵ لیتر است، پس از حرکت $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۳}$ الکترون از مدار خارجی، نسبت غلظت مولی کاتیون‌ها در نیم‌سلول آندی به نیم‌سلول کاتدی چقدر می‌شود؟ (دیواره متخلخل، فقط به آنیون‌ها اجازه عبور می‌دهد.)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲

۹۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر در رابطه با باتری دگمه‌ای روی-نقره درست است؟

الف ـ با تغییر دمای محیط، مقدار نیروی الکتروموتوری این سلول دچار تغییر می‌شود.

ب ـ کاتیون‌های نقره، از خلال غشای متخلخل موجود در ساختار این باتری عبور می‌کنند.

ج ـ اگر به‌جای فلز روی، از فلز لیتیم در این باتری استفاده کنیم، مقدار emf آن کاهش پیدا می‌کند.

د ـ در این سلول، همانند سلول نورالکتروشیمیایی مربوط به تولید گاز هیدروژن، انرژی الکتریکی تولید می‌شود.

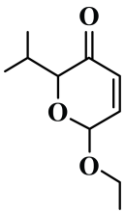
۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

۹۸- از میان سلول‌های گالوانی زیر، چه تعداد از سلول‌ها دارای emf بزرگ‌تر از سلول روی-هیدروژن بوده و در چه تعداد از سلول‌ها، یک فلز واسطه در نقش آند قرار گرفته است؟

سلول (۱)	سلول (۲)	سلول (۳)	سلول (۴)
قلع ـ هیدروژن	منیزیم ـ مس	آلومینیم ـ هیدروژن	روی ـ نقره

۱) ۳ ـ ۱ ۲) ۳ ـ ۲ ۳) ۲ ـ ۱ ۴) ۲ ـ ۲

۹۹- کدام مورد زیر، در رابطه با ساختار مولکول داده شده نادرست است؟ ($H = ۱ , O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)



۱) دارای ۳ گروه متیل و یک گروه عاملی کربونیل است.

۲) شمار اتم‌های هیدروژن در آن، ۴ برابر شمار پیوندهای $C - O$ است.

۳) جرم اتم‌های اکسیژن موجود در آن، ۶ برابر جرم اتم‌های هیدروژن است.

۴) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن، ۳ برابر شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش مثبت است.

محل انجام محاسبات

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۰- یک سلول الکترولیتی، در حال برقکافت آب است. در سمتی از این سلول که گاز تولید شده در آن دمای جوش بیشتری دارد، ۸ گرم فراورده گازی تولید شده است. در مدار خارجی این سلول چند الکترون مبادله شده و در قطب دیگر سلول، چند لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید می‌شود؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-1})$

۱) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ـ ۵/۶
۲) $۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۴}$ ـ ۵/۶
۳) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ـ ۱۱/۲
۴) $۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۴}$ ـ ۱۱/۲

۱۰۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) سلول‌های سوختی، نوعی سلول گالوانی هستند که باعث کاهش ردپای کربن دی‌اکسید می‌شوند.
۲) نیم‌واکنش کاهش در کاتد سلول‌های مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب و منیزیم کلرید مذاب، یکسان است.
۳) در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن با غشای مبادله کننده هیدروژن، بخار آب از سمت قطب مثبت خارج می‌شود.
۴) در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا، یک ترکیب یونی دوتایی را به حالت مذاب درآورده و سپس برقکافت می‌کنند.

۱۰۲- مخلوطی از مس (II) کلرید و آهن (II) برمید مذاب را در یک سلول الکترولیتی برقکافت می‌کنیم. در ساختار هر اتم از فراورده تولید شده در قطب منفی این سلول، چند الکترون با $n = ۳$ وجود دارد؟

۱) ۱۷
۲) ۱۸
۳) ۱۴
۴) ۷

۱۰۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ آهن سفید، یکی از فراورده‌های صنعتی است که از آن برای ساختن تانکر آب و کانال کولر استفاده می‌شود.
ب ـ با اتصال فلزهای آهن و منیزیم به یکدیگر در هوای مرطوب، منیزیم نقش آند را ایفا کرده و خورده می‌شود.
ج ـ با انحلال گاز $SO_۲$ در قطرات آب موجود بر سطح آهن، سرعت خوردگی این فلز کاهش پیدا می‌کند.
د ـ به ازای خوردگی هر مول فلز آهن در مجاورت رطوبت هوا، ۱/۵ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

۱) «الف» و «ب»
۲) «ب» و «ج»
۳) «ج» و «د»
۴) «الف» و «د»

۱۰۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) در فرایند آبکاری، تغییر جرم دو الکترودی که در الکترولیت قرار گرفته‌اند، می‌تواند برابر باشد.
۲) در فرایند آبکاری، جسم فلزی که آبکاری روی آن انجام می‌شود، به تیغه کاتدی باتری متصل است.
۳) همانند سلول فرایند هال، جرم آند به کار رفته در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، به مرور کاهش می‌یابد.
۴) تولید قوطی آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، به ۷۰٪ از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

۱۰۵- در یک سلول الکترولیتی مربوط به فرآیند هال، اگر ۱۰٪ از کل الکترولیت موجود در سلول برقکافت شود، $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۴}$ الکترون میان دو الکترود مبادله می‌شود. در صورت مصرف کل الکترولیت موجود در سلول، چند تیغه ۱۵ گرمی گرافیت مصرف شده و چند گرم آلومینیم با خلوص ۹۶٪ تولید می‌شود؟ $(Al = ۲۷ , C = ۱۲ : g.mol^{-1})$

۱) ۴ ـ ۱۸۷/۵
۲) ۴ ـ ۹۳/۸
۳) ۵ ـ ۹۳/۸
۴) ۵ ـ ۱۸۷/۵

محل انجام محاسبات

آزمون ماز
WWW.ArefOnline.ir

بودجه‌بندی دروس آزمون بعد...

تاریخ برگزاری: ۲۷ فروردین‌ماه

حسابان ۲

کاربردهای مشتق
صفحه‌های ۱۱۱ تا ۱۲۶

هندسه ۳

بردارها
صفحه‌های ۶۴ تا ۷۶

ریاضیات گسسته

ترکیبیات
صفحه‌های ۶۲ تا ۷۲

ریاضی پایه

الگو و دنباله +
توان‌های گویا و
عبارت‌های جبری +
جبر و معادله و نامعادله + مثلثات
ریاضی ۱:
فصل‌های ۱ (درس ۳ و ۴)، ۲، ۳ و ۴
حسابان ۱:
فصل‌های ۱ و ۴

هندسه پایه

هندسهٔ ۱
(کل کتاب)

آمار و احتمال

آمار و احتمال
(فصل ۲)
ریاضی ۱:
(فصل ۷ درس ۱)

فیزیک ۳

آشنایی با فیزیک اتمی
صفحه‌های ۱۱۵ تا ۱۳۶

شیمی ۳

شیمی، راهی به سوی
آینده‌ای روشن‌تر:
از ابتدای آمونیاک و بهره‌وری
در کشاورزی تا انتهای ارزش
فناوری‌های شیمیایی
صفحه‌های ۱۰۳ تا ۱۱۱

فیزیک پایه

فیزیک ۱
(کل کتاب)

شیمی پایه

آزمون جامع شیمی آلی
شیمی یازدهم (هیدروکربن‌ها)
صفحه‌های ۳۱ تا ۴۳
شیمی یازدهم (اترها، کتون‌ها و آلدهیدها)
صفحه‌های ۷۰ تا ۷۲
شیمی یازدهم (کربوکسیلیک اسیدها)
صفحه ۸۴
شیمی یازدهم (پلیمرها، آمین‌ها و آمیدها)
صفحه‌های ۱۰۲ تا ۱۲۱

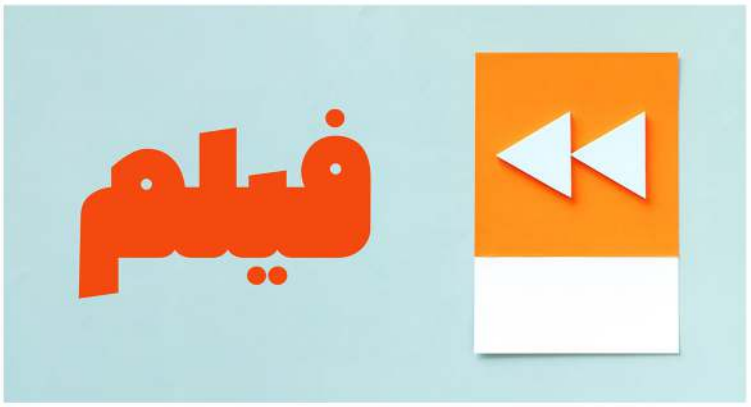
مرکز مشاوره عارف

WWW.ArefOnline.ir

آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

مرکز مشاوره عارف

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایهٔ دوازدهم

دفترچه پاسخ

جمعه ۱۴ فروردین ماه ۱۴۰۵

جمع‌بندی و مرور نیم‌سال اول دوازدهم

ویژهٔ کنکـــوری‌های ۱۴۰۵

- پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- تحلیل تمام گزینه‌های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده‌اید
- نکات و درسنامه‌های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- مشاورهٔ تستی؛ برای یادگیری انواع روش‌های حل تست
- استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسهٔ آزمون

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	حسین شفیع‌زاده ـ مهرداد کیوان علی منصف‌شکری ـ سوگند روشنی	مهرداد اسپیدکار ـ مائده بادان فیروز ندا فرهختی ـ حمیدرضا ولی‌پور یزدان نیک قدم ـ فؤاد خیرآبادی علی اسدی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سجاد صادقی‌زاده ـ سعید احمدی محمدجواد سورچی ـ حسین عبدوی‌نژاد مهدی پارسا ـ مروارید شاه‌حسینی سارا قانع ـ محسن قندچلر ـ زهره آقامحمدی مصطفی واثقی ـ احسان ایرانی امیرحسین اکبری ـ مهدی یوسفی امیررضا خوینی‌ها	مروارید شاه‌حسینی حنا خلعتبری
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ فرهنگ امیری عالیه میرزایی	فرهنگ امیری ـ رامین رزمجو سجاد سیف‌اللهی محمد دارابی‌جم

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان — نازنین امیری

مائده بادان‌فیروز — زهره جعفری

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری

WWW.ArefOnline.ir

آموزش استراتژی آزمون و مدیریت جلسه کنکور- قسمت ۲۰

خانواده و درس خوندن

شاید بعضی وقت‌ها وقتی می‌خوای برای کنکور درس بخونی، توی ذهنت این فکر بیاد که شرایط خونه خیلی برای درس خوندن ایده‌آل نیست. مثلاً با خودت بگی: «اگه خونه آروم‌تر بود یا شرایط یه کم بهتر بود، راحت‌تر می‌تونستم درس بخونم.» این فکر تا حدی طبیعیه و خیلی از دانش‌آموزها تجربه‌ش می‌کنن.

اما اینجا قرار نیست دربارهٔ این صحبت کنیم که خونواده دقیقاً چه کارهایی باید انجام بدن تا شرایط بهتر بشه. چون اگر بیش از حد روی این موضوع تمرکز کنیم، ممکنه کم‌کم ذهنمون عادت کنه همه چیز رو به شرایط بیرونی ربط بده و تمرکزمون از چیزی که واقعاً دست خودمونه دور بشه.

هدف این مطلب بیشتر اینه که یاد بگیریم چطور در کنار خونواده و اطرافیان، با آرامش بیشتری درس بخونیم و رابطه‌ای داشته باشیم که تنش کمتری ایجاد کنه؛ طوری که هم حال خودمون بهتر باشه و هم تمرکزمون برای درس خوندن حفظ بشه.

اینجا قراره یاد بگیری چطوری هیجانات خودت و خونواده‌ت رو کنترل کنی تا وقتی برای کنکور درس می‌خونی (و حتی بقیهٔ وقتا) بتونی با آرامش بیشتری کنار بقیه زندگی کنی و درس بخونی.

واقعیت اینه که هر کسی در کنار خانواده و اطرافیانش گاهی با اختلاف نظر روبه‌رو می‌شه و این کاملاً طبیعیه. تعارض یعنی دقیقاً همین لحظه‌هایی که خواستهٔ تو با خواستهٔ یک نفر دیگه جور درنمیاد. مثلاً تو می‌خوای توی سکوت درس بخونی، اما یکی از اعضای خونواده تلویزیون رو روشن کرده؛ یا تو برنامه‌ریزی کردی شب زودتر بخوابی، ولی بقیه هنوز بیدارن و سر و صدا هست.

در این جور موقعیت‌ها معمولاً هر دو طرف احساس می‌کنن حق با خودشونه و همین‌جا جرقهٔ بحث یا دلخوری زده می‌شه.

به این موقعیت‌ها می‌گیم «تعارض».

حالا سؤال مهم اینه که وقتی چنین موقعیت‌هایی پیش میاد، باید چه کار کنیم؟ جالبه بدونی برای برخورد با تعارض‌ها در کل **چهار نوع واکنش یا راه‌حل** وجود داره؛ نه بیشتر. توی ادامه می‌خوایم این چهار مدل رو با هم مرور کنیم تا بدونی در هر موقعیتی کدوم انتخاب می‌تونه منطقی‌تر و کم‌هزینه‌تر باشه.

قبل از اینکه بریم سراغشون یه مثال بزنم. فرض کن تو و داداشت می‌خواین تلویزیون ببینین. تو می‌خوای شبکهٔ آموزش ببینی، اون می‌خواد فوتبال ببینه. خب اینجا دعوا شروع می‌شه! حالا ببین چه مدل‌هایی برای حلش داریم:

۱. جنگیدن

اولین چیزی که معمولاً به ذهن آدم می‌رسه، جنگیدنه! مثلاً دعوا می‌کنی، کنترل رو می‌گیری، اونم جیغ می‌زنه و اعصاب داغون می‌شه.

این روش هزار تا ضرر داره — از آسیب جسمی گرفته تا اعصاب‌خوردی. **پس فقط وقتایی ازش استفاده کن که واقعاً چیزی که می‌خوای ارزش اون همه هزینه رو داشته باشه. وگرنه نرو سمتش!**

WWW.ArefOnline.ir

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

۲. قهر، فرار، تصریم

راه دوم هم معمولاً کار آدماییه که هنوز از نظر روحی کاملاً پخته نیستن. قهر کردن یعنی باخت - باخت. چون هم تو از بودن با اون محروم می‌شی، هم اون از بودن با تو. این در واقع به هیچ‌کدومتون سود نمی‌رسونه.

فقط وقتی از این روش استفاده کن که همه‌چی رو امتحان کردی و طرف مقابل با گفت‌وگو و تعامل درست نشد؛ اونم نه بیشتر از دو سه روز. چون وقتی طولش بدی، ذهن شروع می‌کنه از اون آدم یه «دشمن» می‌سازه و همهٔ خوبی‌هاشو فراموش می‌کنی. **نتیجه‌اش؟ اعصاب داغونِ خودت!**

۳. تسلیم شدن

تسلیم شدن همیشه بد نیست! اگه با فکر و حساب باشه حتی از گفت‌وگو هم مؤثرتره.

مثلاً شاید دیدن شبکهٔ آموزش برای تو ۵۰٪ مهمه، ولی برای داداشت فوتبال ۸۰٪ اهمیت داره. اینجور وقتا اگه بتونی کوتاه بیای و بگی:

«باشه عزیزم، تو فوتبال ببین، من آموزش رو بعداً می‌بینم.»

با همین کار ساده هم فداکار دیده می‌شی، هم احتمال زیاد بعداً اونم وقتی نوبتت شد، باهات راه میاد.

۴. گفت‌وگو

با کلاس‌ترین و عاقلانه‌ترین گزینه همینه. گفت‌وگو یعنی به‌جای داد و سکوت قهرآلود، حرف بزنی. خیلی وقتا فقط با یه گفت‌وگوی آروم و محترمانه، راه‌حل خودبه‌خود پیدا می‌شه.

اجازه نده ناراحتی‌ها و فکرای منفی هی تو ذهنت بمونن و تمرکزت رو از درس خوندن برای کنکور بگیرن. فقط بگو چی اذیتت کرده.

مثلاً ساده بگو:

«فلان کارت منو ناراحت کرد.»

بدون داد زدن و فحش دادن و جنجال!

جمع‌بندی آخر...

وقتی برای کنکور درس می‌خونی، جنگ و قهر رو تا حد ممکن کنار بذار.

درعوض یاد بگیر آگاهانه از تسلیم سنجیده و گفت‌وگو استفاده کنی.

اینطوری هم اعصابت راحت‌تره، هم رابطه‌هات آروم‌تر می‌شن، هم تمرکزت برای درس خوندن برای کنکور حفظ می‌شه.

WWWW.ArefOnline.ir

راهنمای پاسخنامه آزمون ها

زمان پاسخگویی:
سریع (زیر ۱ دقیقه) | استاندارد (۱-۲ دقیقه) | زمان‌بر (بیشتر از ۲ دقیقه).

پاسخ: گزینهٔ ۳ — (متوسط ـ خط به خط ـ سریع ـ صفحه ۱۶ ـ ۱۱۰۱)

سطح سؤال:
آسان (اعتمادبه‌نفس) | متوسط (محک جدی) | دشوار (چالش رشد).

هشتگ سوال:
شماره درس + شماره پایه
دسته‌بندی راحت‌تر سؤالات

سبک سؤال:
خط به خط (متن کتاب) | ترکیبی (چند مبحث) | محاسباتی (فرمول و دقت) | مفهومی (درک عمیق).

شماره صفحه:
منبع اصلی رو راحت پیدا کنید.

یادتون باشه:

- ✓ هر سؤال یک فرصت یادگیریه، نه یک مانع.
- ✓ پاسخ‌نامه فقط جواب نیست؛ یک کارگاه آموزشی کامله.
- ✓ با هر آزمون و مرور این پاسخ‌نامه، یک پله بالاتر می‌رید و یک قدم به رؤیاتون نزدیک‌تر می‌شید.
- ✓ موفقیت فقط برای کسایی‌یه که با برنامه و انگیزه حرکت می‌کنن. شما همون آدمید.

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: تابع + مثلثات + حدهای نامتناهی ـ حد در بی‌نهایت، صفحه‌های ۱ تا ۶۹
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها + آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۹ تا ۴۶
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد + گراف و مدل‌سازی (معرفی گراف)، صفحه‌های ۱ تا ۴۲

سهم در کنکور

حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۴ تست از ۶ تستِ کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تستِ کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی

۱- نمودار تابع $y=x^2-6x+1$ را ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالا انتقال می‌دهیم و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم تا تابع f به‌دست آید. مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f(2x-6)$ کدام است؟

۱) $\frac{4}{3}$ ۲) $\frac{22}{3}$ ۳) ۶ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

ترجمهٔ صورت سؤال

$f(x)=f(2x-6)$ یعنی عرض نقاط x و $2x-6$ برابر باشد.

$$y=x^2-6x+1$$

$$\xrightarrow[x\to x+2]{\text{۲ واحد به چپ}} y=(x+2)^2-6(x+2)+1$$

$$\xrightarrow[+3]{\text{۳ واحد به بالا}} y=(x+2)^2-6(x+2)+1+3 \Rightarrow y=x^2-2x-4$$

$$\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}} f(x)=x^2+2x-4$$

از طرفی چون f سهمی است به شرطی عرض نقاطی به طول x و $2x-6$ برابر است که یا $x=2x-6$ باشد یا محور تقارن f وسط x و $2x-6$ باشد.

$$\text{محور تقارن سهمی } f = x_{\text{رأس}} = -1$$

بنابراین:

$$\begin{cases} x=2x-6 \Rightarrow x=6 \\ \frac{x+2x-6}{2}=-1 \Rightarrow x=\frac{4}{3} \end{cases}$$

پس مجموع جواب‌های معادلهٔ $f(x)=f(2x-6)$ برابر است با:

$$6+\frac{4}{3}=\frac{22}{3}$$

WWW.ArefOnline.ir

روش انتقال برای رسم نمودار توابع

فرض کنید نمودار تابع $y=f(x)$ را داشته باشیم:

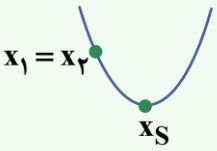
انتقال نمودارها

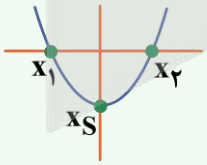
- $f(x+a)$ ← نمودار $f(x)$ را روی محور xها به اندازهٔ $|a|$ واحد جلو یا عقب می‌بریم.
  - $a>0$ ← سمت چپ
  - $a<0$ ← سمت راست
- $f(kx)$ ← طول نقاط نمودار $f(x)$ را بر k تقسیم می‌کنیم.
  - $k>1$ ← نمودار روی محور xها فشرده می‌شود.
  - $0<k<1$ ← نمودار روی محور xها کشیده می‌شود.
  - $k<0$ ← نمودار علاوه بر دو حالت فوق نسبت به محور yها قرینه هم می‌شود.
- $f(x)+b$ ← نمودار $f(x)$ را روی محور yها به اندازهٔ $|b|$ واحد بالا یا پایین می‌بریم.
  - $b>0$ ← به بالا
  - $b<0$ ← به پایین
- $kf(x)$ ← عرض نقاط نمودار $f(x)$ را در k ضرب می‌کنیم.
  - $k>1$ ← نمودار روی محور yها کشیده می‌شود.
  - $0<k<1$ ← نمودار روی محور yها فشرده می‌شود.
  - $k<0$ ← نمودار علاوه بر دو حالت فوق نسبت به محور xها قرینه هم می‌شود.
- $f(ax+b)$ ← نمودار $f(x)$ را روی محور xها به اندازهٔ $|b|$ واحد جلو یا عقب برده (بسته به علامت b) و سپس طول نقاط را بر a تقسیم می‌کنیم.

نقاط روی سهمی و به فاصلهٔ یکسان از رأس سهمی دارای عرض برابر هستند.

اگر x_S طول نقطهٔ رأس سهمی تابع $y=f(x)$ باشد، جواب‌های معادلهٔ $f(x_1)=f(x_2)$ به‌صورت زیر به‌دست می‌آیند:

$$f(x_1)=f(x_2)\Rightarrow\begin{cases}x_1=x_2\\ \dfrac{x_1+x_2}{2}=x_S\end{cases}$$





ماز

۲- تابع $f(x)=2x^2+6x-1$ مفروض است. اگر تابع $y=2f(2x-1)$ در بازهٔ $(-\infty,a]$ اکیداً یکنوا باشد، حداکثر a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{3}$ ۲) -3 ۳) -4 ۴) $-\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

روش اول

اگر x_S طول نقطهٔ رأس سهمی باشد بزرگ‌ترین بازه‌های که سهمی در آن‌ها اکیداً یکنواست بازهٔ $(-\infty,x_S]$ یا $[x_S,+\infty)$ می‌باشند.

WWW.ArefOnline.ir

طول رأس f، $x=-\frac{۳}{۲}$ و طول رأس سهمی $y=۲f(۲x-۱)$ برابر $x=\frac{-۱}{۴}$ است، زیرا:

$$۲x-۱=-\frac{۳}{۲}\Rightarrow x=-\frac{۱}{۴}$$

پس کافی است $a\le -\frac{۱}{۴}$ باشد و درنتیجه حداکثر مقدار a برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

روش دوم

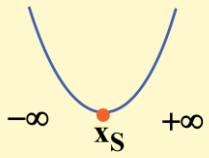
تابع $y=۲f(۲x-۱)$ را تشکیل می‌دهیم، ببینید:

$$y=۲\Big(۲(۲x-۱)^۲+۶(۲x-۱)-۱\Big)\Rightarrow y=۲\Big(۲(۴x^۲-۴x+۱)+۱۲x-۶-۱\Big)\Rightarrow y=۱۶x^۲+۸x-۱۰$$

طول نقطهٔ رأس سهمی جدید $x=\frac{-۸}{۲\times ۱۶}$ یعنی $x=-\frac{۱}{۴}$ می‌باشد، بنابراین بزرگ‌ترین بازه‌ای که تابع $y=۲f(۲x-۱)$ در آن اکیداً یکنواست بازهٔ $(-\infty,-\frac{۱}{۴}]$ می‌باشد، پس حداکثر مقدار a برابر $-\frac{۱}{۴}$ است.

بزرگ‌ترین بازهٔ یکنوایی سهمی

اگر x_S طول نقطهٔ رأس سهمی تابع $y=f(x)$ باشد، بزرگ‌ترین بازه‌های که در آن تابع f اکیداً یکنواست بازه‌های $(-\infty,x_S]$ یا $[x_S,+\infty)$ می‌باشند.



۳- تابع $f(x)=\frac{۳x-۲}{x+b}$ مفروض است. نمودار تابع $y=f(\frac{۱}{x})$ را دو واحد به راست انتقال داده و سپس طول نقاط تابع به‌دست آمده را دو برابر می‌کنیم. اگر نمودار تابع نهایی، نمودار تابع $y=\frac{۱}{x}$ را در نقطه‌ای به طول یک قطع کند، مقدار b کدام است؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $-\frac{۱۰}{۳}$ ۳) -۴ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

در گام اول تابع $y=f(\frac{۱}{x})$ را به‌دست می‌آوریم:

$$f(\frac{۱}{x})=\frac{\frac{۳}{x}-۲}{\frac{۱}{x}+b}=\frac{۳-۲x}{۱+bx}$$

سپس انتقال‌های گفته شده را روی آن پیاده می‌کنیم.

$$\xrightarrow[x\to x-۲]{\text{۲ واحد به راست}} y=\frac{۳-۲(x-۲)}{۱+b(x-۲)}=\frac{۷-۲x}{۱-۲b+bx}\xrightarrow[x\to \frac{x}{۲}]{\text{طول نقاط دو برابر}} y=\frac{۷-۲(\frac{x}{۲})}{۱-۲b+b(\frac{x}{۲})}$$

$$\Rightarrow \frac{۷-x}{۱-۲b+\frac{b}{۲}x}=\frac{۱}{x}\xrightarrow{x=۱}\frac{۶}{۱-\frac{۳}{۲}b}=۱\Rightarrow b=-\frac{۱۰}{۳}$$

WWW.ArefOnline.ir

۴- اگر $f(x)=1-\sqrt{x+2}$ و $g(x)=2f(\frac{1-x}{3})$ باشد، آن‌گاه دامنهٔ تابع $y=fog(x)$ کدام است؟

۱) $[-5,1]$ ۲) $[1,7]$ ۳) $[-5,7]$ ۴) $[-1,5]$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۱ ـ ۱۲۰۱)

دامنهٔ تابع $y=f(x)$ برابر است با: $D_f=[-2,+\infty)$

و دامنهٔ $g(x)$ با توجه به دامنهٔ f مشخص می‌شود. توجه کنید چون $D_f=[-2,+\infty)$، برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $g(x)=2f(\frac{1-x}{3})$ باید $\frac{1-x}{3}$ باشد. درنتیجه: $\frac{1-x}{3}\geq -2 \Rightarrow x\leq 7$

حال به محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=(fog)(x)$ می‌پردازیم:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}=\{x \mid x\leq 7, 2f(\frac{1-x}{3})\geq -2\}$$

$$=\{x \mid x\leq 7, 1-\sqrt{\frac{1-x}{3}+2}\geq -1\}=\{x \mid x\leq 7, \frac{1-x}{3}+2\leq 4\}=\{x \mid x\leq 7, x\geq -5\}=[-5,7]$$

تأثیر انتقال‌ها روی دامنه و برد

اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد برای محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y=kf(ax+b)+h$ باید مجموعه جواب نامعادلهٔ زیر را به‌دست آوریم:

حل نامعادله، دامنهٔ تابع را می‌دهد. $\Rightarrow m\leq ax+b\leq n$

و اگر برد تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد برای محاسبهٔ برد تابع $y=kf(ax+b)+h$ داریم:

طرفین نامعادله را در k ضرب کرده و سپس با h جمع می‌کنیم. $\Rightarrow m\leq f(ax+b)\leq n$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $(-1,5]$ باشد، دامنهٔ تابع $y=-2+3f(2x+1)$ را به‌دست آورید.

کافی است در تابع جدید، عبارت مقابل f یعنی $2x+1$ را در فاصلهٔ $(-1,5]$ قرار دهیم:

$$-1\leq 2x+1<5 \Rightarrow -2\leq 2x<4 \Rightarrow -1\leq x<2 \Rightarrow D_{-2+3f(2x+1)}=[-1,2)$$

دامنهٔ ترکیب توابع

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

$$D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $f(x)=\sqrt{x-2}$ و $g(x)=\frac{1}{x+3}$ باشد، دامنهٔ تابع $y=(fog)(x)$ را به‌دست آورید.

ابتدا دامنهٔ توابع $f(x)$ و $g(x)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$x-2\geq 0 \Rightarrow x\geq 2 \Rightarrow D_f=[2,+\infty)$$

$$x+3\neq 0 \Rightarrow x\neq -3 \Rightarrow D_g=\mathbb{R}-\{-3\}$$

بنابراین دامنهٔ تابع $y=(fog)(x)$ برابر است با:

$$D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$$

WWW.ArefOnline.ir

$x \in D_g \Rightarrow x \in \mathbb{R} - \{-۳\}$

$g(x) \in D_f \Rightarrow g(x) \geq ۲ \Rightarrow \frac{۱}{x+۳} \geq ۲ \Rightarrow \frac{۱}{x+۳} - ۲ \geq ۰ \Rightarrow \frac{-۲x-۵}{x+۳} \geq ۰ \Rightarrow (-۳, -\frac{۵}{۲}]$

x	$-\infty$	-۳		$-\frac{۵}{۲}$	$+\infty$
$-۲x-۵$	$-$	∄	$+$	۰	$-$
$x+۳$		۰	$+$	$+$	

$D_{fog} = (\mathbb{R} - \{-۳\}) \cap (-۳, -\frac{۵}{۲}] = (-۳, -\frac{۵}{۲}]$

ماز

۵- تابع $f(x) = ۳ - \sqrt{x-۱}$ مفروض است. اگر اشتراک دامنه و برد تابع $y = a - ۳f(۱+ax)$ شامل یازده عدد صحیح باشد، مقدار a کدام است؟

۱) -۱ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا دامنه و برد تابع $f(x)$ را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$f(x) = ۳ - \sqrt{x-۱} \Rightarrow \begin{cases} x-۱ \geq ۰ \Rightarrow x \geq ۱ \Rightarrow D_f = [۱, +\infty) \\ \sqrt{x-۱} \geq ۰ \xrightarrow{\times -۱} -\sqrt{x-۱} \leq ۰ \xrightarrow{+۳} \underbrace{۳ - \sqrt{x-۱}}_{f(x)} \leq ۳ \Rightarrow R_f = (-\infty, ۳] \end{cases}$$

حال برد تابع $y = a - ۳f(۱+ax)$ را محاسبه می‌کنیم:

$$f(x) \leq ۳ \Rightarrow f(۱+ax) \leq ۳ \xrightarrow{\times -۳} -۳f(۱+ax) \geq -۹ \xrightarrow{+a} a - ۳f(۱+ax) \geq a - ۹$$

$$\Rightarrow R_{a-۳f(۱+ax)} = [a-۹, +\infty)$$

در محاسبهٔ دامنهٔ تابع $y = a - ۳f(۱+ax)$ به این موضوع توجه کنید که باید $a < ۰$ باشد، زیرا اگر $a > ۰$ باشد:

$$a > ۰ \Rightarrow D_{f(x)} : x \geq ۱ \Rightarrow D_{a-۳f(۱+ax)} : ۱+ax \geq ۱ \Rightarrow ax \geq ۰ \xrightarrow{\div a} x \geq ۰$$

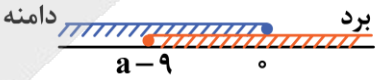
در این حالت، دامنه و برد تابع $y = a - ۳f(۱+ax)$ به ترتیب $[۰, +\infty)$ و $[a-۹, +\infty)$ می‌باشد که بی‌شمار عدد صحیح مشترک بین دامنه و برد وجود دارد که با فرض سوال در تناقض است. پس حتما a منفی است.

$$a < ۰ \Rightarrow D_{f(x)} : x \geq ۱ \Rightarrow D_{a-۳f(۱+ax)} : ۱+ax \geq ۱ \Rightarrow ax \geq ۰ \xrightarrow{\div a} x \leq ۰$$

در این حالت دامنه و برد تابع $y = a - ۳f(۱+ax)$ به ترتیب $(-\infty, ۰]$ و $[a-۹, +\infty)$ می‌باشند که می‌تواند طبق فرض سوال دارای ۱۱ عدد صحیح مشترک باشد.

بنابراین:

$y = a - ۳f(۱+ax)$ اشتراک دامنه و برد تابع $= [a-۹, ۰] \Rightarrow$



چون اشتراک دامنه و برد تابع شامل یازده عدد صحیح است پس $a - ۹ = -۱۰$ و درنتیجه a می‌تواند فقط -۱ باشد.

ماز

۶- اگر $f(x) = x - \sqrt{۲-x}$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $fof(x) \leq f(۲x-۲)$ شامل چند عدد صحیح است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

تابع f با دامنهٔ $x \leq ۲$ اکیداً صعودی است. زیرا می‌دانیم $\sqrt{x}$ اکیداً صعودی است و با توجه به نمودار می‌بینیم که $-\sqrt{-x}$ نیز مجدداً اکیدا صعودی است چون انتقال افقی روی یکنوایی تابع اثری ندارد پس $-\sqrt{۲-x}$ هم اکیداً صعودی است. از طرفی $y = x$ نیز یک تابع اکیداً صعودی است و می‌دانیم جمع دو تابع اکیداً صعودی مجدداً تابعی اکیداً صعودی می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

طبق قِلِقِ حل سؤال، چون تابع f اکیداً صعودی است برای حل نامعادلهٔ $fof(x) \le f(2x-2)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f\big(f(x)\big) \le f(2x-2) \Rightarrow f(x) \le 2x-2 \Rightarrow x-\sqrt{2-x} \le 2x-2 \Rightarrow -\sqrt{2-x} \le x-2$$

$$\xrightarrow{\times -1} \sqrt{2-x} \ge 2-x \xrightarrow{\text{جذر اعداد بین ۰ تا ۱ از خودشان بزرگ‌تر است.}} 0 \le 2-x \le 1 \Rightarrow 1 \le x \le 2$$

از طرفی چون $D_f : x \le 2$ می‌باشد، داریم:

$$\begin{cases} f(x) \le 2 \\ 2x-2 \le 2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} f(x) \le 2 \Rightarrow x-\sqrt{2-x} \le 2 \Rightarrow x-2 \le \sqrt{2-x} \xrightarrow{2-x \ge 0 \Rightarrow x \le 2} \underbrace{x-2}_{\text{منفی}} \le \underbrace{\sqrt{2-x}}_{\text{مثبت}} \Rightarrow x \le 2 \\ 2x-2 \le 2 \Rightarrow x \le 2 \end{cases}$$

اشتراک نامساوی‌های $x \le 2$ ، $1 \le x \le 2$ و $x \le 2$ همان بازهٔ $[1,2]$ است که شامل ۲ عدد صحیح می‌باشد.

قِلِقِشو یاد بگیر!

اگر تابع f اکیداً صعودی باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(x_2) \ge f(x_1)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x_2) \ge f(x_1) \Rightarrow x_2 \ge x_1$$

اگر تابع f اکیداً نزولی باشد، برای حل نامعادلهٔ $f(x_2) \ge f(x_1)$ به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$f(x_2) \ge f(x_1) \Rightarrow x_2 \le x_1$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

اگر $f(x) = x^3 + \sqrt{x}$ باشد، مجموعه جواب نامعادلهٔ $f(2x) \ge f(x+3)$ را به‌دست آورید.

در ابتدا توجه کنید که دامنهٔ تابع، بازهٔ $[0,+\infty)$ می‌باشد. پس:

$$\left.\begin{array}{l} 2x \ge 0 \Rightarrow x \ge 0 \\ x+3 \ge 0 \Rightarrow x \ge -3 \\ D_f : x \ge 0 \end{array}\right\} \xrightarrow{\cap} [0,+\infty)$$

از طرفی تابع f اکیداً صعودی است، زیرا:

x^3 در بازهٔ $[0,+\infty)$ و $\sqrt{x}$ اکیداً صعودی هستند. پس مجموع دو تابع اکیداً صعودی، اکیداً صعودی می‌شود.

حال به حل نامعادله می‌پردازیم:

$$f(2x) \ge f(x+3) \xrightarrow{f \text{ صعودی اکید}} 2x \ge x+3 \Rightarrow x \ge 3$$

بنابراین مجموعه جواب نامعادله برابر است با:

$$x \ge 0 \cap x \ge 3 \Rightarrow x \ge 3$$

ماز

۷- چندجمله‌ای $f(x)$ بر $x-2$ بخش‌پذیر بوده و باقی‌ماندهٔ تقسیم آن بر $x+2$ برابر ۳- است. مجموع ضرایب باقی‌ماندهٔ تقسیم $xf(x)$ بر x^2-4 کدام است؟

۱) ۱ ۲) $-\frac{1}{2}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) ۲-

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{array}{c|l} f(x) & x-2 \\ \vdots & \\ \hline 0 & \end{array} \Rightarrow f(2) = 0 \qquad \begin{array}{c|l} f(x) & x+2 \\ \vdots & \\ \hline -3 & \end{array} \Rightarrow f(-2) = -3$$

WWW.ArefOnline.ir

باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $xf(x)$ بر چندجمله‌ای درجهٔ دوم $x^۲-۴$ حداکثر از درجهٔ اول می‌باشد. اگر باقی‌مانده را $ax+b$ فرض کنیم:

$$\begin{array}{r|l} xf(x) & x^۲-۴ \\ \vdots & g(x) \\ \hline ax+b & \end{array}$$

حال قضیهٔ تقسیم را می‌نویسیم:

$$xf(x)=(x^۲-۴)g(x)+ax+b$$

$$\begin{cases} x=۲ \Rightarrow ۲f(۲)=۲a+b \Rightarrow ۲a+b=۰ \\ x=-۲ \Rightarrow -۲f(-۲)=-۲a+b \Rightarrow -۲a+b=۶ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=-\frac{۳}{۲} \\ b=۳ \end{cases}$$

پس مجموع ضرایب باقی‌مانده برابر $a+b=\frac{۳}{۲}$ است.

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای $B(x)$، اگر خارج‌قسمت $q(x)$ و باقی‌مانده $r(x)$ فرض شود، داریم:

$$\begin{array}{r|l} \text{مقسوم} & \\ A(x) & B(x) \rightarrow \text{مقسوم علیه} \\ \vdots & q(x) \rightarrow \text{خارج‌قسمت} \\ \hline r(x) & \\ \text{باقی‌مانده} & \end{array}$$

$$A(x)=B(x)\times q(x)+r(x)$$

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

توجه!

درجهٔ باقی‌مانده یعنی $r(x)$ باید از درجهٔ مقسوم‌علیه کمتر باشد.

به طور کلی، اگر مقسوم از درجهٔ n و مقسوم‌علیه از درجهٔ m باشد $(n>m)$، آن‌گاه خارج‌قسمت از درجهٔ $n-m$ و باقی‌مانده حداکثر از درجهٔ $m-۱$ است.

باقی‌ماندهٔ تقسیم بر چندجمله‌ای خطی

اگر مقسوم‌علیه از درجهٔ اول باشد، باقی‌مانده از درجهٔ صفر (عدد) است که برای محاسبهٔ آن، کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم جای‌گذاری کنیم.

$$\begin{array}{r|l} A(x) & ax+b \\ \vdots & q(x) \\ \hline r & \end{array}$$

$$A(x)=(ax+b)\times q(x)+r \xrightarrow{x=-\frac{b}{a}} r=A(-\frac{b}{a})$$

۸- اگر $۲x+۳$ باقی‌ماندهٔ تقسیم چندجمله‌ای $f(x)=x^۴-۴x^۲+ax+b$ بر $x^۲+x-۲$ باشد، باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)f(-x)$ بر $x+۲$ کدام است؟

۱) -۱۱ ۲) -۹ ۳) -۷ ۴) -۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۱۹ ـ ۱۲۰۱)

طبق قضیهٔ تقسیم داریم:

$$\begin{array}{r|l} x^۴-۴x^۲+ax+b & x^۲+x-۲ \\ \vdots & g(x) \\ \hline ۲x+۳ & \end{array}$$

WWW.ArefOnline.ir

$$(x+۲)(x-۱)$$

$$\Rightarrow x^۴-۴x^۲+ax+b=(x^۲+x-۲)g(x)+۲x+۳$$

$$\xrightarrow{x=۱} ۱-۴+a+b=۵\Rightarrow a+b=۸$$

$$\xrightarrow{x=-۲} ۱۶-۱۶-۲a+b=-۱\Rightarrow -۲a+b=-۱$$

$$\Rightarrow \begin{cases} a=۳ \\ b=۵ \end{cases} \Rightarrow f(x)=x^۴-۴x^۲+۳x+۵$$

حال باقی‌ماندهٔ تقسیم $f(x)f(-x)$ بر $x+۲$ را به‌دست می‌آوریم:

$$R=f(-۲)f(۲)=(-۱)\times(۱۱)=-۱۱$$

۹- دورهٔ تناوب تابع $f(x)=a\cos^۲(\frac{\pi}{a}x)$ برابر $\frac{۲}{۳}$ است. دورهٔ تناوب تابع $g(x)=a\sin(\frac{a}{۳}x)$ کدام است؟

۱) $\frac{۹\pi}{۲}$ ۲) ۶π ۳) ۹π ۴) $\frac{۳\pi}{۲}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۲)

به کمک دورهٔ تناوب تابع f، $|a|$ را محاسبه می‌کنیم:

$$T_f=\frac{\pi}{|\frac{\pi}{a}|}=\frac{۲}{۳}\Rightarrow |a|=\frac{۲}{۳}$$

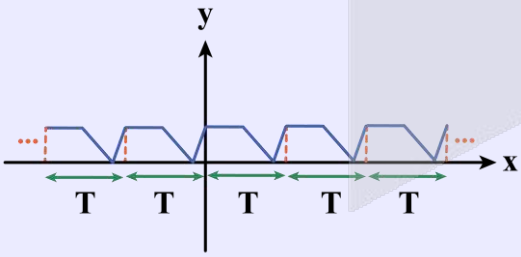
حال دورهٔ تناوب تابع g را محاسبه می‌کنیم. ببینید:

$$g(x)=a\sin(\frac{a}{۳}x)$$

$$T_g=\frac{۲\pi}{|\frac{a}{۳}|}=\frac{۶\pi}{|a|}=\frac{۶\pi}{\frac{۲}{۳}}=\frac{۱۸\pi}{۲}=۹\pi$$

دورهٔ تناوب

تابع f با دامنهٔ D_f را در نظر بگیرید. اگر عدد حقیقی مثبتی مانند T وجود داشته باشد که به‌ازای هر $x\in D_f$ داشته باشیم $(x\pm T)\in D_f$ و:



$$f(x\pm T)=f(x)$$

آن‌گاه می‌گوییم f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب T است.

به زبان ساده، اگر به هر نقطه با طول x، T را اضافه و یا از آن T را کم کنیم، نقطه‌ای هم‌عرض با نقطهٔ اولیه به‌دست می‌آید.

دورهٔ تناوب اصلی

در توابع متناوب، هر مضرب صحیحی از دورهٔ تناوب که عضو دامنهٔ تابع باشد، نیز دورهٔ تناوب است ولی دورهٔ تناوب اصلی تابع نیست.

$$f(x\pm T)=f(x)\Rightarrow f(x\pm nT)=f(x)\quad n\in\mathbb{N}$$

تابع متناوب در حالت کلی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نیست و نیز غیریکنوا می‌باشد. (البته به جز تابع ثابت که متناوب و یکنواست.)

WWW.ArefOnline.ir

فرمول‌های دورهٔ تناوب در توابع مثلثاتی و جزءصحیح

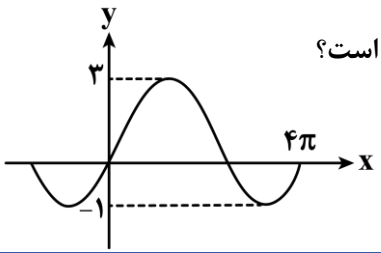
$$\begin{cases} f(x)=\tan^{n}(ax+b) \\ f(x)=\cot^{n}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{2n+1}(ax+b) \\ f(x)=\cos^{2n+1}(ax+b) \end{cases} \Rightarrow T=\frac{2\pi}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x)=ax-[ax] \\ f(x)=[ax]+[-ax] \end{cases} \Rightarrow T=\frac{1}{|a|}$$

$$\begin{cases} f(x)=\sin^{2n}(ax+b) \text{ یا } f(x)=|\sin(ax+b)| \\ f(x)=\cos^{2n}(ax+b) \text{ یا } f(x)=|\cos(ax+b)| \end{cases} \Rightarrow T=\frac{\pi}{|a|}$$

۱۰- قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\sin(cx+\frac{\pi}{6})$ به‌صورت مقابل است. حاصل $a+b-c$ کدام است؟



۱) $-\frac{1}{2}$
۲) $-\frac{3}{2}$
۳) $\frac{5}{2}$
۴) $\frac{3}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به نمودار، max و min تابع f به ترتیب برابر ۳ و ۱- می‌باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} a+|b|=3 \\ a-|b|=-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a=1 \\ |b|=2 \end{cases}$$

تابع f از مبدأ می‌گذرد، پس:

$$f(0)=a+\frac{b}{2}=0 \Rightarrow b=-2a=-2$$

چون $b<0$ و نمودار در همسایگی $x=0$ صعودی است، پس باید حاصل‌ضرب b و c مثبت باشد و درنتیجه $c<0$ است.

با توجه به نمودار، دورهٔ تناوب تابع $T=4\pi$ است، بنابراین:

$$T=\frac{2\pi}{|c|}=4\pi \Rightarrow |c|=\frac{1}{2} \Rightarrow c=-\frac{1}{2}$$

پس حاصل $a+b-c$ برابر است با:

$$a+b-c=1-2+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}$$

بیشترین و کمترین مقادیر توابع سینوس و کسینوس

اگر نمودار تابع $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$ را داشته باشیم، برای پیدا کردن a، b و c به‌صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$\begin{cases} \max(y)=|a|+c \\ \min(y)=-|a|+c \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} |a|=\frac{\max(y)-\min(y)}{2} \\ c=\frac{\max(y)+\min(y)}{2} \end{cases}$$

WWW.ArefOnline.ir

برای پیدا کردن b معمولاً از دورهٔ تناوب استفاده می‌کنیم. ببینید:

$$T=\frac{2\pi}{|b|}$$

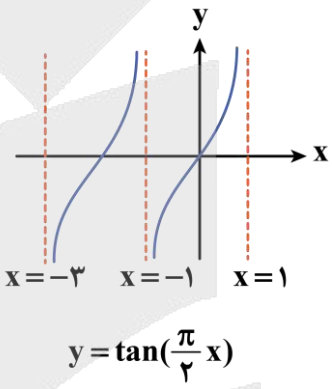
ماز

۱۱- تابع $y=a-2\tan(\frac{\pi}{2}x)$ در بازهٔ $(-\frac{4}{3},\alpha)$ اکیداً یکنواست. حداکثر مقدار α کدام است؟

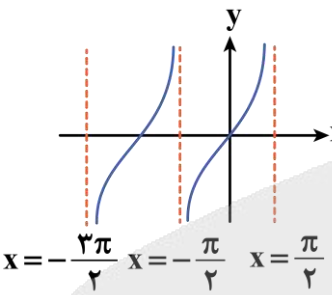
۱) $-\frac{2}{3}$ ۲) -1 ۳) $\frac{1}{3}$ ۴) $\frac{4}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

نمودار تابع تانژانت بین دو مجانب قائم، اکیداً یکنواست.



$y=\tan(\frac{\pi}{2}x)$

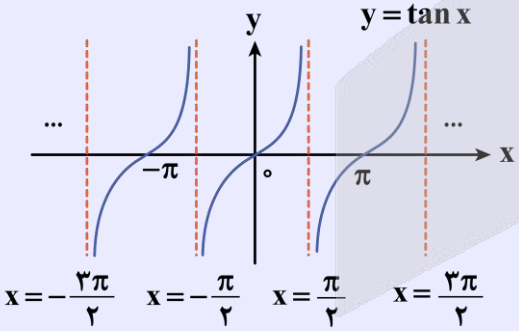


$y=\tan x$

بزرگ‌ترین بازه‌ای از تابع با شروع از $-\frac{4}{3}$ که تابع در آن اکیداً یکنواست، بازهٔ $(-1,-\frac{4}{3})$است، پس حداکثر مقدار α برابر -1 است.

نمودار تابع تانژانت

نمودار تابع $y=\tan x$ در حالت کلی به‌صورت زیر است:



http://rubika.ir/Tahlilazemoon

۱) دامنهٔ این تابع $\mathbb{R}-\{k\pi+\frac{\pi}{2},k\in\mathbb{Z}\}$ و برد آن $\mathbb{R}$ است.

۲) تابع متناوب بوده و دورهٔ تناوب آن $T=\pi$ است.

۳) تابع در حالت کلی یک‌به‌یک و وارون‌پذیر نمی‌باشد (مگر این‌که دامنهٔ آن محدود شود.)

۴) تابع در حالت کلی غیریکنواست اما در فاصلهٔ بین دو مجانب قائم متوالی اکیداً صعودی است.

۵) طول خطوط مجانب قائم $x=k\pi+\frac{\pi}{2}\ (k\in\mathbb{Z})$ می‌باشد.

۶) طول نقاط برخورد تابع با محور x ها برابر $x=k\pi\ (k\in\mathbb{Z})$ است.

ماز

WWWW.ArefOnline.ir

۱۲- مجموع جواب‌های معادلهٔ $۴\cos x\cos(x-\frac{\pi}{۲})=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

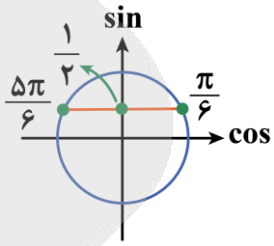
۱) $\frac{۱۳\pi}{۶}$ ۲) $\frac{۵\pi}{۲}$ ۳) ۲π ۴) ۳π

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

توجه کنید $\cos(x-\frac{\pi}{۲})$ همان $\cos(\frac{\pi}{۲}-x)$ یعنی $\sin x$ است، بنابراین:

$$۴\cos x\sin x=۱\Rightarrow \sin ۲x=\frac{۱}{۲}\Rightarrow ۲x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶},\frac{۱۳\pi}{۶},\frac{۱۷\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow x=\frac{\pi}{۱۲},\frac{۵\pi}{۱۲},\frac{۱۳\pi}{۱۲},\frac{۱۷\pi}{۱۲}$$



پس مجموع جواب‌های معادله برابر است با:

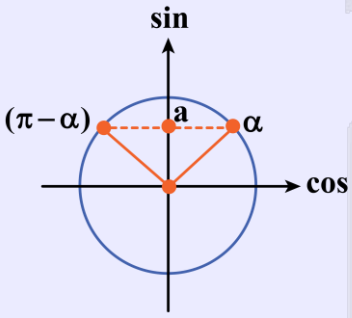
$$\frac{\pi}{۱۲}+\frac{۵\pi}{۱۲}+\frac{۱۳\pi}{۱۲}+\frac{۱۷\pi}{۱۲}=\frac{۳۶\pi}{۱۲}=۳\pi$$

معادلات مثلثاتی

معادلهٔ مثلثاتی معادله‌ای است که مجهول آن (x) در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مثلاً معادلهٔ $\sin x=\frac{۱}{۲}$ یک معادلهٔ مثلثاتی است که با حل این معادله به دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{۱}{۲}$ است.

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی، نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. اگر در یک طرف به جای نسبت مثلثاتی عدد داشتیم، ابتدا باید به جای آن، نسبت مثلثاتیِ زاویه‌ای که این عدد را می‌دهد بنویسیم؛ سپس با قواعد زیر جواب‌های کلی معادله را به‌دست آوریم:

۱) معادلهٔ مثلثاتی سینوسی:

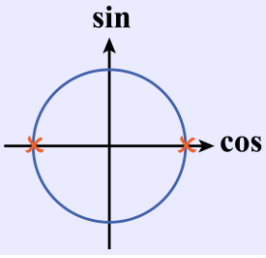


$$\sin x=a\xrightarrow{-۱\le a\le ۱}\sin x=\sin\alpha\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+\alpha\\x=۲k\pi+\pi-\alpha\end{cases}$$

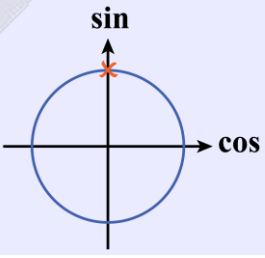
$$\sin x=\sin y\longrightarrow\begin{cases}x=۲k\pi+y\\x=۲k\pi+\pi-y\end{cases}$$

حالت‌های خاص:

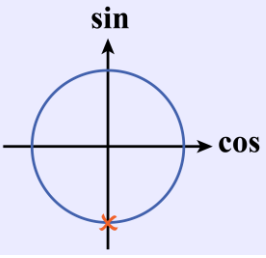
۱) $\sin A=۰\Rightarrow A=k\pi$



۲) $\sin A=۱\Rightarrow A=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}$

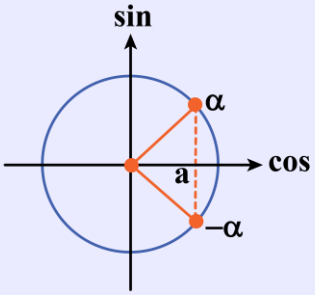


۳) $\sin A=-۱\Rightarrow A=۲k\pi-\frac{\pi}{۲}$



WWW.ArefOnline.ir

۲) معادلهٔ مثلثاتی کسینوسی:

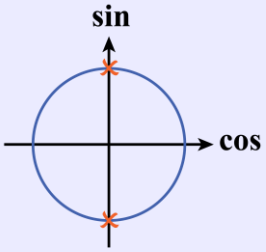


$$\cos x = a \xrightarrow{-1\le a\le 1} \cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

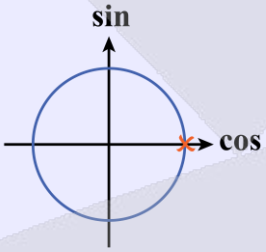
$$\cos x = \cos y \longrightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

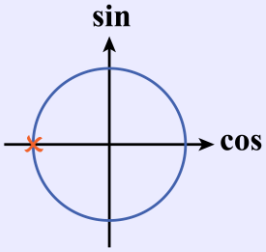
۱) $\cos A = 0 \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{2}$



۲) $\cos A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi$



۳) $\cos A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi + \pi$



یه نمونهٔ باحال ببین!

۱) $\sin^2 x + \frac{\sqrt{2}}{2}\sin x = 0$

$$\sin x(\sin x + \frac{\sqrt{2}}{2}) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \sin x = 0 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = k\pi \\ \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi - \frac{\pi}{4} \\ x = 2k\pi + \pi + \frac{\pi}{4} \end{cases} \end{cases}$$

۲) $\sin 4x = \sin x$

$$\sin 4x = \sin x \Rightarrow \begin{cases} 4x = 2k\pi + x \Rightarrow 3x = 2k\pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{3} \\ 4x = 2k\pi + \pi - x \Rightarrow 5x = 2k\pi + \pi \Rightarrow x = \frac{2k\pi}{5} + \frac{\pi}{5} \end{cases}$$

۳) $2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0$

$$2\cos^2 x - 3\cos x + 1 = 0 \xrightarrow{a+b+c=0} \begin{cases} \cos x = 1 \xrightarrow{\text{حالت خاص}} x = 2k\pi \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \frac{\pi}{3} \\ x = 2k\pi - \frac{\pi}{3} \end{cases} \end{cases}$$

۴) $\cos 2x = \cos x$

$$\cos 2x = \cos x \Rightarrow \begin{cases} 2x = 2k\pi + x \\ 2x = 2k\pi - x \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ 3x = 2k\pi \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi \\ x = \frac{2k\pi}{3} \end{cases} \xrightarrow{\cup} x = \frac{2k\pi}{3}$$

WWW.ArefOnline.ir

نسبت‌های مثلثاتی ۲ برابر زاویه

$$\sin 2\alpha = 2\sin\alpha\cos\alpha$$

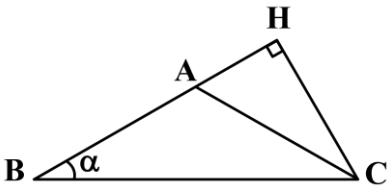
$$\cos 2\alpha = \begin{cases} 1-2\sin^2\alpha \\ \cos^2\alpha - \sin^2\alpha \\ 2\cos^2\alpha - 1 \end{cases}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}$$

$$\cot 2\alpha = \frac{1}{\tan 2\alpha}$$

ماز

۱۳- در شکل مقابل، $AB = AC = 10$ و $\tan\alpha = \frac{1}{3}$ می‌باشد. مساحت مثلث $\overset{\triangle}{BHC}$ کدام است؟



۱) ۴۸
۲) ۵۴
۳) ۵۶
۴) ۴۵

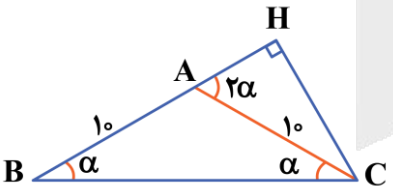
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

مثلث $\overset{\triangle}{ABC}$ متساوی‌الساقین است، پس:

$$A\hat{B}C = A\hat{C}B = \alpha$$

بنابراین:

$$H\hat{A}C = 2\alpha$$



از طرفی:

$$\tan\alpha = \frac{1}{3}$$

$$\tan 2\alpha = \frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{9}} = \frac{3}{4} \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{3}{5}, \cos 2\alpha = \frac{4}{5}$$

$$\begin{cases} \sin 2\alpha = \frac{CH}{AC} \\ \cos 2\alpha = \frac{AH}{AC} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} CH = AC.\sin 2\alpha = 10\times\frac{3}{5} = 6 \\ AH = AC.\cos 2\alpha = 10\times\frac{4}{5} = 8 \end{cases}$$

بنابراین مساحت مثلث برابر است با:

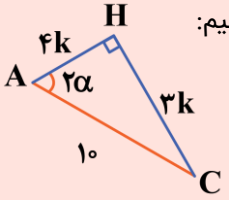
$$S_{\overset{\triangle}{BHC}} = \frac{1}{2}BH\times CH = \frac{1}{2}(10+8)\times 6 = 54$$

تذکر!

توجه کنید برای محاسبهٔ $\sin 2\alpha$ و $\cos 2\alpha$ می‌توانیم به‌صورت زیر عمل کنیم:

$$\tan 2\alpha = \frac{3}{4} \Rightarrow \begin{cases} CH = 3k \\ AH = 4k \end{cases}$$

$$\Rightarrow (3k)^2 + (4k)^2 = 10^2 \Rightarrow k = 2$$



WWW.ArefOnline.ir

$\Rightarrow \sin ۲\alpha = \frac{CH}{AC} = \frac{۶}{۱۰} = \frac{۳}{۵}$

$\Rightarrow \cos ۲\alpha = \frac{AH}{AC} = \frac{۸}{۱۰} = \frac{۴}{۵}$

ماز

۱۴- اگر $x = \frac{۵\pi}{۶}$ یک جواب معادلهٔ $\sin^۲ x + a\cos ۲x = ۰$ باشد، مجموع سایر جواب‌های معادله در بازهٔ $[۰, ۲\pi]$ کدام است؟

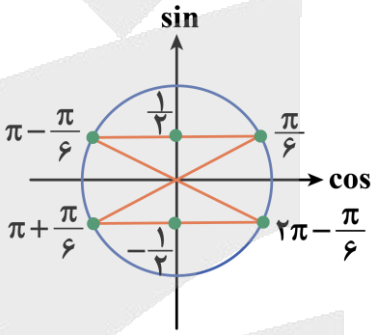
۱) ۴π ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{۱۷\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۱۹\pi}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

$x = \frac{۵\pi}{۶}$ یک جواب معادله است پس در معادله صدق می‌کند. ببینید:

$$x = \frac{۵\pi}{۶} \Rightarrow \sin^۲ \frac{۵\pi}{۶} + a\cos \frac{۵\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow \frac{۱}{۴} + \frac{a}{۲} = ۰ \Rightarrow a = -\frac{۱}{۲}$$

به حل معادله می‌پردازیم:



$$\Rightarrow \sin^۲ x - \frac{۱}{۲}\cos ۲x = ۰ \Rightarrow \sin^۲ x - \frac{۱}{۲}(۱ - ۲\sin^۲ x) = ۰$$

$$\Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin x = \pm \frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow x = \frac{\pi}{۶}, \frac{۵\pi}{۶}, \frac{۷\pi}{۶}, \frac{۱۱\pi}{۶}$$

$$\frac{\pi}{۶} + \frac{۷\pi}{۶} + \frac{۱۱\pi}{۶} = \frac{۱۹\pi}{۶}$$

مجموع سایر جواب‌های معادله (غیر از $\frac{۵\pi}{۶}$) برابر است با:

ماز

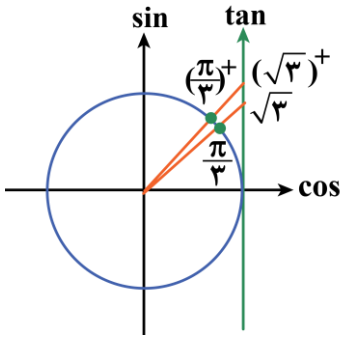
۱۵- اگر $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{۳})^+} \frac{۲ax + b\pi}{۳ + a\tan^۲ x} = -\infty$ باشد، حداقل مقدار $[۳b]$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۲ ۳) -۱ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۳)

چون حاصل حد، منفی بی‌نهایت است پس $x = \frac{\pi}{۳}$ مخرج کسر را صفر می‌کند، بنابراین:

$$۳ + a\tan^۲ x \xrightarrow{x = \frac{\pi}{۳} \text{ جواب معادله است}} ۳ + a\tan^۲ \frac{\pi}{۳} = ۰ \Rightarrow ۳ + a(\sqrt{۳})^۲ = ۰ \Rightarrow a = -۱$$



توجه کنید در محاسبهٔ $\lim\limits_{x \to (\frac{\pi}{۳})^+} \frac{-۲x + b\pi}{۳ - \tan^۲ x}$، مخرج ۰^- می‌شود، زیرا:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۳})^+} \left(۳ - \tan^۲ x\right) = ۳ - (\sqrt{۳}^+)^۲ = ۳ - ۳^+ = ۰^-$$

بنابراین:

$$\lim_{x \to (\frac{\pi}{۳})^+} \frac{-۲x + b\pi}{۳ - \tan^۲ x} = \frac{-\frac{۲\pi}{۳} + b\pi}{۰^-} = -\infty$$

WWW.ArefOnline.ir

چون مخرج کسر موجود در حد، 0^- و حاصل حد، $-\infty$ شده است، پس صورت باید عددی مثبت باشد، بنابراین:

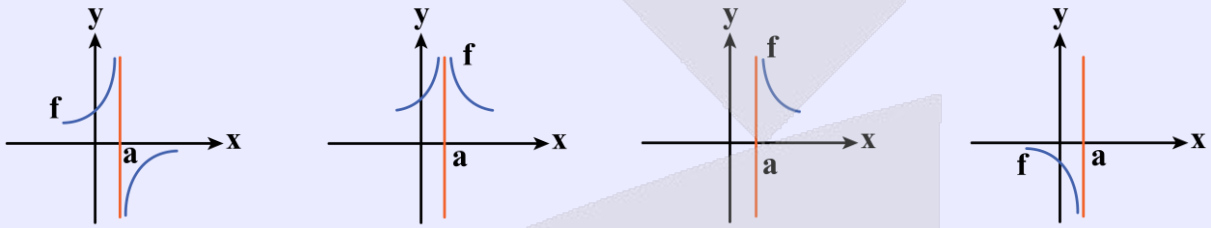
$$b\pi - \frac{2\pi}{3} > 0 \Rightarrow b > \frac{2}{3} \Rightarrow 3b > 2 \Rightarrow [3b] \geq 2 \Rightarrow \min([3b]) = 2$$

حد بی‌نهایت

در مسائل حد، اگر x به سمت عددی میل کند که در توابع کسری، مخرج کسر صفر شود (صفر حدی) ولی صورت کسر صفر نشود، در این صورت حاصل حد، بی‌نهایت خواهد شد.

به این دسته از مسائل حدِ بی‌نهایت می‌گوییم.

$$\frac{\text{عدد}}{\text{صفر حدی}} = \infty$$



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) =$ وجود ندارد	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) =$ وجود ندارد	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = -\infty$

نکته!

در مسائل حد بی‌نهایت که جواب حد عدد مشخصی نمی‌باشد، تابع حد ندارد.

$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد منفی}}{0^-} = +\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^-} = -\infty \qquad \frac{\text{عدد مثبت}}{0^+} = +\infty$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

حاصل حدهای زیر را به‌دست آورید.

۱) $\lim\limits_{x\to 1^-} \frac{5x}{x-1} = \frac{5\times 1}{1^- - 1} = \frac{5}{0^-} = -\infty$

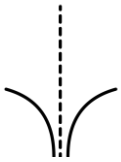
۲) $\lim\limits_{x\to 3} \frac{2}{|x-3|} \Rightarrow \begin{cases} \lim\limits_{x\to 3^+} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^+|} = \frac{2}{0^+} = +\infty \\ \lim\limits_{x\to 3^-} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|0^-|} = \frac{2}{0^+} = +\infty \end{cases}$

۳) $\lim\limits_{x\to 0^+} \frac{-2-\cos x}{\sin x} = \frac{-2-\cos 0}{\sin 0^+} = \frac{-2-1}{0^+} = \frac{-3}{0^+} = -\infty$

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

WWWW.ArefOnline.ir

۱۶- نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۲+x+۲b}{(x-a)(۲x+b)}$ در مجاورت $x=a$ به‌صورت مقابل است. برای a چند مقدار صحیح قابل قبول وجود دارد؟



۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۲۰۳)

با توجه به این‌که در همسایگی مجانب قائم، هر دو شاخه به یک سمت حرکت کرده‌اند، پس $x=a$ ریشهٔ مضاعف مخرج است.

$$۲x+b=۰ \xrightarrow{x=a} ۲a+b=۰ \Rightarrow b=-۲a$$

بنابراین:

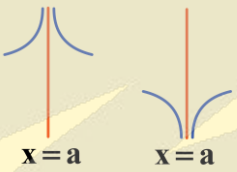
$$\lim_{x\to a} f(x)=\lim_{x\to a}\frac{x^۲+x+۲b}{(x-a)(۲x-۲a)}=\lim_{x\to a}\frac{a^۲+a-۴a}{۲(x-a)^۲}=\lim_{x\to a}\frac{a^۲-۳a}{۲(x-a)^۲}=-\infty$$

$$\xrightarrow{\text{مخرج}\to ۰^+} a^۲-۳a<۰ \Rightarrow ۰<a<۳ \xrightarrow{a\in\mathbb{Z}} a=۱ \text{ یا } ۲$$

پس a دو مقدار صحیح دارد.

مجانب قائم

اگر در هر دو طرف مجانب قائم تابع، نمودارها به یک سمت حرکت کنند در این صورت عبارت موجود در مخرج دارای توان زوج یا قدرمطلق است و یا در مخرج $۱\pm\sin\bigcirc$ یا $۱\pm\cos\bigcirc$ دیده می‌شود.



$$f(x)=\frac{g(x)}{h(x)} \Rightarrow h(x)=k(x-a)^{۲n} \text{ یا } h(x)=k|x-a| \text{ یا } h(x)=k(۱\pm\sin\bigcirc) \text{ یا } h(x)=k(۱\pm\cos\bigcirc)$$

تذکر!

به این دقت کنید که عامل مشترکی از نوع‌های بیان شده در صورت وجود نداشته باشد که با مخرج ساده شود!

۱۷- اگر $f(x)=mx-\sqrt{۴x^۲+x}$ و $\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-۱}{f(۲x)}=\frac{۱}{۲}$ باشد، مقدار m کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲}$ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۶۲ ـ ۱۲۰۳)

با استفاده از قاعدهٔ پرتوان داریم:

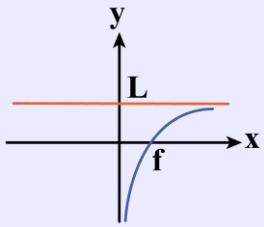
$$\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-۱}{f(۲x)}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x-۱}{۲mx-\sqrt{۱۶x^۲+۲x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{۳x}{۲mx-|۴x|}=\frac{۳}{۲m+۴}=\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲m+۴=۶ \Rightarrow ۲m=۲ \Rightarrow m=۱$$

WWW.ArefOnline.ir

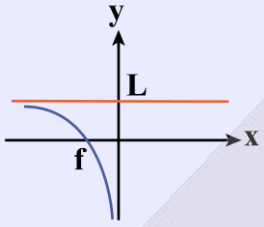
حد در بی‌نهایت

حاصل حد وقتی $x \to \infty$ را حد در بی‌نهایت می‌گوییم. برای محاسبهٔ حد در بی‌نهایت در توابع کسری کافی است بزرگ‌ترین جمله در صورت و مخرج را فاکتور بگیریم یا فقط در صورت و مخرج جملهٔ با توان بیشتر را قرار دهیم. (قاعدهٔ پرتوان)



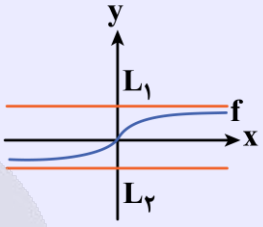
$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) =$ تعریف نمی‌شود



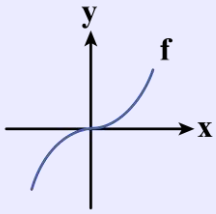
$\lim_{x\to+\infty} f(x) =$ تعریف نمی‌شود

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = L_1$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L_2$



$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$

$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty$

قاعدهٔ پرتوان

$$ax^n + bx^{n-1} + cx^{n-2} + \ldots \underset{x\to\infty}{\sim} ax^n$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

۱) $\lim_{x\to\infty} \frac{2x+5}{-3x+2} = \lim_{x\to\infty} \frac{2x}{-3x} = -\frac{2}{3}$

۲) $\lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2+2}{x-1} = \lim_{x\to-\infty} \frac{4x^2}{x} = \lim_{x\to-\infty} 4x = 4\times(-\infty) = -\infty$

۳) $\lim_{x\to+\infty} \frac{-2x+5}{x^2-9} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2x}{x^2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{-2}{x} = \frac{-2}{+\infty} = 0$

نکته!

در محاسبهٔ حد در بی‌نهایت اگر درون براکت به بی‌نهایت میل کند می‌توانیم براکت را برداریم. یعنی:

$$[U] \underset{U\to\infty}{\sim} U$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

$$\lim_{x\to0}\left(2x^2\times\left[\frac{5}{4x^2}\right]\right) \overset{\left[\frac{5}{4x^2}\right]\underset{x\to0}{\sim}\frac{5}{4x^2}}{=\!=\!=} \lim_{x\to0}\left(2x^2\times\frac{5}{4x^2}\right) = \frac{5}{2}$$

WWWW.ArefOnline.ir

۱۸- اگر $f(x)=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$ و $\lim\limits_{x\to-\infty} xf^{-1}(\frac{a}{x})=2$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) -2 ۳) $\frac{1}{2}$ ۴) 2

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۶۲ ـ ۱۲۰۳)

ضابطهٔ تابع f^{-1} را محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که چون حاصل رادیکال همیشه مثبت است، پس x و y هم علامت هستند:

$$y=\frac{x}{\sqrt{x^2+1}}\Rightarrow y^2(x^2+1)=x^2$$

$$\Rightarrow x^2(1-y^2)=y^2\Rightarrow x^2=\frac{y^2}{1-y^2}\Rightarrow |x|=\sqrt{\frac{y^2}{1-y^2}}\Rightarrow |x|=\frac{|y|}{\sqrt{1-y^2}}$$

$$\xrightarrow{x,y\text{ هم‌علامت هستند}} x=\frac{y}{\sqrt{1-y^2}}\Rightarrow f^{-1}(x)=\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}$$

حال به سراغ محاسبهٔ a می‌رویم:

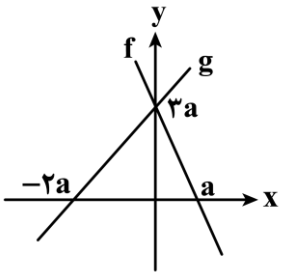
$$\lim_{x\to-\infty} xf^{-1}(\frac{a}{x})=\lim_{x\to-\infty} x\times\frac{\frac{a}{x}}{\sqrt{1-\frac{a^2}{x^2}}}$$

$$=\lim_{x\to-\infty} x\times\frac{\frac{a}{x}}{\sqrt{\frac{x^2-a^2}{x^2}}}=\lim_{x\to-\infty} x\times\frac{\frac{a}{x}}{\frac{\sqrt{x^2-a^2}}{-x}}=\lim_{x\to-\infty} x\times\frac{-a}{\sqrt{x^2-a^2}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-ax}{|x|}=a$$

پس $a=2$ است.

ماز

۱۹- نمودار توابع خطی f و g به‌صورت مقابل است. حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)-g^{-1}(x)}$ کدام است؟



۱) ۴/۸
۲) ۳/۶
۳) ۶/۳
۴) ۸/۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۶۲ ـ ۱۲۰۳)

ابتدا ضابطهٔ توابع f و g را می‌نویسیم:

$$\begin{cases} f(x)=-3x+3a \\ g(x)=\frac{3}{2}x+3a\Rightarrow g^{-1}(x)=\frac{2}{3}x-2a \end{cases}$$

حال به محاسبهٔ حد می‌پردازیم:

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{|f(x)|}{g(x)-g^{-1}(x)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|-3x+3a|}{(\frac{3}{2}x+3a)-(\frac{2}{3}x-2a)}=\lim_{x\to+\infty}\frac{|3x|}{\frac{3}{2}x-\frac{2}{3}x}=\frac{3}{\frac{5}{6}}=\frac{18}{5}=3/6$$

WWW.ArefOnline.ir

۲۰- خط $x=a$ مجانب قائم تابع $y=\tan\frac{2\pi}{3x-1}$ است. بیشترین مقدار a کدام است؟

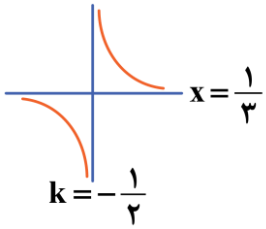
۱) $\frac{3}{5}$ ۲) $\frac{7}{9}$ ۳) $\frac{4}{3}$ ۴) $\frac{5}{3}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ ترکیبی ـ استاندارد ـ حسابان ۲ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۲۰۳)

خطوط $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$ مجانب‌های قائم تابع $y=\tan x$ هستند.

$$\frac{2\pi}{3x-1}=k\pi+\frac{\pi}{2}\Rightarrow\frac{2}{3x-1}=\frac{2k+1}{2}\Rightarrow 3x-1=\frac{4}{2k+1}\Rightarrow x=\frac{2k+5}{6k+3}$$

دقت کنید k عددی صحیح است، پس برای محاسبهٔ بیشترین مقدار x به‌صورت زیر عمل می‌کنیم (x برحسب k یک تابع هموگرافیک است.):



اولین عدد صحیح k که بعد از $-\frac{1}{2}$ است همان $k=0$ است، که به‌ازای آن بیشترین مقدار x برابر $\frac{5}{3}$ به‌دست می‌آید، پس بیشترین مقدار a همان $\frac{5}{3}$ است.

۲۱- اگر $A=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{10}-3\\ \sqrt{10}+3 & 0\end{bmatrix}$ باشد، حاصل $A^9+A^7+A^5$ کدام است؟

۱) A ۲) $3A$ ۳) $\bar{O}$ ۴) $3I$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۰ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا A^2 را تشکیل می‌دهیم و خواهیم داشت:

$$A^2=\begin{bmatrix}0 & \sqrt{10}-3\\ \sqrt{10}+3 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0 & \sqrt{10}-3\\ \sqrt{10}+3 & 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}=I$$

$$\Rightarrow A^4=I\xrightarrow{\times A}A^5=A$$

به طریق مشابه تمام توان‌های فرد نیز برابر با A خواهند بود، بنابراین:

$$A^5+A^7+A^9=A+A+A=3A$$

توان در ماتریس‌ها

$$A^2=A\times A$$
$$A^3=A\times A\times A$$
$$\vdots$$
$$A^n=\underbrace{A\times A\times\cdots\times A}_{n\text{ بار}}$$

WWW.ArefOnline.ir

نکته!

اگر ماتریسی به توان ۲ برسد و ماتریس همانی شود، تمام توان‌های زوج آن نیز همانی، و تمام توان‌های فرد آن خود ماتریس خواهند بود.

$$A^{۲}=I \Rightarrow \begin{cases} A^{۲k}=I \\ A^{۲k+۱}=A \end{cases}$$

ماز

۲۲- اگر $B-C=\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}$ و $A=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}$ باشد، مجموع درایه‌های ماتریس $ACA^{-۱}-ABA^{-۱}$ کدام است؟

۱) ۲۹ ۲) ۳۰ ۳) ۳۱ ۴) ۳۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

در ماتریس $ACA^{-۱}-ABA^{-۱}$ از راست از ماتریس $A^{-۱}$ و از چپ از ماتریس A فاکتور می‌گیریم.

$$A(C-B)A^{-۱}=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -۱ & -۴ \\ -۵ & -۳ \end{bmatrix}\left(\frac{۱}{-۴+۳}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}\right)$$

$$=\begin{bmatrix} -۱ & -۳ \\ ۱ & ۴ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & ۴ \\ ۵ & ۳ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -۱۶ & -۱۳ \\ ۲۱ & ۱۶ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۴ & ۳ \\ -۱ & -۱ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} -۵۱ & -۳۵ \\ ۶۸ & ۴۷ \end{bmatrix} \Rightarrow \text{جمع درایه‌ها} = ۲۹$$

ماتریس وارون

شرط لازم و کافی برای آن‌که ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ وارون‌پذیر باشد، آن است که:

$$|A|=ad-bc\neq ۰$$

و وارون آن به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$A^{-۱}=\frac{۱}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

خواص ضرب ماتریس‌ها

طرفین یک تساوی ماتریسی را می‌توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد اما نمی‌توان حذف کرد:

$$A=B \Rightarrow AC=BC$$

در حالت کلی اگر C ماتریسی وارون‌پذیر نباشد، نمی‌توان آن را از طرفین حذف کرد.

$$AC=BC \not\Rightarrow A=B$$

WWW.ArefOnline.ir

عضو بی‌اثر در ضرب ماتریس‌ها

I عضو بی‌اثر ضرب در ماتریس‌ها است. یعنی اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن‌گاه: $AI = IA = A$

ماز

۲۳- اگر مجموع ماتریس اسکالر $A=\begin{bmatrix} a+2 & 0 \\ b+1 & 5 \end{bmatrix}$ و ماتریس $B=\begin{bmatrix} 3 & c-1 \\ d & 4 \end{bmatrix}$، یک ماتریس قطری باشد، دستگاه معادلات $(A-B)^2\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ چند جواب دارد؟

۱) یک جواب منحصر به فرد دارد.
۲) بی‌شمار جواب دارد.
۳) فاقد جواب است.
۴) جواب ندارد یا بی‌شمار جواب دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

ماتریس A اسکالر است، بنابراین درایه‌های روی قطر اصلی برابرند و درایه‌های خارج قطر اصلی صفر هستند:

$$\begin{cases} a+2=5 \Rightarrow a=3 \\ b+1=0 \Rightarrow b=-1 \end{cases} \Rightarrow A=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$$

حال ماتریس $A+B$ قطری است، بنابراین:

$$A+B=\begin{bmatrix} 8 & c-1 \\ d & 9 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=0 \end{cases}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$A-B=\begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow (A-B)^2=\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

بنابراین دستگاه معادله به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 \\ -1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x=\frac{3}{4} \\ y=-1 \end{cases} \Rightarrow$$ یک جواب منحصر به فرد دارد.

ماتریس مربعی

اگر در ماتریس A، تعداد سطرها با تعداد ستون‌ها برابر و مساوی n باشد، A را یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n $(n \times n)$ می‌نامیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

ماتریس‌های زیر ماتریس‌هایی مربعی هستند:

$$A=\begin{bmatrix} -1 & 3 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}_{2\times 2} \qquad B=\begin{bmatrix} 2 & -3 & 6 \\ 5 & 0 & 1 \\ 4 & -2 & 3 \end{bmatrix}_{3\times 3}$$

ماتریس صفر

ماتریسی است که همهٔ درایه‌های آن صفر باشند و آن را با نماد $\bar{O}$ نشان می‌دهیم.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$\bar{O}_{2\times 3}=\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad \bar{O}_{2\times 2}=\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

تذکر!

یک ماتریس صفر لزوما ماتریسی مربعی نیست و می‌تواند تعداد سطرها و ستون‌هایش متفاوت باشد.

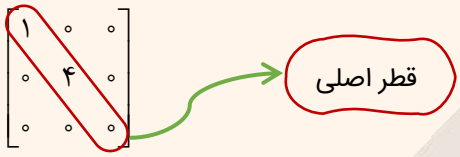
WWW.ArefOnline.ir

ماتریس قطری

ماتریس قطری، ماتریسی مربعی است که تمام درایه‌های غیرواقع بر قطر اصلی آن صفر باشند. (درایه‌های واقع بر قطر اصلی می‌توانند صفر باشند یا نباشند.)

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & -۱\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۴ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$$



ماتریس اسکالر

ماتریس اسکالر، ماتریسی قطری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن، همگی با هم برابرند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}۲ & ۰\\ ۰ & ۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۳ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۳\end{bmatrix}$$

ماتریس همانی (واحد)

ماتریس اسکالری است که درایه‌های واقع بر قطر اصلی آن همگی ۱ هستند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$I_{۲\times۲}=\begin{bmatrix}۱ & ۰\\ ۰ & ۱\end{bmatrix} \qquad I_{۳\times۳}=\begin{bmatrix}۱ & ۰ & ۰\\ ۰ & ۱ & ۰\\ ۰ & ۰ & ۱\end{bmatrix}$$

ماتریس بالامثلثی

ماتریسی مربعی است که درایه‌های زیر قطر اصلی آن همگی صفر هستند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}-۱ & ۴\\ ۰ & ۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۴ & ۵ & ۰\\ ۰ & ۰ & -۱\\ ۰ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

ماتریس پایین مثلثی

ماتریسی مربعی است که درایه‌های بالای قطر اصلی آن همگی صفر هستند.

دو نمونهٔ باحال ببین!

$$A=\begin{bmatrix}-۶ & ۰\\ ۷ & ۲\end{bmatrix} \qquad B=\begin{bmatrix}۴ & ۰ & ۰\\ ۲ & ۷ & ۰\\ ۹ & ۰ & ۲\end{bmatrix}$$

تذکر!

اگر ماتریس صفر، مربعی باشد هم قطری، هم اسکالر، هم بالا مثلثی و هم پایین‌مثلثی است.

WWWW.ArefOnline.ir

تعداد جواب‌های دستگاه معادلات دو معادله دو مجهولی

دستگاه معادلات $\begin{cases} ax+by+c=0 \\ a'x+b'y+c'=0 \end{cases}$ را درنظر بگیرید، برای جواب‌های آن ۳ حالت ممکن است اتفاق بیافتد:

۱) اگر $\frac{a}{a'} \neq \frac{b}{b'}$ باشد، دستگاه یک جواب منحصر به فرد به فرم (x_0, y_0) دارد.

۲) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} = \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه دارای بی‌شمار جواب می‌باشد.

۳) اگر $\frac{a}{a'} = \frac{b}{b'} \neq \frac{c}{c'}$ باشد، دستگاه دارای جواب نمی‌باشد.

ماز

۲۴- اگر $A=[a_{ij}]_{2\times 2}$ و $a_{ij}=\begin{cases} i & i\neq j \\ j^2 & i=j \end{cases}$ و $B=\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ A & & 3 \\ & & -1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & & A \\ 0 & & \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$ باشد، دترمینان ماتریس B کدام است؟

۱) ۳۳ ۲) -66 ۳) ۶۶ ۴) -33

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A را تشکیل می‌دهیم:

$$A=\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

http://rubika.ir/Tahlilazemoon

حال ماتریس B را تشکیل می‌دهیم:

$$B=\underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}}_{C}\underbrace{\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}}_{D}$$

می‌دانیم دترمینان ضرب دو ماتریس مربعی برابر با ضرب دترمینان‌های آن‌هاست:

$$|B|=|C||D|$$
$$|C|=1(-1-12)-0+1(4-2)=-11$$
$$|D|=2(-2-4)-1(0-12)+1(0-6)=-6 \Rightarrow |B|=(-11)(-6)=66$$

محاسبهٔ دترمینان ماتریس ۳×۳ به کمک روش بسط

برای محاسبهٔ دترمینان ماتریس‌های 3×3 روش‌های مختلفی وجود دارد که بهترین آن‌ها بسط دترمینان حول یک سطر یا ستون دلخواه است.

ماتریس $A=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}$ را در نظر بگیرید. دترمینان این ماتریس با بسط حول سطر اول به‌صورت زیر خواهد بود:

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر و ستون b به‌دست می‌آید.

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر و ستون a به‌دست می‌آید.

دترمینان ماتریسی که از حذف سطر و ستون c به‌دست می‌آید.

بسط حول سطر اول: $|A|=a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix}-b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix}+c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

WWWW.ArefOnline.ir

یه نمونهٔ باحال ببین!

ماتریس $A=\begin{bmatrix}۲ & ۳ & ۴\\ ۵ & ۱ & ۲\\ ۰ & ۶ & ۳\end{bmatrix}$ مفروض است. دترمینان این ماتریس را با بسط حول سطر اول به‌دست آورید.

$$|A|=۲\begin{vmatrix}۱ & ۲\\ ۶ & ۳\end{vmatrix}-۳\begin{vmatrix}۵ & ۲\\ ۰ & ۳\end{vmatrix}+۴\begin{vmatrix}۵ & ۱\\ ۰ & ۶\end{vmatrix}=۲(۱\times۳-۲\times۶)-۳(۵\times۳-۲\times۰)+۴(۵\times۶-۱\times۰)=۲(-۹)-۳(۱۵)+۴(۳۰)$$

$$=-۱۸-۴۵+۱۲۰=۵۷$$

دترمینان را می‌توان حول هر کدام از سطرها یا ستون‌ها نوشت. به عنوان مثال:

$$A=\begin{bmatrix}a & b & c\\ d & e & f\\ g & h & i\end{bmatrix}\Rightarrow \text{بسط حول سطر دوم}: |A|=-d\times\begin{vmatrix}b & c\\ h & i\end{vmatrix}+e\times\begin{vmatrix}a & c\\ g & i\end{vmatrix}-f\times\begin{vmatrix}a & b\\ g & h\end{vmatrix}$$

در حالت کلی علامت پشت عددی که در دترمینان ضرب شده با توجه به شمارهٔ سطر و ستونی که حذف می‌شود تعیین می‌شود، به عنوان مثال برای بسط حول سطر سوم داریم:

$$A=\begin{bmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲} & a_{۲۳}\\ a_{۳۱} & a_{۳۲} & a_{۳۳}\end{bmatrix}\Rightarrow |A|=(-۱)^{۳+۱}a_{۳۱}\times\begin{vmatrix}a_{۱۲} & a_{۱۳}\\ a_{۲۲} & a_{۲۳}\end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۲}a_{۳۲}\times\begin{vmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۳}\\ a_{۲۱} & a_{۲۳}\end{vmatrix}+(-۱)^{۳+۳}a_{۳۳}\times\begin{vmatrix}a_{۱۱} & a_{۱۲}\\ a_{۲۱} & a_{۲۲}\end{vmatrix}$$

اگر دترمینان را با بسط دادن حول هر سطر یا ستونی محاسبه کنیم، همواره جواب‌هایی یکسان به‌دست می‌آید.

توجه!

برای راحتی بهتر است حول سطر یا ستونی که تعداد صفرهای بیشتری دارد، بسط دهیم.

خواص دترمینان ماتریس

اگر A و B دو ماتریس $n\times n$ باشند، آن‌گاه:

$$|A\times B|=|A|\times|B|$$

برای به‌دست آوردن دترمینان $A+B$ یا $A-B$، ابتدا باید این ماتریس‌ها را تشکیل دهیم و سپس دترمینان بگیریم.

$$|A\pm B|\neq|A|\pm|B|$$

۲۵- اگر $A=\begin{bmatrix}۲ & ۲ & ۴\\ ۰ & ۰ & ۶\\ ۱ & ۲ & ۳\end{bmatrix}$ و $B=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۱\\ ۰ & ۲ & ۴\\ ۱ & -۱ & ۲\end{bmatrix}$ و $C=\begin{bmatrix}۱ & ۲ & ۰\\ ۰ & ۳ & ۲\\ ۲ & ۰ & ۰\end{bmatrix}$ و رابطهٔ $AB+DA=AC$ بین ماتریس‌های A، B، C و D برقرار باشد، دترمینان وارون ماتریس $۲D$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۱}{۲}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۸}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

ماتریس AB را به طرف دوم می‌بریم و از طرفین تساوی دترمینان می‌گیریم:

$$AB+DA=AC\Rightarrow DA=AC-AB\Rightarrow DA=A(C-B)$$

$$\Rightarrow |D||A|=|A||C-B|\xrightarrow{|A|\neq۰}|D|=|C-B|$$

WWW.ArefOnline.ir

حال $C-B$ را تشکیل می‌دهیم:

$$C-B=\begin{bmatrix}0 & 0 & -1\\ 0 & 1 & -2\\ 1 & 1 & -2\end{bmatrix}\Rightarrow |C-B|=1\Rightarrow |D|=1\Rightarrow |D^{-1}|=1$$

$$\Rightarrow |(2D)^{-1}|=\left|\frac{1}{2}D^{-1}\right|=\left(\frac{1}{2}\right)^3|D^{-1}|=\frac{1}{8}\times 1=\frac{1}{8}$$

قِلِقِشو یاد بگیر!

از طرفین هر تساوی ماتریسی (اگر مربعی باشند!) می‌توان دترمینان گرفت.

ضریب به توان می‌رسه بعد از دترمینان میاد بیرون!

اگر k یک عدد حقیقی و A یک ماتریس $n\times n$ باشد، آن‌گاه داریم:

$$|kA|=k^n|A|$$

چند قانون مهم در دترمینان ماتریس‌ها

۱) $|A^n|=|A|^n$ ۲) $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ ۳) $|(A^{-1})^n|=\frac{1}{|A|^n}$

ماز

۲۶- فصل مشترک یک صفحه و یک رویهٔ مخروطی کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

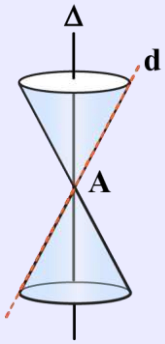
۱) دو خط متقاطع ۲) سهمی ۳) دایره ۴) دو خط موازی

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۵ ـ ۱۲۰۲)

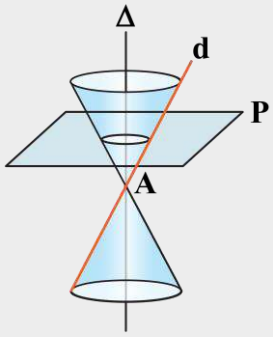
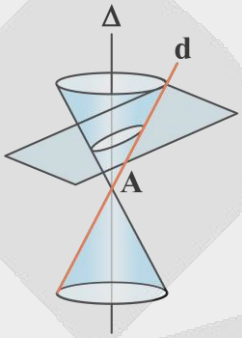
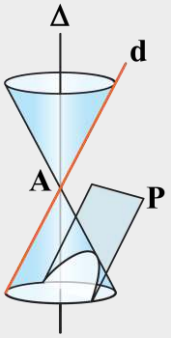
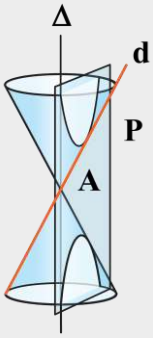
فصل مشترک یک صفحه و یک رویهٔ مخروطی تحت هیچ شرایطی دو خط موازی نخواهد شد، اما در حالت‌های خاص که دایره، بیضی، سهمی یا هذلولی نباشد دو خط متقاطع، یک خط یا یک نقطه می‌تواند باشد.

مقاطع مخروطی

دو خط d و Δ را که در نقطهٔ A مانند شکل متقاطع (غیرعمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را رویهٔ مخروطی (سطح مخروطی) می‌نامیم. در این حالت خط Δ را محور، خط d را مولد و نقطهٔ A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، مقطع مخروطی نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارتند از دایره، بیضی، سهمی و هذلولی که البته در حالت‌های خاص ممکن است نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول بعد این حالات بررسی شده‌اند.



WWW.ArefOnline.ir

دایره	بیضی	سهمی	هذلولی
صفحهٔ P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P بر محور Δ عمود نبوده و غیرموازی با مولد d است و از رأس عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحهٔ P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع می‌کند.
			
حالات خاص			
در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطهٔ رأس خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحهٔ P از رأس مخروطی عبور کرده و هر دو نیمهٔ سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.

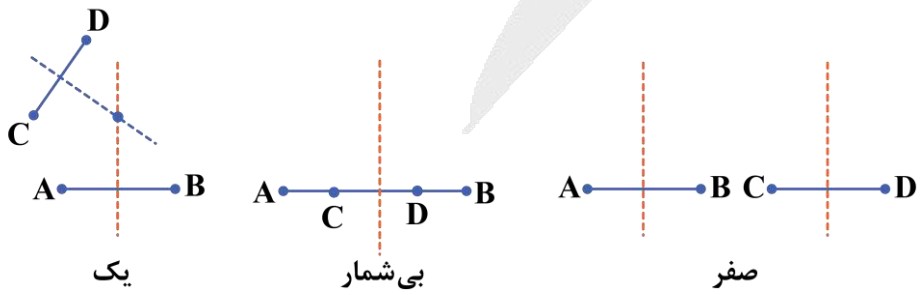
اگر دو صفحهٔ موازی یک رویهٔ مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد.

۲۷- نقاط A,B,C,D در صفحه مفروض‌اند، تعداد نقاطی که از A و B و همچنین از C و D به یک فاصله باشند، کدام گزینه نمی‌تواند باشد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ⏲ ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۳۹ ـ ۱۲۰۲)

باید تعداد نقاط تقاطع عمودمنصف‌های AB و CD را بررسی کنیم. واضح است که تعداد نقاط تقاطع دو خط عمودمنصف همواره صفر، یک یا بی‌شمار است اما هرگز ۲ نمی‌تواند باشد.

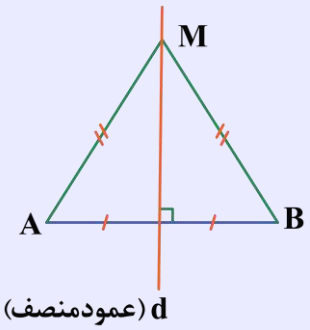


WWW.ArefOnline.ir

مکان هندسی

مجموعه نقاطی از فضا یا صفحه که دارای ویژگی یکسانی باشند را «مکان هندسی» می‌گوییم.

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر عمودمنصف پاره‌خط واصل این دو نقطه است.



$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

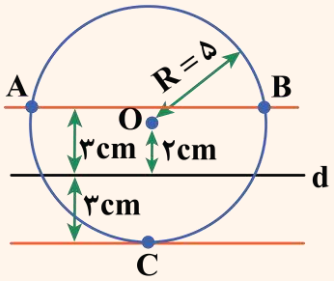
اشتراک چند مکان هندسی

اگر در یک سوال چند مکان هندسی مدنظر باشد تمامی آن‌ها را رسم کرده و نقاط برخورد (مشترک) را به عنوان جواب در نظر می‌گیریم.

یه نمونهٔ باحال ببین!

سؤال: نقطهٔ O به فاصلهٔ ۲cm از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از O به فاصلهٔ ۵ و از خط d به فاصلهٔ ۳cm باشند؟

ابتدا دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵cm رسم می‌کنیم، سپس ۲ خط به فاصلهٔ ۳cm موازی با d در دو طرف آن رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، این دو مکان هندسی ۳ نقطهٔ مشترک (C, B, A) دارند، پس مسئله ۳ جواب دارد.



۲۸- دایره‌ای از نقطهٔ $A(۸,۳)$ گذشته و خطوط به‌صورت $(m-۱)x+(m+۲)y=۱۲m$ شامل تمام قطرهای آن هستند، بیشترین فاصلهٔ نقاط دایره از محور xها کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۲۰۲)

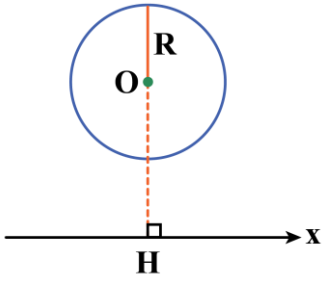
اگر به m دو مقدار مختلف بدهیم معادلهٔ دو تا از قطرها مشخص می‌شود و با تقاطع دادن آن‌ها، مرکز دایره به‌دست می‌آید:

$$\begin{cases} m=۱ \Rightarrow ۳y=۱۲ \Rightarrow y=۴ \\ m=-۲ \Rightarrow -۳x=-۲۴ \Rightarrow x=۸ \end{cases} \Rightarrow O(۸,۴)$$

حال با مشخص بودن مرکز و نقطهٔ A روی دایره می‌توانیم شعاع دایره را به‌دست آوریم:

$$R=|OA|=\sqrt{(۸-۸)^۲+(۴-۳)^۲}=۱$$

حال برای به‌دست آوردن بیشترین فاصلهٔ نقاط دایره تا محور xها کافیست فاصلهٔ مرکز تا محور xها (OH) را با شعاع دایره جمع کنیم:



$$OH+R=y_O+R=۴+۱=۵$$

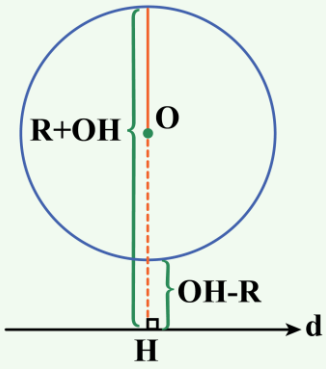
WWW.ArefOnline.ir

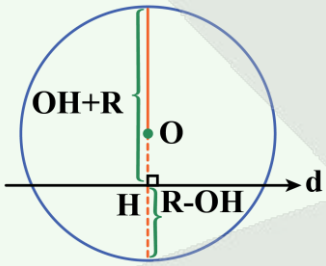
قِلقِشو یاد بگیر!

اگر معادلهٔ عمومی قطرهای دایره داده شود (معادله‌ای که برحسب پارامتری مانند m است) می‌توانیم به کمک این معادله مرکز دایره را پیدا کنیم، برای این منظور کافیست به پارامتر دو عدد مختلف بدهیم و معادلهٔ دو تا از قطرها را به‌دست آوریم، سپس معادلهٔ این دو قطر را در یک دستگاه حل می‌کنیم تا مختصات مرکز به‌دست آید.

نزدیک‌ترین و دورترین نقطهٔ یک دایره به یک خط

اگر فاصلهٔ مرکز دایره تا خط d برابر OH و شعاع دایره برابر R باشد، آن‌گاه فاصلهٔ نزدیک‌ترین و دورترین نقاط دایره تا خط به ترتیب $|OH-R|$ و $OH+R$ است.





۲۹- معادلهٔ دایره‌ای که خطوط قائم بر آن همگی در نقطهٔ $(-۱,۱)$ همرسند و بر دایرهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰$ مماس خارج است به‌صورت $x^۲+y^۲+ax+by+c=۰$ است، حاصل $a+b+c$ کدام است؟

۱) صفر ۲) ۴ ۳) ۴- ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

می‌دانیم خطوط قائم بر دایره همگی از مرکز دایره می‌گذرند، بنابراین مرکز دایره $O(-۱,۱)$ است و حال چون دو دایره مماس خارج هستند، باید $OO'=R+R'$ باشد، بنابراین:

$$x^۲+y^۲-۲x+۲y=۰ \Rightarrow O'(۱,-۱)\ ,\ R'=\sqrt{۲}$$

$$|OO'|=\sqrt{(۱+۱)^۲+(-۱-۱)^۲}=۲\sqrt{۲} \Rightarrow ۲\sqrt{۲}=R+\sqrt{۲} \Rightarrow R=\sqrt{۲}$$

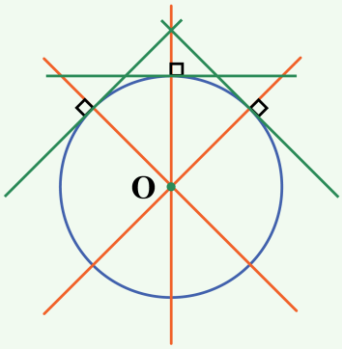
بنابراین معادلهٔ دایره به‌صورت زیر است:

$$(x+۱)^۲+(y-۱)^۲=۲ \Rightarrow x^۲+y^۲+۲x-۲y=۰$$

$$\Rightarrow a=۲, b=-۲\ ,\ c=۰ \Rightarrow a+b+c=۰$$

خط قائم بر دایره

خط قائم بر دایره خطی است که بر خط مماس بر دایره در نقطهٔ تماس عمود است. این خط در واقع شامل قطری از دایره است. خطوط قائم بر دایره همگی در مرکز دایره همرسند. (در شکل زیر خطوط نارنجی همگی قائم بر دایره هستند.)

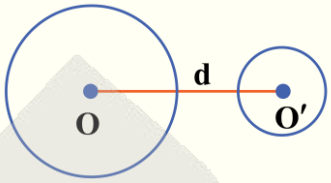


WWW.ArefOnline.ir

وضعیت دو دایره نسبت به هم

دو دایرهٔ C و C' دارای وضعیت‌های زیر نسبت به هم هستند:

۱. متخارج

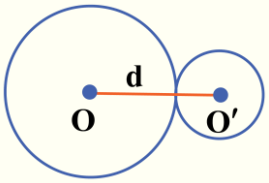


$d > R + R'$

۲ = تعداد مماس مشترک داخلی

۲ = تعداد مماس مشترک خارجی

۲. مماس خارج

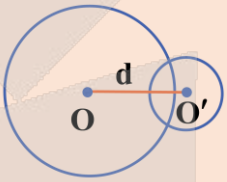


$d = R + R'$

۱ = تعداد مماس مشترک داخلی

۲ = تعداد مماس مشترک خارجی

۳. متقاطع

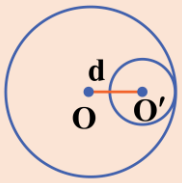


$|R - R'| < d < R + R'$

۰ = تعداد مماس مشترک داخلی

۲ = تعداد مماس مشترک خارجی

۴. مماس داخل

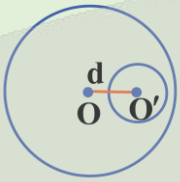


$d = |R - R'|$

۰ = تعداد مماس مشترک داخلی

۱ = تعداد مماس مشترک خارجی

۵. متداخل



$d < |R - R'|$

۰ = تعداد مماس مشترک داخلی

۰ = تعداد مماس مشترک خارجی

۶. هم‌مرکز

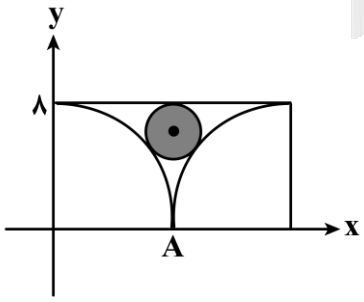
$d = ۰$

۰ = تعداد مماس مشترک داخلی

۰ = تعداد مماس مشترک خارجی

ماز

۳۰- مطابق شکل، یک دایره بر دو ربع دایرهٔ محاط در یک مستطیل مماس است. طول قطعه مماسی که از نقطهٔ A بر این دایره رسم می‌شود، کدام است؟



۱) $۲\sqrt{۳}$

۲) $۴\sqrt{۳}$

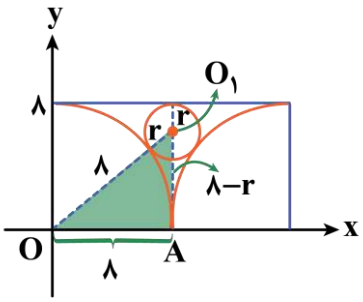
۳) $۲\sqrt{۲}$

۴) $۴\sqrt{۲}$

WWWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/ترکیبی ـ زمان‌بَر ـ هندسه ۳ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به شکل، اگر شعاع دایرهٔ کوچک را r فرض کنیم، آن‌گاه در مثلث رنگ شده طبق فیثاغورس داریم:



$$(۸+r)^۲=(۸-r)^۲+۸^۲ \Rightarrow ۶۴+۱۶r+r^۲=۶۴-۱۶r+r^۲+۶۴ \Rightarrow ۳۲r=۶۴ \Rightarrow r=۲$$

بنابراین مختصات مرکز دایرهٔ کوچک‌تر $O_۱(۸,۶)$ است و معادلهٔ آن به‌صورت زیر است:

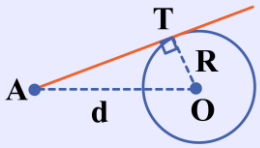
$$(x-۸)^۲+(y-۶)^۲=۲^۲$$

حال طول قطعه مماسی که از $A(۸,۰)$ بر آن رسم شود برابر است با:

$$AT=\sqrt{d^۲-r^۲}=\sqrt{(۰-۶)^۲-۴}=\sqrt{۳۶-۴}=\sqrt{۳۲}=۴\sqrt{۲}$$

طول مماس

از نقطهٔ $A(x,y)$ خارج دایرهٔ $f(x,y)=x^۲+y^۲+ax+by+c$ می‌توان دو مماس هم‌اندازه بر دایره رسم کرد. طول قطعه مماس‌هایی که از A بر دایره رسم می‌شود با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس برابر است با:



$$AT=\sqrt{d^۲-R^۲}=\sqrt{f(A)}$$

ماز

۳۱- به‌جای a در رابطهٔ $\frac{a^۲(a+۱)^۲}{۴۹}$ چند عدد طبیعی دو رقمی می‌توانیم قرار دهیم تا حاصل عددی زوج باشد؟

۱) ۱۳ ۲) ۲۰ ۳) ۲۶ ۴) ۳۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۵ ـ ۱۲۰۱)

$\frac{a^۲(a+۱)^۲}{۴۹}$ زوج است. $\Rightarrow$ $\frac{a(a+۱)}{۷}$ زوج است.

می‌دانیم حاصل‌ضرب دو عدد طبیعی متوالی $a(a+۱)$ همواره عددی زوج است، پس کافی است $a(a+۱)$ مضرب ۷ باشد. بنابراین:

$$\begin{cases} a=۷k \Rightarrow ۱۰\le ۷k\le ۹۹ \Rightarrow ۲\le k\le ۱۴ \Rightarrow ۱۳\text{تا} \\ \text{یا} \\ a=۷k-۱ \Rightarrow ۱۰\le ۷k-۱\le ۹۹ \Rightarrow ۱۱\le ۷k\le ۱۰۰ \Rightarrow ۲\le k\le ۱۴ \Rightarrow ۱۳\text{تا} \end{cases}$$

بنابراین مجموعاً ۲۶ عدد طبیعی دو رقمی به‌جای a می‌تواند قرار بگیرد.

یه نکتهٔ طلایی!

اگر a^n عددی زوج باشد، a نیز حتماً عددی زوج است و برعکس.

و اگر a^n عددی فرد باشد، a نیز حتماً عددی فرد است و برعکس.

ماز

WWW.ArefOnline.ir

۳۲- چند نقطه با مختصات طبیعی روی نمودار $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{y}+\frac{۱}{۳}=۰$ قرار دارد؟

۱) صفر ۲) یک ۳) دو ۴) سه

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا y را برحسب x می‌نویسیم:

$$\frac{۱}{y}=\frac{-۱}{x-۱}-\frac{۱}{۳}=\frac{-۳-(x-۱)}{۳(x-۱)}=\frac{-x-۲}{۳x-۳}$$

$$\Rightarrow y=\frac{۳x-۳}{-x-۲}=\frac{-۳x+۳}{x+۲}\xrightarrow{y\in\mathbb{N}}x+۲\,|\,-۳x+۳ \quad (۱)$$

به علاوه داریم:

$$x+۲\,|\,x+۲\Rightarrow x+۲\,|\,۳(x+۲)\Rightarrow x+۲\,|\,۳x+۶ \quad (۲)$$

$$(۱),(۲)\Rightarrow x+۲\,|\,(-۳x+۳)+(۳x+۶)\Rightarrow x+۲\,|\,۹$$

$$x+۲=\pm۱ \text{ یا } \pm۳ \text{ یا } \pm۹\xrightarrow{x\in\mathbb{N}}x\in\{۱,۷\}$$

از طرفی چون y هم عددی طبیعی است، پس:

$$\frac{-۳x+۳}{x+۲}>۰\xrightarrow{\text{تعیین علامت}}-۲<x<۱$$

بنابراین هیچ نقطه‌ای با مختصات صحیح وجود ندارد.

بخش‌پذیری

می‌گوییم عدد صحیح b بر عدد صحیح و غیرصفر a بخش‌پذیر است یا a عدد b را می‌شمارد و می‌نویسیم $a\,|\,b$ اگر عدد صحیح k وجود داشته باشد به‌طوری‌که: $b=ak$

ویژگی‌های بخش‌پذیری

۱) $۱\,|\,a\ ,\ a\,|\,۰\ ,\ a\,|\,a$

۲) $a\,|\,b\ ,\ b\,|\,c\Rightarrow a\,|\,c$

۳) $a\,|\,b\ ,\ a\,|\,c\Rightarrow a\,|\,mb+nc$ (a هر ترکیب خطی از b و c را می‌شمارد)

۴) $a\,|\,b\Rightarrow a\,|\,b^n\ ,\ a\,|\,mb\ ,\ a^n\,|\,b^n$

۵) $a\,|\,b\Rightarrow |a|\le|b|$

۶) $a\,|\,b\ ,\ c\,|\,d\Rightarrow ac\,|\,bd$

قِلِقِشو یاد بگیر!

در سوالاتی که به دنبال نقاط با مختصات صحیح یا طبیعی روی منحنی $y=\frac{p(x)}{ax+b}$ هستیم که در آن $p(x)$ چندجمله‌ای با ضرایب صحیح و معمولاً از درجه ۱ یا ۲ و یا عدد ثابت است، باید صورت بر مخرج بخش‌پذیر باشد، یعنی: $ax+b\,|\,p(x)$. سپس باید با اعمال مناسب به فرم $ax+b\,|\,k$ (k عدد صحیح) برسیم و $ax+b$ را با شمارنده‌های (مقسوم‌علیه‌های) عدد k برابر قرار دهیم.

WWW.ArefOnline.ir

۳۳- اگر $L=[۱۴۷,۱۳۷۲]$ باشد، حاصل عبارت $[۶۸۶,(۲۴۵,۲۰۵۸)]$ کدام است؟

۱) L ۲) $\frac{L}{۲}$ ۳) $\frac{L}{۳}$ ۴) $\frac{L}{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

$$[۱۴۷,۱۳۷۲]=\left[۳\times۷^{۲},۴\times۷^{۳}\right]=۳\times۴\times۷^{۳}=L$$

$$(۲۴۵,۲۰۵۸)=(۵\times۷^{۲},۲\times۳\times۷^{۳})=۷^{۲}$$

$$\left[۷^{۲},۶۸۶\right]=\left[۷^{۲},۷^{۳}\times۲\right]=۷^{۳}\times۲=\frac{L}{۶}$$

ب.م.م و ک.م.م

بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد a و b که به اختصار ب.م.م دو عدد نامیده می‌شود، برابر با حاصل‌ضرب عوامل اول مشترک دو عدد a و b با کمترین توان است.

$$(۱۲,۴۵)=(۳\times۲^{۲},۳^{۲}\times۵)=۳$$

کوچک‌ترین مضرب مشترک دو عدد a و b که به اختصار ک.م.م دو عدد نامیده می‌شود، برابر است با حاصل‌ضرب عوامل اول مشترک با بیشترین توان در عوامل غیرمشترک.

$$[۱۲,۴۵]=[۳\times۲^{۲},۳^{۲}\times۵]=۳^{۲}\times۲^{۲}\times۵$$

۳۴- اگر رقم یکان دو عدد $۷a-۳$ و $۵a+۱$ با هم یکسان باشند، مجموع مقادیر باقیمانده‌های تقسیم عدد a بر ۱۵ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۱۹ ۳) ۲۱ ۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ ترکیبی/محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

اگر عدد را به پیمانهٔ ۱۰ بگیریم رقم یکان آن به‌دست می‌آید. وقتی دو عدد در تقسیم بر عددی باقی‌ماندهٔ یکسان داشته باشند یعنی به پیمانهٔ آن عدد با هم هم‌نهشت‌اند. پس:

$$۷a-۳\overset{۱۰}{\equiv}۵a+۱\Rightarrow ۲a\overset{۱۰}{\equiv}۴\xrightarrow[(۲,۱۰)=۲]{\div ۲}a\overset{۵}{\equiv}۲$$

$$a=۵t+۲\Rightarrow\begin{cases}t=۳q:a=۱۵q+۲\\t=۳q+۱:a=۱۵q+۷\\t=۳q+۲:a=۱۵q+۱۲\end{cases}$$

بنابراین مجموع مقادیر باقی‌مانده‌ها برابر است با:

$$۲+۷+۱۲=۲۱$$

افراز اعداد صحیح

با توجه به قضیهٔ تقسیم، می‌دانیم در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، باقی‌ماندهٔ r در بازهٔ $۰\le r\le b-۱$ قرار دارد. پس هر عدد صحیح مانند a را بر حسب b به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$a=bq \text{ یا } a=bq+۱ \text{ یا } a=bq+۲ \text{ یا } \dots \text{ یا } a=bq+(b-۱)$$

یه نمونهٔ باحال ببین!

در تقسیم عدد a بر عدد ۴، a را به یکی از صورت‌های زیر می‌توان نوشت:

$$a=۴k \text{ یا } a=۴k+۱ \text{ یا } a=۴k+۲ \text{ یا } a=۴k+۳$$

WWW.ArefOnline.ir

همنهشتی

اگر دو عدد صحیح a و b در تقسیم بر عدد طبیعی m دارای باقی‌مانده‌های یکسان باشند، می‌گوییم دو عدد به پیمانهٔ m همنهشت‌اند و می‌نویسیم:

$$a \overset{m}{\equiv} b$$

در این صورت داریم:

۱) $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow m \mid a-b$

۲) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow \begin{cases} a \pm c \overset{m}{\equiv} b \pm c \\ ac \overset{m}{\equiv} bc \\ a^n \overset{m}{\equiv} b^n \end{cases}$

۳) $a \overset{m}{\equiv} b \ , \ c \overset{m}{\equiv} d \Rightarrow \begin{cases} ac \overset{m}{\equiv} bd \\ a+c \overset{m}{\equiv} b+d \\ a-c \overset{m}{\equiv} b-d \end{cases}$

۴) $a \overset{m}{\equiv} b \Rightarrow a+mt \overset{m}{\equiv} b+mk$ (می‌توان مضارب صحیح پیمانه را به طرفین رابطهٔ همنهشتی اضافه کرد.)

۵) $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow{(c,m)=d} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$

نکته!

هر عدد به پیمانهٔ ۱۰ با رقم یکانش همنهشت است.

ماز

۳۵- معادلهٔ $17a^2x \overset{8}{\equiv} 9-2x$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. این معادله چند جواب طبیعی سه رقمی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۸۴ ۲) ۱۱۲ ۳) ۱۲۴ ۴) ۲۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

از آن‌جا که $17 \overset{8}{\equiv} 1$ و $9 \overset{8}{\equiv} 1$ داریم:

$$17a^2x \overset{8}{\equiv} 9-2x \Rightarrow a^2x \overset{8}{\equiv} 1-2x \Rightarrow (a^2+2)x \overset{8}{\equiv} 1 \quad (*)$$

شرط وجود جواب این است که:

$$(a^2+2,8) \mid 1 \Rightarrow (a^2+2,8)=1$$

بنابراین باید a^2+2 فرد باشد:

$$\text{فرد } a^2+2 \Rightarrow \text{فرد } a^2 \Rightarrow \text{فرد } a \Rightarrow a^2=8q+1$$

WWW.ArefOnline.ir

حال مقدار آن را در معادله جای‌گذاری می‌کنیم:

$$\xrightarrow{(*)}(۸q+۳)x\overset{۸}{\equiv}۱\Rightarrow ۳x\overset{۸}{\equiv}۱\overset{۸}{\equiv}۹\xrightarrow[(۳,۸)=۱]{\div ۳}x\overset{۸}{\equiv}۳\Rightarrow x=۸k+۳$$

$$۱۰۰\le ۸k+۳\le ۹۹۹\Rightarrow ۹۷\le ۸k\le ۹۹۶\Rightarrow ۱۳\le k\le ۱۲۴$$
$$\Rightarrow \text{تعداد}=۱۲۴-۱۳+۱=۱۱۲$$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ همنهشتی

شرط آن‌که معادلهٔ همنهشتی $ax\overset{m}{\equiv}b$ جواب داشته باشد آن است که:

$$(a,m)\mid b$$

حل معادلهٔ همنهشتی

برای حل معادلهٔ همنهشتی x را تنها می‌کنیم و سپس به کمک تعریف همنهشتی و قضیهٔ تقسیم جواب کلی معادله را می‌نویسیم:

$$x\overset{m}{\equiv}r\Rightarrow x=mk+r$$

یادآوری!

مربع هر عدد فرد همواره به‌صورت $(۸q+۱)$ است، چون:

$$(۲k+۱)^۲=۴k^۲+۴k+۱=۴\overbrace{k(k+۱)}^{۲q}+۱=۸q+۱$$

ماز

۳۶- اگر معادلهٔ سیالهٔ $\overline{a۷۲b۱}=۳۹۶x+۴۹۵y$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب باشد، $a+b$ چند مقدار متمایز می‌تواند داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ترکیبی/مفهومی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا شرط وجود جواب برای معادله سیاله را می‌نویسیم:

$$(۳۹۶,۴۹۵)\mid\overline{a۷۲b۱}\Rightarrow ۹۹\mid\overline{a۷۲b۱}$$
$$\downarrow\quad\downarrow$$
$$۹۹\times۴\quad ۹۹\times۵$$

حال برای این‌که $\overline{a۷۲b۱}$ بر ۹۹ بخش‌پذیر باشد، باید هم بر ۹ و هم بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$\overline{a۷۲b۱}\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow a+۷+۲+b+۱\overset{۹}{\equiv}۰\Rightarrow a+b\overset{۹}{\equiv}-۱\overset{۹}{\equiv}۸\xrightarrow{۰\le a,b\le ۹}\begin{cases}a+b=۸\\ a+b=۱۷\end{cases}$$

$$\underset{+-+-+}{\overline{a\,۷\,۲\,b\,۱}}\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow a-۷+۲-b+۱\overset{۱۱}{\equiv}۰\Rightarrow a-b\overset{۱۱}{\equiv}۴\xrightarrow{۰\le a,b\le ۹}\begin{cases}a-b=۴\\ a-b=-۷\end{cases}$$

$$\begin{cases}a+b=۸\\ a-b=۴\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}۲a=۱۲\\ a=۶\\ b=۲\end{matrix}$$

$$\begin{cases}a+b=۱۷\\ a-b=۴\end{cases}\Rightarrow ۲a=۲۱\ \times$$

$$\begin{cases}a+b=۸\\ a-b=-۷\end{cases}\Rightarrow ۲a=۱\ \times$$

$$\begin{cases}a+b=۱۷\\ a-b=-۷\end{cases}\Rightarrow \begin{matrix}a=۵\\ b=۱۲\ \times\end{matrix}$$

بنابراین $a+b$ تنها یک مقدار می‌تواند داشته باشد.

WWW.ArefOnline.ir

همنهشتی در برخی از پیمانه‌ها

۱) هر عدد در پیمانه‌های ۲ یا ۵ یا ۱۰ با یکانش همنهشت است.

۲) هر عدد در پیمانه‌های ۳ یا ۹ با مجموع ارقامش همنهشت است.

۳) هر عدد در پیمانهٔ ۴ با دو رقم سمت راستش همنهشت است.

۴) هر عدد در پیمانهٔ ۸ با سه رقم سمت راستش همنهشت است.

۵) هر عدد در پیمانهٔ ۱۱ با جمع ارقامش که از راست به چپ یکی درمیان $+$ و $-$ در نظر گرفته شده باشد، همنهشت است.

$$\underset{+-+-+}{\overline{abcde}} \overset{11}{\equiv} e-d+c-b+a$$

یه نکتهٔ طلایی!

عدد a بر اعداد m و n بخش‌پذیر است اگر و فقط اگر بر $[m,n]$ بخش‌پذیر باشد. به عبارت دیگر:

$$\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} c \\ a \overset{n}{\equiv} c \end{cases} \Leftrightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} c$$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ سیاله

شرط داشتن جواب برای معادلهٔ سیالهٔ $ax+by=c$ آن است که:

$$(a,b)\mid c$$

۳۷- تعداد دورهای به طول ۳ در گراف کامل مرتبهٔ p، ۲۰ تا است. این گراف چند زیرگراف از مرتبهٔ ۴ مانند G دارد که در آن هر دو رأس مجاورند؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۲ ۳) ۱۵ ۴) ۱۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ خط‌به‌خط ـ سریع ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

تعداد دورهای به طول ۳ در گراف کامل K_p برابر است با:

$$\binom{p}{3}\frac{(3-1)!}{2}=20 \Rightarrow \binom{p}{3}=20 \Rightarrow \frac{p(p-1)(p-2)}{6}=20$$

$$\Rightarrow p(p-1)(p-2)=6\times5\times4 \Rightarrow p=6$$

حال باید تعداد زیرگراف‌های K_4 را بیابیم. برای این کار کافی است ۴ رأس از ۶ رأس را انتخاب کنیم:

$$\binom{6}{4}=\frac{6\times5}{2}=15$$

تعداد دورهای به طول n در گراف کامل

تعداد دورهای به طول n در گراف K_p برابر است با:

$$\binom{p}{n}\frac{(n-1)!}{2}$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۸- در گراف G از مرتبهٔ ۱۰ اگر برای همهٔ رأس‌های آن رابطهٔ $|N_G(a)| = |N_{\overline{G}}[a]|$ همواره برقرار باشد، در این گراف $|E(G)|$ کدام است؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۵ ۴) ۴۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

اگر a رأس دلخواهی از گراف باشد، داریم:

$$\deg_G(a) + \deg_{\overline{G}}(a) = ۹ \Rightarrow k + \deg_{\overline{G}}(a) = ۹ \Rightarrow \deg_{\overline{G}}(a) = ۹ - k$$

از طرفی بنا به فرض مسئله داریم:

$$|N_G(a)| = |N_{\overline{G}}[a]| \Rightarrow k = (۹-k) + \overset{a}{۱} \Rightarrow ۲k = ۱۰ \Rightarrow k = ۵$$

پس با یک گراف ۵-منتظم از مرتبهٔ ۱۰ مواجه‌ایم و داریم:

$$۲q = kp \Rightarrow q = \frac{kp}{۲} = \frac{۵ \times ۱۰}{۲} = ۲۵ \Rightarrow \text{تعداد یال‌ها} = |E(G)| = ۲۵$$

مجموع درجهٔ یک رأس در گراف و مکملش

در هر گراف G از مرتبهٔ p، اگر $\overline{G}$ گراف مکمل باشد، برای هر رأس x داریم:

$$\deg_G(x) + \deg_{\overline{G}}(x) = p - ۱$$

تعداد اعضای همسایگی رأس

$N_G(a)$ مجموعهٔ رئوس مجاور با رأس a است، پس $|N_G(a)|$ با درجهٔ رأس a برابر است و $N_G[a]$ مجموعهٔ رئوس مجاور با a به‌علاوهٔ خود a است پس $|N_G[a]|$ یک واحد بیشتر از درجهٔ رأس a است.

رابطهٔ بین تعداد یال‌ها و درجهٔ رئوس

مجموع درجات رئوس یک گراف برابر با دو برابر تعداد یال‌های گراف است:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = ۲q$$

بنابراین در گراف‌های $r-$منتظم داریم:

$$\sum_{i=۱}^{p} \deg(v_i) = p \times r = ۲q$$

۳۹- گراف G گرافی ۴-منتظم با $q(\overline{G}) = ۲۵$ است. حاصل $\sum_{i=۱}^{p} |N[v_i]|$ در این گراف کدام است؟

۱) ۱۰ ۲) ۳۰ ۳) ۴۰ ۴) ۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/محاسباتی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۳۸ ـ ۱۲۰۲)

در گراف $r-$منتظم داریم:

$$q(G) = \frac{rp}{۲} \xrightarrow{r=۴} q(G) = ۲p$$

WWW.ArefOnline.ir

از طرفی داریم: $q(G)+q(\overline{G})=q(K_p) \Rightarrow ۲p+۲۵=\frac{p(p-۱)}{۲} \xrightarrow{\times ۲} ۴p+۵۰=p^۲-p \Rightarrow p^۲-۵p-۵۰=۰$

$\Rightarrow (p+۵)(p-۱۰)=۰ \xrightarrow{p>۰} p=۱۰$

از طرفی می‌دانیم برای هر $۱\le i\le p$: $|N[v_i]|=\deg(v_i)+۱=۴+۱=۵$

بنابراین داریم: $\sum_{i=۱}^{p}|N[v_i]|=\sum_{i=۱}^{۱۰}۵=۱۰\times ۵=۵۰$

یادت باشه که...

در هر گراف G با گراف مکمل $\overline{G}$ داریم:

$$q_G+q_{\overline{G}}=q(K_p)=\frac{p(p-۱)}{۲}$$

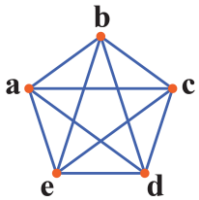
$$\deg_G(x)+\deg_{\overline{G}}(x)=p-۱$$

۴۰- اگر در گراف K_p هر یال با ۶ یال دیگر مجاور باشد، این گراف، چند زیرگراف ۲-منتظم دارد؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی/ترکیبی ـ استاندارد ـ گسسته صفحهٔ ۴۰ ـ ۱۲۰۲)

چون در گراف کامل داده‌شده، هر یال با ۶ یال دیگر مجاور است (سه یال از یک رأس و سه یال از رأس دیگر). پس از هر رأس باید ۴ یال بگذرد یعنی یک گراف کامل $K_۵$ داریم.



حال در این گراف زیرگراف‌های ۲-منتظم را می‌یابیم. در واقع کافی است تعداد دورهای ممکن در این گراف را پیدا کنیم:

۱) دو منتظم از مرتبهٔ ۵:

$\Rightarrow \binom{۵}{۵}\frac{۴!}{۲}=۱۲$

۲) دو منتظم از مرتبهٔ ۴:

$\Rightarrow \binom{۵}{۴}\frac{۳!}{۲}=۱۵$

۳) دو منتظم از مرتبهٔ ۳:

$\Rightarrow \binom{۵}{۳}\frac{۲!}{۲}=۱۰$

بنابراین مجموعاً $۱۲+۱۵+۱۰=۳۷$ زیرگراف ۲-منتظم وجود دارد.

رأس‌ها و یال‌های مجاور

۱) دو رأس a و b را مجاور می‌گوییم اگر یالی وجود داشته باشد که a را به b وصل کند، یعنی a و b مجاورند اگر یال ab در مجموعهٔ یال‌های گراف باشد.

۲) دو یال $e_۱$ و $e_۲$ را مجاور می‌گوییم اگر رأسی وجود داشته باشد که هر دو یال به آن متصل شده باشند.

WWW.ArefOnline.ir

بودجه‌بندی این آزمون: فیزیک ۳: فصل‌های ۱ تا ۳ (تا ابتدای موج و انواع آن) - صفحه‌های ۱ تا ۶۹

سهم در کنکور: پایهٔ دوازدهم: درمجموع ۹ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

برای دیدن پاسخ‌نامهٔ ویدئویی آزمون بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید! QR Code

۴۱- متحرکی در لحظهٔ $t=۰$ از مبدأ مختصات بر روی یک خط راست شروع به حرکت می‌کند. اگر تندی متوسط این متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش برابر با $۲\frac{m}{s}$ باشد و متحرک در این بازهٔ زمانی، تنها در مکان‌های $x_۱=۱۰m$ و $x_۲=۸m$ هر کدام یک بار تغییر جهت بدهد، سرعت متوسط این متحرک در این بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱/۴ ۲) ۱/۵ ۳) ۱/۶ ۴) ۱/۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

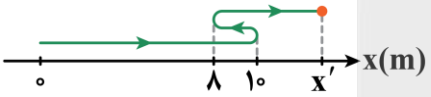
کام اول

مسافت طی‌شده توسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش برابر است با:

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}\Rightarrow ۲=\frac{L}{۱۰}\Rightarrow L=۲۰m$$

کام دوم

مسیر حرکت متحرک را در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که مسافت طی‌شده توسط متحرک در این بازهٔ زمانی، ۲۰m است، x' را به‌دست می‌آوریم:

$$L=|۱۰-۰|+|۸-۱۰|+|x'-۸|=۲۰\Rightarrow ۲۰=۱۰+۲+|x'-۸|\Rightarrow |x'-۸|=۸$$

$$\xrightarrow{x'>۸} x'-۸=۸\Rightarrow x'=۱۶m$$

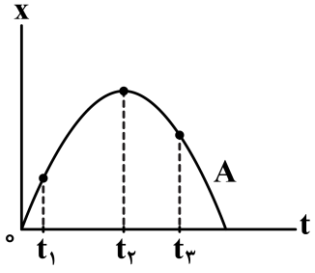
کام آخر

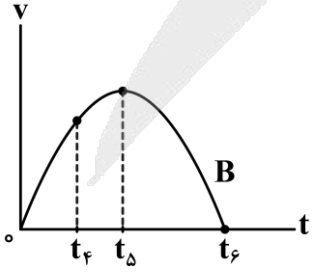
سرعت متوسط متحرک در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکتش برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow[\Delta t=۱۰s]{\Delta x=x'-۰=۱۶m} v_{av}=\frac{۱۶}{۱۰}=۱/۶\frac{m}{s}$$

ماز

۴۲- نمودار مکان ـ زمان متحرک A و نمودار سرعت ـ زمان متحرک B مطابق شکل‌های زیر هستند. کدام‌یک از گزینه‌های زیر صحیح است؟





۱) تندی متحرک A در لحظهٔ $t_۲$ بیش‌تر از سایر لحظه‌ها است.

۲) تندی متحرک B در لحظهٔ $t_۶$ بیش‌تر از سایر لحظه‌ها است.

۳) متحرک B در لحظهٔ $t_۵$ در بیش‌ترین فاصله از محل شروع حرکت قرار دارد.

۴) متحرک A در لحظهٔ $t_۲$ در بیش‌ترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد.

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

نمودار رسم‌شده برای متحرک A، نمودار **مکان ـ زمان** است. طبق این نمودار، در لحظهٔ t_2، متحرک در بیش‌ترین فاصله از مبدأ مکان قرار دارد.

بررسی گزینه‌های نادرست:

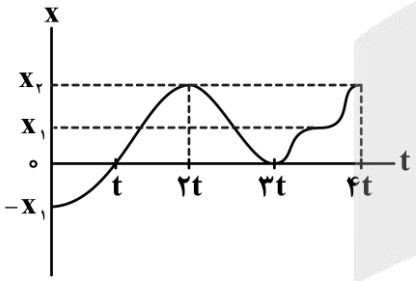
۱) تندی متحرک A در لحظهٔ t_2 برابر صفر است و با توجه به شیب خط مماس بر نمودار می‌توان گفت که تندی متحرک A در لحظهٔ t_1 بیش‌تر از سایر لحظه‌های نشان داده شده است.

۲) در لحظهٔ t_4 نمودار $v-t$ با محور t برخورد کرده؛ بنابراین تندی متحرک B در این لحظه برابر صفر است و تندی متحرک B در لحظهٔ t_5 بیش‌تر از سایر لحظه‌های نشان داده شده است.

۳) متحرک B در لحظهٔ t_5 بیش‌ترین تندی را دارد ولی فاصلهٔ آن از محل شروع حرکت در لحظهٔ t_4 بیشینه می‌شود.

ماز

۴۳- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط این متحرک در بازهٔ زمانی t تا ۴t، سه برابر سرعت متوسط آن در کل زمان حرکت باشد، نسبت $\frac{x_2}{x_1}$ در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟



۱) $\frac{5}{3}$
۲) $\frac{3}{2}$
۳) ۳
۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳ ـ ۱۲۰۱)

کلم اول

تندی متوسط متحرک در بازهٔ زمانی t تا ۴t برابر است با:

$$s_{av}=\frac{L}{\Delta t}=\frac{3x_2}{3t}=\frac{x_2}{t}$$

کلم دوم

سرعت متوسط متحرک در کل زمان حرکت برابر است با:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{x_2-(-x_1)}{4t}=\frac{x_2+x_1}{4t}$$

کلم آخر

با توجه به این‌که تندی متوسط در بازهٔ زمانی t تا ۴t، ۳ برابر سرعت متوسط کل حرکت است، خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$$s_{av}=3v_{av}\Rightarrow\frac{x_2}{t}=3\left[\frac{x_2+x_1}{4t}\right]\Rightarrow 4x_2=3x_2+3x_1\Rightarrow x_2=3x_1$$

$$\Rightarrow\frac{x_2}{x_1}=3$$

WWW.ArefOnline.ir

سرعت متوسط و تندی متوسط

۱- با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان حرکت، تندی متوسط حرکت به‌دست می‌آید:

$$s_{av} = \frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

۲- با تقسیم جابه‌جایی بر زمان حرکت، سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\text{بردار جابه‌جایی}}{\text{زمان}} = \frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

نکات

۱- تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط، کمیتی برداری است.

۲- اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است. هنگامی این دو کمیت هم‌اندازه هستند که متحرک روی مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت کند.

۳- در حرکت بر روی محور x برای محاسبهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط داریم:

$$\vec{d} = \Delta\vec{x} = \vec{x}_2 - \vec{x}_1 \Rightarrow \vec{v}_{av} = \frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

۴۴- متحرکی با سرعت ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند و در ۵ ثانیهٔ nاُم حرکتش، مسافت ۲۰m را طی می‌کند. به‌ترتیب از راست به چپ، متحرک در ۲ ثانیهٔ سوم حرکت خود، چند متر را طی می‌کند و مدت‌زمان لازم برای این‌که متحرک از ۲۰ متری مبدأ مکان به ۳۰ متری مبدأ مکان برسد، چند ثانیه می‌تواند باشد؟

۱) ۱۰ ،۱۲ ۲) ۱۲/۵ ،۱۲ ۳) ۱۰ ،۸ ۴) ۱۲/۵ ،۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

کلام اول

در حرکت با سرعت ثابت، مسافت طی‌شده در T ثانیه‌های متوالی، برابر است. درنتیجه اندازهٔ سرعت این متحرک برابر با $|v| = \frac{۲۰}{۵} = ۴\frac{m}{s}$ است. مسافت طی‌شده در دو ثانیهٔ سوم برابر است با:

$$L = |v|\Delta t = ۴ \times ۲ = ۸m$$

کلام آخر

اگر فرض کنیم متحرک در جهت محور x حرکت می‌کند، آنگاه دو حالت پیش می‌آید که در آن مدت‌زمان حرکت متحرک، متفاوت است.

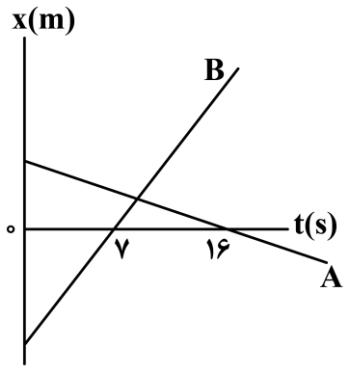
حالت اول: $\begin{cases} x_1 = -۲۰m \\ x_2 = +۳۰m \end{cases} \Rightarrow \Delta t = \frac{\Delta x}{v} = \frac{۵۰}{۴} = ۱۲/۵s$

حالت دوم: $\begin{cases} x'_1 = +۲۰m \\ x'_2 = +۳۰m \end{cases} \Rightarrow \Delta t' = \frac{\Delta x'}{v} = \frac{۱۰}{۴} = ۲/۵s$

درنتیجه با توجه به گزینه‌ها، $\Delta t = ۱۲/۵s$ صحیح است.

WWW.ArefOnline.ir

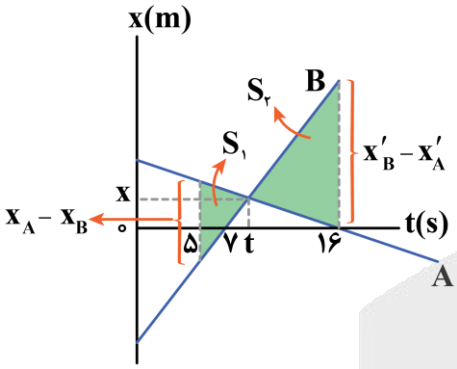
۴۵- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متحرک B، ۲ برابر تندی متحرک A و فاصلهٔ دو متحرک نسبت به یکدیگر در لحظهٔ $t=5s$ برابر با ۷۵m باشد، فاصلهٔ آن‌ها نسبت به یکدیگر در لحظهٔ $t=16s$ چند متر است؟



۱) ۸۵
۲) ۹۰
۳) ۹۵
۴) ۱۱۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۳ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که نمودار مکان ـ زمان هر دو متحرک، خط راست است، حرکت هر دو متحرک با سرعت ثابت است و شیب هر نمودار، برابر سرعت متحرک است. با توجه به این‌که تندی متحرک B، ۲ برابر تندی متحرک A است، طبق تعریف شیب خط، داریم:



$$v_B=2v_A \Rightarrow \frac{x}{t-7}=2\left(\frac{x}{16-t}\right)$$

$$\Rightarrow 2t-14=16-t \Rightarrow 3t=30 \Rightarrow t=10s$$

اکنون با استفاده از تشابه دو مثلث S_1 و S_2، داریم:

$$\frac{x_A-x_B}{t-5}=\frac{x'_B-x'_A}{16-t} \xrightarrow[t=10s]{x_A-x_B=75m} \frac{75}{5}=\frac{x'_B-x'_A}{6}$$

$$\Rightarrow x'_B-x'_A=90m$$

$x'_B-x'_A$، همان فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر در لحظهٔ $t=16s$ است.

۴۶- متحرکی با شتاب ثابت بر روی محور x در مدت‌زمان ۶s از نقطهٔ A به نقطهٔ B می‌رسد. اگر سرعت متحرک در لحظه‌های عبور از نقطه‌های A و B به‌ترتیب برابر با $(5\frac{m}{s})\vec{i}$ و $(-11\frac{m}{s})\vec{i}$ باشد، فاصلهٔ بین نقاط A و B چند متر است؟

۱) ۳۶
۲) ۳۰
۳) ۴۸
۴) ۱۸

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

از معادلهٔ مستقل از شتاب استفاده می‌کنیم:

$$\Delta x=\frac{v_1+v_2}{2}\Delta t \Rightarrow \Delta x=\frac{5+(-11)}{2}\times 6=-18m$$

بنابراین فاصلهٔ بین نقاط A و B برابر با ۱۸m است.

نکته

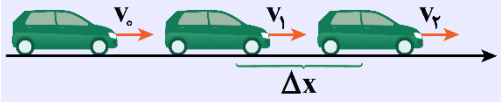
در حرکت با شتاب ثابت، سرعت متحرک با زمان به‌صورت خطی تغییر می‌کند؛ پس تغییرات v نسبت به t به‌صورت یک تابع خطی است، به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}} v_{av}=\frac{v_1+v_2}{2}$$

WWW.ArefOnline.ir

معادلهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت

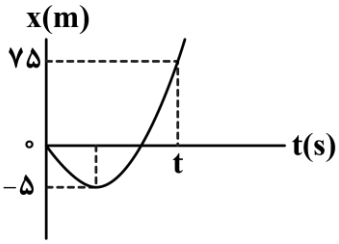
در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2}\Delta t$$

ماز

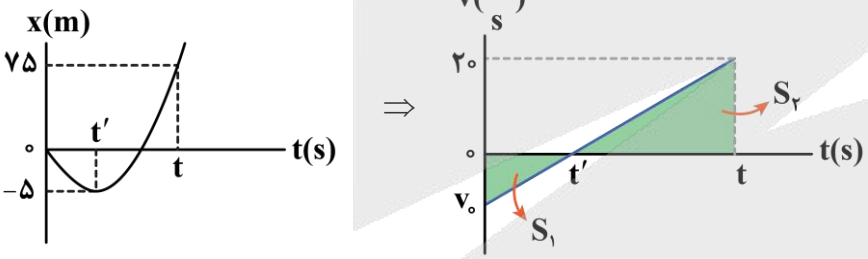
۴۷- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر، بخشی از یک سهمی است. اگر در لحظهٔ t، سرعت متحرک برابر با $20\frac{m}{s}$ باشد، در بازهٔ زمانی صفر تا t، متحرک چند ثانیه در جهت محور x حرکت کرده است؟



۱) ۴
۲) ۶
۳) ۸
۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

توجه کنید که در رأس سهمی نمودار مکان ـ زمان، متحرک تغییر جهت می‌دهد و همچنین متحرک در لحظهٔ $t = 0$ در خلاف جهت محور xها شروع به حرکت می‌کند؛ بنابراین سرعت اولیهٔ آن منفی است، درنتیجه نمودار سرعت ـ زمان این متحرک به شکل زیر می‌باشد:



از طرفی با توجه به نمودار مکان ـ زمان، جابه‌جایی متحرک در بازه‌های زمانی صفر تا t' و t' تا t برابر است با:

$$\Delta x_1 = -5 - 0 = -5m$$

$$\Delta x_2 = 75 - (-5) = 80m$$

می‌دانیم مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازهٔ زمانی است؛ بنابراین اندازهٔ مساحت مثلث‌های S_1 و S_2 به‌ترتیب برابر با $5m$ و $80m$ می‌باشد. با توجه به این‌که مثلث‌های S_1 و S_2 متشابه‌اند، می‌توان نوشت:

$$\frac{S_1}{S_2} = \left(\frac{t'}{t-t'}\right)^2 \Rightarrow \frac{\cancel{5}^{1}}{\cancel{80}_{16}} = \left(\frac{t'}{t-t'}\right)^2 \xrightarrow{\text{جذر می‌گیریم}} \frac{1}{4} = \frac{t'}{t-t'}$$

$$\Rightarrow t - t' = 4t' \Rightarrow t = 5t'$$

از طرفی با توجه به مساحت S_2، داریم:

$$S_2 = \frac{(t-t')\times 20}{2} \Rightarrow 80 = 4t' \times 10 \Rightarrow t' = 2s \Rightarrow t = 10s$$

متحرک در بازهٔ زمانی $t' = 2s$ تا $t = 10s$، یعنی به مدت $8s$ در جهت محور x حرکت می‌کند.

ماز

WWW.ArefOnline.ir

۴۸- متحرکی با شتاب ثابت، بر روی خط راست حرکت می‌کند. اگر تندی این متحرک در لحظه‌های $t_1 = 3s$ و $t_2 = 9s$ برابر با $18\frac{m}{s}$ باشد، اندازهٔ آهنگ تغییر سرعت آن چند واحد SI است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

با توجه به این‌که متحرک با شتاب ثابت بر روی خط راست حرکت می‌کند و تندی آن در دو لحظهٔ متفاوت، یکسان است، درمی‌یابیم در یکی از لحظات، سرعت متحرک برابر با $18\frac{m}{s}$ و در لحظهٔ دیگر سرعت متحرک برابر با $-18\frac{m}{s}$ است؛ بنابراین اندازهٔ تغییر سرعت برابر است با:

$$|\Delta v| = |18 - (-18)| = 36\frac{m}{s}$$

درنتیجه اندازهٔ آهنگ تغییر سرعت متحرک (مقدار شتاب) برابر است با:

$$|a| = \frac{|\Delta v|}{\Delta t} \Rightarrow |a| = \frac{36}{9-3} = \frac{36}{6} = 6\frac{m}{s^2}$$

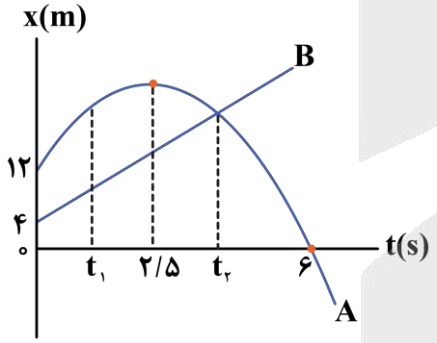
ماز

۴۹- معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک A و B که بر روی محور x حرکت می‌کنند، در SI به‌صورت $x_A = -2t^2 + 10t + 12$ و $x_B = 4t + 4$ است. تندی متوسط متحرک A در مدت‌زمانی که دو متحرک درحال نزدیک شدن به یکدیگر هستند، چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱/۳ ۲) ۲/۶ ۳) ۳/۹ ۴) ۵/۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

کلم اول



نمودار مکان ـ زمان حرکت دو متحرک را رسم می‌کنیم:

$$x_A = -2t^2 + 10t + 12 = -2(t+1)(t-6) \Rightarrow \begin{cases} t = 6s \Rightarrow x_A = 0 \\ t_{رأس} = \frac{-10}{-2\times 2} = 2/5s \\ t = 0 \Rightarrow x_{0A} = 12m \end{cases}$$

$$x_B = 4t + 4 \xrightarrow{t=0} x_{0B} = 4m$$

با توجه به نمودار مکان ـ زمان دو متحرک درمی‌یابیم که در بازهٔ زمانی t_1 (لحظه‌ای که سرعت دو متحرک باهم برابر می‌شود) تا لحظهٔ t_2 (لحظه‌ای که مکان دو متحرک باهم برابر می‌شود)، دو متحرک درحال نزدیک شدن به یکدیگر هستند.

کلم دوم

با توجه به معادلهٔ $x - t$ متحرک A که یک معادلهٔ درجهٔ ۲ است، متوجه می‌شویم که متحرک A با شتاب ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین:

$$\begin{cases} x_A = -2t^2 + 10t + 12 \\ x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \end{cases} \Rightarrow a_A = -4\frac{m}{s^2},\ v_{0A} = 10\frac{m}{s}$$

بنابراین معادلهٔ سرعت ـ زمان متحرک A برابر است با:

$$v_A = a_A t + v_{0A} \xrightarrow[v_{0A}=10\frac{m}{s}]{a_A=-4\frac{m}{s^2}} v_A = -4t + 10$$

WWW.ArefOnline.ir

از طرفی با توجه به معادلهٔ $x-t$ متحرک B که یک معادلهٔ درجهٔ اول است، متوجه می‌شویم که متحرک B با سرعت ثابت حرکت می‌کند؛ بنابراین:

$$\begin{cases} x_B = ۴t + ۴ \\ x = vt + x_۰ \end{cases} \Rightarrow v_B = ۴\frac{m}{s}$$

در لحظهٔ $t_۱$ سرعت دو متحرک با یکدیگر برابر شده است؛ بنابراین:

$$v_A = v_B \Rightarrow -۴t_۱ + ۱۰ = ۴ \Rightarrow -۴t_۱ = -۶ \Rightarrow t_۱ = ۱/۵s$$

گام سوم

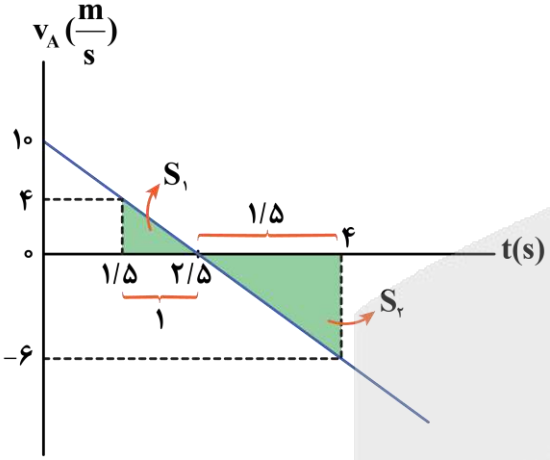
در لحظهٔ $t_۲$ مکان دو متحرک، برابر می‌شود؛ بنابراین:

$$x_A = x_B \Rightarrow -۲t_۲^۲ + ۱۰t_۲ + ۱۲ = ۴t_۲ + ۴$$

$$\Rightarrow ۲t_۲^۲ - ۶t_۲ - ۸ = ۰ \Rightarrow ۲(t_۲ + ۱)(t_۲ - ۴) = ۰ \Rightarrow t_۲ = ۴s$$

گام آخر

نمودار سرعت ـ زمان متحرک A را رسم می‌کنیم:



$$v_A = -۴t + ۱۰ \Rightarrow \begin{cases} t_۱ = ۱/۵s \Rightarrow v_۱ = ۴\frac{m}{s} \\ t_۲ = ۴s \Rightarrow v_۲ = -۶\frac{m}{s} \\ t = ۰ \Rightarrow v_۰ = ۱۰\frac{m}{s} \\ v = ۰ \Rightarrow t = ۲/۵s \end{cases}$$

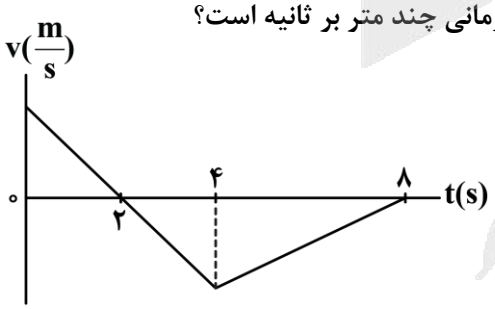
می‌دانیم مجموع قدر مطلق مساحت‌های زیر نمودار $v-t$ برابر با مسافت طی‌شده توسط متحرک است؛ بنابراین:

$$\ell_{A_{(۱/۵-۴)}} = |S_۱| + |S_۲| = \frac{۱\times۴}{۲} + \frac{۱/۵\times۶}{۲} = ۲ + ۴/۵ = ۶/۵m$$

$$s_{av_{A_{(۱/۵-۴)}}} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{۶/۵}{۴-۱/۵} = \frac{۶/۵}{۲/۵} = ۲/۶\frac{m}{s}$$

ماز

۵۰- نمودار سرعت ـ زمان یک متحرک که بر روی خط راست حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. اگر تندی متوسط این متحرک در ۸ ثانیهٔ اول حرکتش برابر با $۵\frac{m}{s}$ باشد، بزرگی سرعت متوسط آن در همین بازهٔ زمانی چند متر بر ثانیه است؟



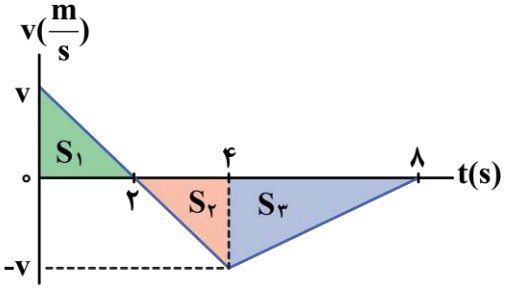
۱) ۱/۵
۲) ۲/۵
۳) ۳
۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۵ ـ ۱۲۰۱)

اگر فرض کنیم متحرک در لحظهٔ $t=۰$ با تندی v شروع به حرکت کند، با توجه به این‌که مثلث‌های $S_۱$ و $S_۲$ کاملاً هم‌نهشت هستند؛ بنابراین تندی متحرک در لحظهٔ $t=۴s$ نیز برابر با v است.

WWW.ArefOnline.ir

از طرفی با توجه به این‌که مجموع قدر مطلق مساحت‌های سطح زیر نمودار $v-t$ برابر با مسافت طی‌شده است، داریم:



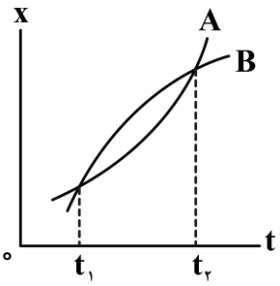
$$\begin{cases} S_۱ = \frac{۱}{۲}[۲\times v] = v \\ S_۲ = -\frac{۱}{۲}[۲\times v] = -v \\ S_۳ = -\frac{۱}{۲}[۴\times v] = -۲v \end{cases}$$

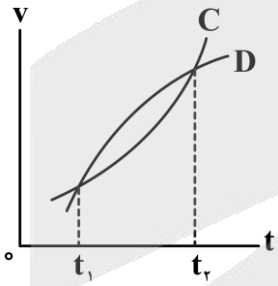
$$\Rightarrow s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|S_۱|+|S_۲|+|S_۳|}{\Delta t} \xrightarrow{s_{av}=۵\frac{m}{s}} ۵ = \frac{v+v+۲v}{۸} \Rightarrow v = ۱۰\frac{m}{s}$$

سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی $t=۰$ تا $t=۸s$ برابر است با:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{|v-v-۲v|}{۸} = \frac{|-۲\times ۱۰|}{۸} = ۲/۵\frac{m}{s}$$

۵۱- نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B و نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک C و D مطابق شکل‌های زیر می‌باشند. اگر هر چهار متحرک در لحظهٔ $t_۱$ در مکان یکسانی بر روی محور x باشند، چه تعداد از عبارت‌های زیر در ارتباط با آن‌ها در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ درست است؟





الف ـ شتاب متوسط متحرک A، هم‌جهت با شتاب متوسط متحرک B است.

ب ـ شتاب متوسط متحرک C، برابر با شتاب متوسط متحرک D است.

ج ـ تندی متوسط متحرک A از متحرک B بیش‌تر است.

د ـ فاصلهٔ متحرک C از متحرک D ابتدا افزایش و سپس کاهش می‌یابد.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۷ ـ ۱۲۰۱)

بررسی موارد:

(الف)

در نمودار مکان ـ زمان، تقعر نمودار بیانگر علامت شتاب حرکت است. تقعر نمودار A به سمت بالا است؛ بنابراین شتاب متوسط آن مثبت است و تقعر نمودار B به سمت پایین است؛ بنابراین شتاب متوسط آن منفی است. (✗)

(ب)

از آنجایی‌که در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$، سرعت‌های ابتدایی و انتهایی متحرک C برابر با متحرک D می‌باشد، درنتیجه طبق رابطهٔ $a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t}$ شتاب متوسط دو متحرک، برابر می‌باشد. (✓)

(ج)

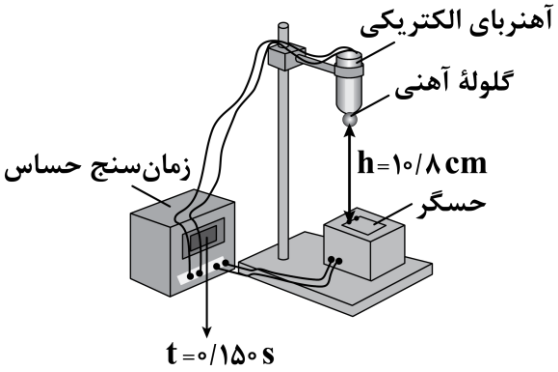
متحرک‌های A و B در بازهٔ زمانی $t_۱$ تا $t_۲$ هر دو مسافت یکسانی را طی کرده‌اند (چون دارای مبدأ و مقصد مشترک هستند و تغییر جهت حرکت نیز نداده‌اند)، درنتیجه تندی متوسط آن‌ها با یکدیگر برابر است. (✗)

WWW.ArefOnline.ir

در نمودار سرعت ـ زمان، مساحت بین نمودار دو متحرک بیانگر جابه‌جایی آن‌ها نسبت به یکدیگر است. چون با گذشت زمان در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، اندازهٔ این مساحت همواره درحال افزایش است و مکان متحرک در لحظهٔ t_1 یکسان است؛ بنابراین فاصلهٔ متحرک C از متحرک D همواره درحال افزایش است. (✗)

ماز

۵۲- شکل زیر، اسباب انجام آزمایش ساده‌ای را نشان می‌دهد که به کمک آن می‌توان شتاب گرانش را در محل آزمایش اندازه گرفت. اندازهٔ شتاب گرانش در محل آزمایش چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۹/۶
۲) ۹/۸
۳) ۱۰
۴) ۱۰/۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ⏲ ـ صفحهٔ ۲۴ ـ ۱۲۰۱)

با استفاده از معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta y = -\frac{1}{2}gt^2 \Rightarrow -10/8\times10^{-2} = -\frac{1}{2}g\times(0/15)^2$$

$$\Rightarrow g = \frac{2\times10/8\times10^{-2}}{15\times15\times10^{-4}} = 9/6\,\frac{m}{s^2}$$

ماز

۵۳- در شرایط خلأ، دو گلولهٔ A و B به‌ترتیب در ارتفاع‌های ۸۰m و ۳۵m از سطح زمین قرار دارند. ابتدا گلولهٔ A را رها می‌کنیم و گلولهٔ B را زمانی رها می‌کنیم که گلولهٔ A هم‌ارتفاع با آن شده باشد. در لحظه‌ای که گلولهٔ A به سطح زمین می‌رسد، گلولهٔ B در ارتفاع چند متری سطح زمین می‌باشد؟ $(g=10\,\frac{m}{s^2})$

۱) ۱۰
۲) ۵
۳) ۳۰
۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ⏲ ـ صفحهٔ ۲۲ ـ ۱۲۰۱)

ابتدا لحظهٔ رها شدن گلولهٔ B، یعنی لحظه‌ای که گلولهٔ A به ارتفاع ۳۵ متری سطح زمین می‌رسد را به‌دست می‌آوریم:

$$y_A = -\frac{1}{2}gt_A^2 + y_{0A} \Rightarrow y_A = -5t^2 + 80 \xrightarrow{y_A=35\,m} 35 = -5t^2 + 80 \Rightarrow t = 3s$$

پس گلولهٔ B، ۳s پس از رها شدن گلولهٔ A، رها می‌شود.

مدت‌زمان رسیدن گلولهٔ A به زمین برابر است با:

$$y_A = -5t_A^2 + 80 \Rightarrow 0 = -5t_A^2 + 80 \Rightarrow t_A = 4s$$

که در این لحظه گلولهٔ B در انتهای ثانیهٔ اول حرکت خود می‌باشد که مکان آن برابر است با:

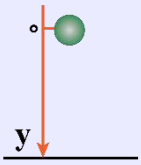
$$y_B = -\frac{1}{2}gt_B^2 + y_{0B} \Rightarrow y_B = -5t_B^2 + 35 \xrightarrow{t_B=1s} y_B = -5(1)^2 + 35 = 30m$$

WWW.ArefOnline.ir

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند، درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد می‌گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رهاشدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین فرض می‌کنیم:



در این صورت علامت شتاب، مکان و سرعت در هرلحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رهاشدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y = \frac{1}{2}gt^2 + v_0 t + y_0 \xrightarrow[v_0=0]{y_0=0} y = \frac{1}{2}gt^2$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v = gt + v_0 \xrightarrow{v_0=0} v = gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v^2 - v_0^2 = 2g\Delta y \xrightarrow[y_0=0]{v_0=0} v^2 = 2gy$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av} = \frac{1}{2}gt$$

تکنیک دهدهی: اگر گلوله‌ای را در شرایط خلأ و بدون سرعت اولیه از ارتفاع معینی رها کنیم و $g = 10\frac{m}{s^2}$ باشد، گلوله در ثانیهٔ اول ۵ متر، در ثانیهٔ دوم ۱۵ متر، در ثانیهٔ سوم ۲۵ متر و ... جابه‌جا می‌شود. همچنین تندی گلوله در لحظهٔ ۱s، $10\frac{m}{s}$، در لحظهٔ ۲s، $20\frac{m}{s}$، در لحظهٔ ۳s، $30\frac{m}{s}$ و ... است.

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۴

۴۵- از نقطه‌ای به ارتفاع h هر دو ثانیه یک گلوله رها می‌شود. اگر در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به زمین برسد، در این لحظه گلولهٔ دوم از ارتفاع چندمتری عبور می‌کند؟ ($g = 10\frac{m}{s^2}$ و مقاومت هوا ناچیز است.)

۱) ۲۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

پاسخ تشریحی:

در لحظهٔ رهاشدن گلولهٔ سوم، گلولهٔ اول به زمین می‌رسد؛ بنابراین زمان سقوط گلولهٔ A برابر است با:

$$t_A = 2 + 2 = 4s$$

ارتفاع h را به کمک رابطهٔ $h = \frac{1}{2}gt^2$ به‌دست می‌آوریم:

$$h_A = \frac{1}{2}gt_A^2 \Rightarrow h_A = \frac{1}{2}\times 10 \times 4^2 = 80m$$

در لحظهٔ رسیدن گلولهٔ اول به زمین، از سقوط گلولهٔ دوم، ۲s می‌گذرد. در این مدت مسافت سقوط آن برابر است با:

$$\Delta y_B = \frac{1}{2}gt_B^2 = \frac{1}{2}\times 10 \times 2^2 = 20m$$

درنتیجه در این لحظه گلولهٔ دوم از ارتفاع ۸۰m، به‌اندازهٔ ۲۰m پایین آمده و در ارتفاع $h_B = h - \Delta y_B = 80 - 20 = 60m$ قرار دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

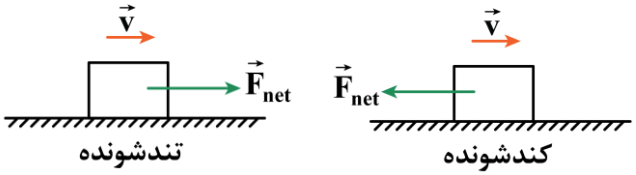
WWW.ArefOnline.ir

۵۴- اگر نیروی خالص وارد بر جسمی در جهت حرکت جسم و اندازهٔ آن درحال کاهش باشد، نوع حرکت جسم، .....؛ و اگر نیروی خالص وارد بر جسمی در خلاف جهت حرکت جسم و اندازهٔ آن درحال افزایش باشد، نوع حرکت جسم، ..... خواهد بود.

۱) تندشونده ـ کندشونده ۲) کندشونده ـ تندشونده ۳) تندشونده ـ تندشونده ۴) کندشونده ـ کندشونده

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

مطابق شکل‌های مقابل، اگر نیروی خالص وارد بر جسمی در جهت حرکت جسم (درحال کاهش یا افزایش) باشد، نوع حرکت جسم، تندشونده و اگر نیروی خالص وارد بر جسمی در خلاف جهت حرکت جسم (درحال کاهش یا افزایش) باشد، نوع حرکت جسم، کندشونده خواهد بود.



۵۵- سه نیروی ۱۰، ۱۲ و ۱۶ نیوتونی، تنها نیروهایی هستند که به‌صورت هم‌زمان بر جسمی به جرم m وارد شده‌اند و جسم درحال تعادل قرار دارد. اگر فقط جهت یکی از آن‌ها را قرینه کنیم، بزرگی حداکثر شتاب حرکت جسم چند برابر بزرگی حداقل شتاب حرکت جسم می‌شود؟

۱) $\frac{۸}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۳}$ ۳) $\frac{۱۴}{۱۱}$ ۴) $\frac{۱۳}{۱۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

تحت اثر این سه نیرو، جسم در حالت تعادل قرار دارد، پس می‌توانیم نتیجه بگیریم که این سه نیرو متوازن هستند:

$$\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۳=۰\Rightarrow -\vec{F}_۱=\vec{F}_۲+\vec{F}_۳ \quad یا \quad -\vec{F}_۲=\vec{F}_۱+\vec{F}_۳ \quad یا \quad -\vec{F}_۳=\vec{F}_۱+\vec{F}_۲$$

گام دوم

۱) اگر جهت نیروی $\vec{F}_۱$ را برعکس کنیم:

$$F_{net_۱}=ma_۱\Rightarrow\left|-\vec{F}_۱+\vec{F}_۲+\vec{F}_۳\right|=ma_۱\xrightarrow{\vec{F}_۲+\vec{F}_۳=-\vec{F}_۱}\left|-\vec{F}_۱-\vec{F}_۱\right|=ma_۱\Rightarrow ۲F_۱=ma_۱$$

$$\Rightarrow a_۱=\frac{۲F_۱}{m}\xrightarrow{F_۱=۱۰N}a_۱=\frac{۲۰}{m}$$

۲) اگر جهت نیروی $\vec{F}_۲$ را برعکس کنیم:

$$F_{net_۲}=ma_۲\Rightarrow\left|\vec{F}_۱-\vec{F}_۲+\vec{F}_۳\right|=ma_۲\xrightarrow{\vec{F}_۱+\vec{F}_۳=-\vec{F}_۲}\left|-\vec{F}_۲-\vec{F}_۲\right|=ma_۲\Rightarrow ۲F_۲=ma_۲$$

$$\Rightarrow a_۲=\frac{۲F_۲}{m}\xrightarrow{F_۲=۱۲N}a_۲=\frac{۲۴}{m}$$

۳) اگر جهت نیروی $\vec{F}_۳$ را برعکس کنیم:

$$F_{net_۳}=ma_۳\Rightarrow\left|\vec{F}_۱+\vec{F}_۲-\vec{F}_۳\right|=ma_۳\xrightarrow{\vec{F}_۱+\vec{F}_۲=-\vec{F}_۳}\left|-\vec{F}_۳-\vec{F}_۳\right|=ma_۳\Rightarrow ۲F_۳=ma_۳$$

$$\Rightarrow a_۳=\frac{۲F_۳}{m}\xrightarrow{F_۳=۱۶N}a_۳=\frac{۳۲}{m}$$

WWW.ArefOnline.ir

کلام آخر

بزرگی حداکثر شتاب حرکت جسم، $a_{۳}=\frac{۳۲}{m}$ و بزرگی حداقل شتاب حرکت جسم، $a_{۱}=\frac{۲۰}{m}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\frac{a_{max}}{a_{min}}=\frac{a_{۳}}{a_{۱}}=\frac{\frac{۳۲}{m}}{\frac{۲۰}{m}}=\frac{۸}{۵}$$

راهنمای زرنگ‌بازی

چون سه نیروی $\vec{F}_{۱}$، $\vec{F}_{۲}$ و $\vec{F}_{۳}$ متوازن‌اند $(\vec{F}_{۱}+\vec{F}_{۲}+\vec{F}_{۳}=۰)$، پس با تغییر جهت هر یک از نیروها، بزرگی برایند نیروها، دو برابر بزرگی نیرویی می‌شود که جهت آن قرینه شده است. پس بیش‌ترین شتاب مربوط به حالتی است که بزرگ‌ترین نیرو تغییر جهت می‌دهد و کم‌ترین شتاب نیز مربوط به حالتی است که کوچک‌ترین نیرو تغییر جهت دهد. از طرفی هم، چون جرم جسم، ثابت است، پس شتاب با نیروی برایند وارد بر جسم متناسب بوده و داریم:

$$\left.\begin{array}{l}a_{max}\propto ۱۶N \text{ : نیروی ۱۶ نیوتونی تغییر جهت دهد.}\\ a_{min}\propto ۱۰N \text{ : نیروی ۱۰ نیوتونی تغییر جهت دهد.}\end{array}\right\}\Rightarrow\frac{a_{max}}{a_{min}}=\frac{۱۶}{۱۰}=\frac{۸}{۵}$$

ماز

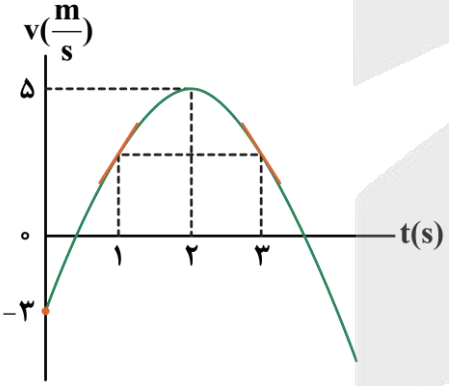
۵۶- معادلهٔ سرعت ـ زمان جسمی به جرم ۲kg که بر روی محور x در حال حرکت است، در SI به‌صورت $v=-۲t^{۲}+۸t-۳$ است. اگر بزرگی شتاب حرکت جسم در لحظهٔ $t=۱s$ برابر با $۴\frac{m}{s^{۲}}$ باشد، بردار نیروی خالص وارد بر متحرک در لحظهٔ $t=۳s$ برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟

۱) $+۴\vec{i}$ ۲) $+۸\vec{i}$ ۳) $-۸\vec{i}$ ۴) $-۴\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ⏱ ـ صفحهٔ ۳۳ ـ ۱۲۰۲)

کلام اول

ابتدا نمودار سرعت ـ زمان جسم را رسم می‌کنیم:



$$v=-۲t^{۲}+۸t-۳\Rightarrow\begin{cases}t_{\text{رأس}}=\frac{-b}{۲a}=\frac{-۸}{۲(-۲)}=۲s\\ v_{\text{رأس}}=-۲(۲)^{۲}+۸(۲)-۳=+۵\frac{m}{s}\end{cases}$$

کلام دوم

می‌دانیم شیب خط مماس بر نمودار $v-t$ در هر لحظه برابر با شتاب متحرک در آن لحظه است. از طرفی چون لحظات $t=۱s$ و $t=۳s$ نسبت به لحظهٔ رأس سهمی $(t=۲s)$، متقارن هستند، پس شیب خط مماس بر نمودار سهمی در این دو لحظه باید قرینهٔ هم باشند؛ بنابراین داریم:

$$|a_{۱s}|=۴\frac{m}{s^{۲}}\xrightarrow{\text{با توجه به نمودار، شیب مماس در لحظهٔ } t=۱s \text{ مثبت است.}}a_{۱s}=+۴\frac{m}{s^{۲}}$$

$$\xrightarrow{a_{۳s}=-a_{۱s}}a_{۳s}=-۴\frac{m}{s^{۲}}\Rightarrow\vec{a}_{۳s}=(-۴\frac{m}{s^{۲}})\vec{i}$$

WWW.ArefOnline.ir

کام آخر

بردار نیروی خالص وارد بر متحرک در لحظهٔ $t = ۳s$ برابر است با:

$$(\vec{F}_{net})_{۳s} = m\vec{a}_{۳s} = (۲kg)\times(-۴\frac{m}{s^۲})\vec{i} = (-۸N)\vec{i}$$

ماز

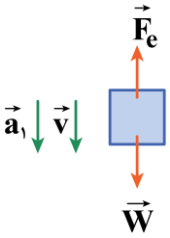
۵۷- فنر سبکی به طول $۲۵cm$ را به سقف آسانسوری بسته و از آن یک وزنهٔ ۴ کیلوگرمی آویزان می‌کنیم. در حالت اول، آسانسور با شتاب رو به پایین $۲\frac{m}{s^۲}$، پایین می‌آید و طول فنر به $۳۳cm$ می‌رسد. در حالت دوم آسانسور با شتاب رو به بالای $۳\frac{m}{s^۲}$ به حرکت رو به پایین خود ادامه می‌دهد. طول فنر در این حالت چند سانتی‌متر خواهد بود؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) ۳۸ ۲) ۳۲ ۳) ۴۰ ۴) ۳۴/۷۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

حالت اول

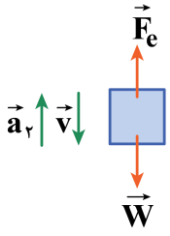
در حالت اول، نیروهای وارد به جسم را رسم کرده و با استفاده از قانون دوم نیوتون، ثابت فنر را محاسبه می‌کنیم:



$$W - F_e = ma$$
$$\Rightarrow F_e = m(g - a_۱) \Rightarrow kx = m(g - a_۱)$$
$$\Rightarrow k(۳۳ - ۲۵) = ۴\times(۱۰ - ۲) \Rightarrow k = ۴\frac{N}{cm}$$

حالت دوم

حال نیروهای وارد به جسم را در این حالت رسم کرده و با استفاده از قانون دوم نیوتون و معلوم بودن ثابت فنر، طول نهایی فنر را محاسبه می‌کنیم:



$$F_e - W = ma$$
$$\Rightarrow F_e = m(g + a_۲) \Rightarrow kx' = m(g + a_۲)$$
$$\Rightarrow ۴(L - ۲۵) = ۴\times(۱۰ + ۳) \Rightarrow L = ۳۸cm$$

نکته

برای حالتی که درون یک آسانسور، جسمی به جرم m از طناب یا فنر قائم آویزان است داریم:

آسانسور سقوط آزاد کند: $T = ۰ , F_e = ۰$

آسانسور ساکن باشد یا با سرعت ثابت حرکت کند: $T = mg , F_e = mg$

آسانسور با شتاب ثابت a که رو به بالاست حرکت کند: $T = m(g + |a|) , F_e = m(g + |a|)$

آسانسور با شتاب ثابت a که رو به پایین است حرکت کند: $T = m(g - |a|) , F_e = m(g - |a|)$

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

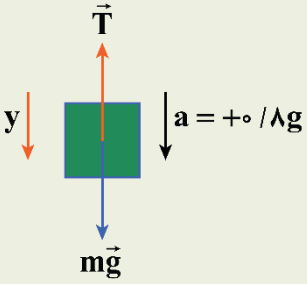
۴۸- جسمی از نخی آویزان است و با شتاب رو به پایین $۰/۸g$ در راستای قائم حرکت می‌کند. بزرگی نیروی کشش نخ چند برابر وزن جسم است؟

۱) $\frac{۹}{۵}$ ۲) $\frac{۶}{۵}$ ۳) $\frac{۴}{۵}$ ۴) $\frac{۱}{۵}$

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ تشریحی:

جهت مثبت محور را به سمت پایین درنظر می‌گیریم؛ به همین علت چون شتاب به سمت پایین است، پس علامت آن مثبت است.



$$F_{net} = ma \Rightarrow +mg - T = m(۰/۸g)$$

$$\Rightarrow T = \frac{۱}{۵}mg$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

۵۸- چتربازی به جرم $۸۰kg$ درحال سقوط به سمت پایین است. اگر در لحظه‌ای اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر آن $۹۶۰N$ باشد، کدام‌یک از گزینه‌های زیر در مورد حرکت چترباز پس از این لحظه تا رسیدن به زمین درست است؟ $(g = ۱۰\frac{N}{kg})$

۱) نوع حرکت چترباز تندشونده است.

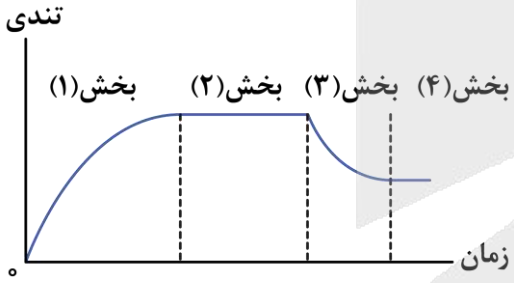
۲) اندازهٔ شتاب چترباز کم‌تر از $۲\frac{m}{s^۲}$ است.

۳) اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز درحال افزایش است.

۴) تندی چترباز تا رسیدن به تندی حدی افزایش می‌یابد و پس از آن ثابت می‌ماند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۶ ـ ۱۲۰۲)

با توجه به این‌که اندازهٔ نیروی مقاومت هوای وارد بر چترباز بزرگ‌تر از نیروی وزن است، طبق نمودار تندی ـ زمان مقابل برای حرکت چترباز، این چترباز در بخش (۳) از حرکت خود قرار دارد.



بررسی گزینه‌ها:

۱) با توجه به این‌که در بخش (۳) حرکت، نمودار به محور زمان نزدیک می‌شود، نوع حرکت، کندشونده است. (✗)

۲) در لحظهٔ موردنظر، اندازهٔ شتاب چترباز برابر است با:

$$|a| = \frac{|F_{net}|}{m} = \frac{|mg - f_D|}{m} = \frac{|۸۰۰ - ۹۶۰|}{۸۰} = ۲\frac{m}{s^۲}$$

از طرفی در بخش (۳) اندازهٔ شتاب درحال کاهش است؛ بنابراین اندازهٔ شتاب کم‌تر از $۲\frac{m}{s^۲}$ است. (✓)

۳) با توجه به کاهش تندی چترباز در بخش (۳)، اندازهٔ نیروی مقاومت هوا نیز کاهش می‌یابد. (✗)

۴) در بخش (۳) تندی چترباز تا رسیدن به تندی حدی کاهش می‌یابد. (✗)

WWW.ArefOnline.ir

حرکت چترباز

حرکت چترباز را در سه حالت مختلف بررسی می‌کنیم.

در همهٔ حالت‌ها فرض می‌کنیم چترباز روی مسیر مستقیم حرکت می‌کند و اثر باد و عوامل دیگر را درنظر نمی‌گیریم.

در تمامی حالت‌ها بر چترباز دو نیرو وارد می‌شود:

۱- نیروی وزن:

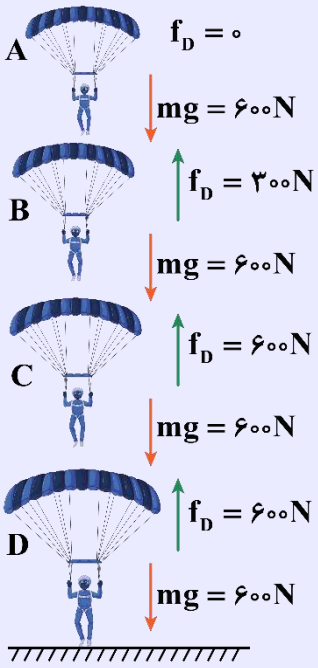
نیروی وزن همواره در راستای قائم به سمت پایین می‌باشد. مقدار نیروی وزن در کل مسیر حرکت را ثابت درنظر می‌گیریم.

۲- نیروی مقاومت هوا:

چون چترباز به سمت پایین حرکت می‌کند، نیروی مقاومت هوا خلاف جهت حرکت چترباز (همواره به سمت بالا) می‌باشد.

با افزایش تندی مقدار مقاومت هوا زیاد می‌شود.

زمانی که چترباز چترش را باز می‌کند به‌دلیل افزایش مساحت، نیروی مقاومت هوا نسبت به قبل به‌شدت افزایش می‌یابد و برای مدتی بزرگ‌تر از نیروی وزن می‌شود.



چترباز دو بار می‌تواند به تندی حدی برسد:

۱- قبل از بازشدن چتر و به کمک سطح بدنش (v_1)

۲- بعد از بازشدن چتر و به کمک سطح چتر (v_2)

$$v_2 < v_1 \Leftarrow \begin{cases} (v_1) \\ (v_2) \end{cases}$$

در حرکت چترباز نیروی مقاومت هوا به دو صورت می‌تواند تغییر کند:

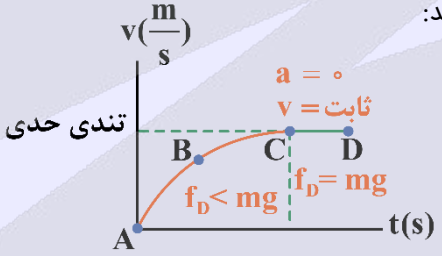
۱- اگر افزایش نیروی مقاومت هوا تدریجی باشد: افزایش مقاومت هوا به‌دلیل افزایش تندی است.

۲- اگر افزایش نیروی مقاومت هوا سریع انجام شود: افزایش مقاومت هوا به‌دلیل بازشدن چتر است.

در کل مسیر حرکت، چترباز هرگز به سمت بالا حرکت نمی‌کند.

با توجه به زمان باز کردن چتر توسط چترباز دو حالت داریم:

الف) چترباز بلافاصله پس از پرش، چتر خود را باز می‌کند:



در این حالت، نیروی مقاومت هوا در ابتدا ناچیز است. با افزایش تندی چترباز این نیرو افزایش پیدا می‌کند تا این‌که اندازهٔ این نیرو با اندازهٔ نیروی وزن برابر شود. در این حالت شتاب چترباز صفر شده و چترباز با تندی حدی به حرکت خود ادامه می‌دهد تا به زمین برسد.

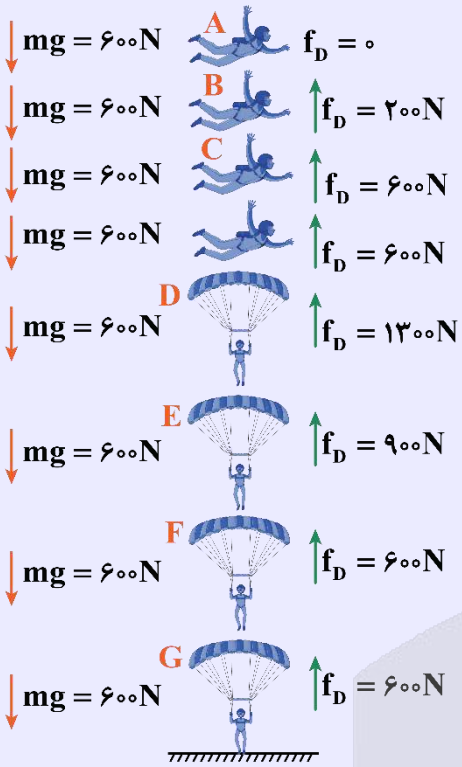
مسیر AC: حرکت تندشونده $\Leftarrow f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

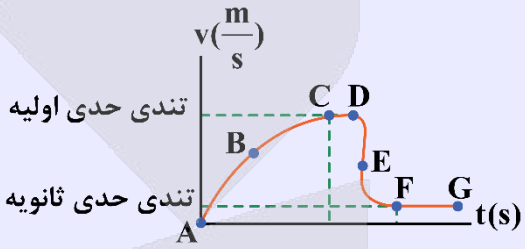
مسیر CD: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی) $\Leftarrow f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

WWW.ArefOnline.ir

ب) چترباز مدتی پس از پرش، چترش را باز می‌کند:

در این حالت پس از پرش، تندی چترباز زیاد و زیادتر می‌شود و نیروی مقاومت هوا در تندی خیلی زیاد با وزن هم‌اندازه می‌شود (تندی حدی اولیه). پس از بازکردن چتر، ناگهان نیروی مقاومت هوا به‌علت افزایش مساحت در آن تندی زیاد، به‌شدت افزایش می‌یابد و حرکت چترباز کند خواهد شد و نیروی مقاومت هوا آن‌قدر کاهش پیدا می‌کند تا با نیروی وزن هم‌اندازه شود. در این حالت، به تندی حدی ثانویه می‌رسد.





مسیر AC: حرکت تندشونده ⇐ $f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

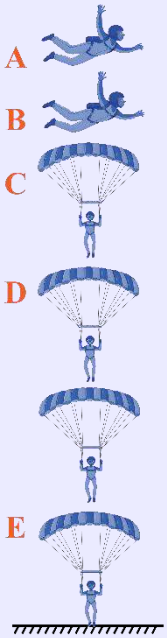
مسیر CD: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی اولیه) ⇐ $f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

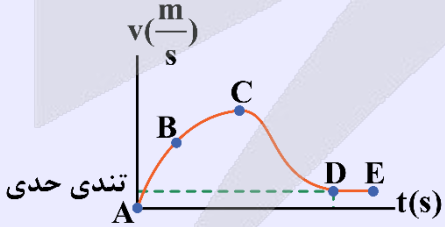
موقعیت D: چترباز چتر خود را باز می‌کند.

مسیر DF: حرکت کندشونده ⇐ $f_D > mg$ و f_D درحال کاهش، F_{net} و a به سمت بالا و هر دو درحال کاهش

مسیر FG: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی ثانویه) ⇐ $f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

پ) اگر چترباز قبل از رسیدن به تندی حدی اولیه چترش را باز کند:





مسیر AC: حرکت تندشونده ⇐ $f_D < mg$ و f_D درحال افزایش، F_{net} و a به سمت پایین و هر دو درحال کاهش

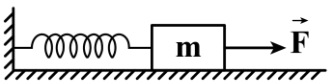
موقعیت C: چترباز چتر خود را باز می‌کند.

مسیر CD: حرکت کندشونده ⇐ $f_D > mg$ و f_D درحال کاهش، F_{net} و a به سمت بالا و هر دو درحال کاهش

مسیر DE: حرکت با سرعت ثابت (تندی حدی) ⇐ $f_D = mg$ ، $F_{net} = ۰$ و $a = ۰$

WWW.ArefOnline.ir

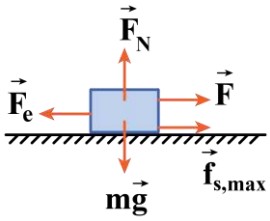
۵۹- مطابق شکل زیر، به جسمی به جرم $800g$ که به فنری با ثابت $2\frac{N}{cm}$ متصل است، نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ را وارد کرده‌ایم. در این حالت، جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ بوده و افزایش طول فنر از حالت آزاد آن برابر با $7cm$ است. اندازهٔ نیروی $\vec{F}$ چند نیوتون است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



۱) ۱۰
۲) ۱۲
۳) ۱۴
۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۱ ـ ۱۲۰۲)

جسم در آستانهٔ حرکت به سمت چپ است، یعنی در این حالت شتاب حرکت جسم برابر صفر بوده $(a=0)$ و نیروی اصطکاک بین جسم و سطح، نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه و به سمت راست است. با بررسی نیروها در راستای افقی و عمودی، نیروی F را محاسبه می‌کنیم:



$$F_{net_y}=0\Rightarrow F_N=mg=\frac{8}{10}\times 10=8N$$

$$F_{net_x}=0\Rightarrow F+f_{s,max}=F_e$$

$$\Rightarrow F+\mu_s F_N=kx$$

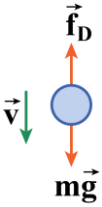
$$\Rightarrow F+0/25\times 8=2\times 7\Rightarrow F=12N$$

۶۰- دو گوی هم‌اندازهٔ A و B را که جرم یکی ۳ برابر دیگری است $(m_A=3m_B)$، از بالای برجی به ارتفاع h به‌طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، ثابت و یکسان باشد، به‌ترتیب از راست به چپ، بزرگی سرعت متوسط و بزرگی تکانهٔ برخورد کدام گوی با سطح زمین بیش‌تر است؟

۱) A ،A
۲) A ،B
۳) B ،A
۴) B ،B

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۷ ـ ۱۲۰۲)

کلم اول



طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{net}=ma\Rightarrow mg-f_D=ma\Rightarrow a=g-\frac{f_D}{m}$$

با توجه به رابطهٔ بالا، هرچه جرم گوی بیش‌تر باشد، اندازهٔ شتاب گوی نیز بیش‌تر است؛ بنابراین:

$$m_A>m_B\Rightarrow a_A>a_B$$

کلم دوم

حرکت دو گوی، یک حرکت با شتاب ثابت است؛ بنابراین طبق معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$\Delta x=\frac{1}{2}at^2+v_0t\xrightarrow[v_{0A}=v_{0B}=0]{\Delta x_A=\Delta x_B}\frac{a_A}{a_B}=(\frac{t_B}{t_A})^2\xrightarrow{a_A>a_B}t_B>t_A$$

کلم آخر

با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط داریم:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}\xrightarrow{\Delta x_A=\Delta x_B}\frac{v_{av_A}}{v_{av_B}}=\frac{\Delta t_B}{\Delta t_A}\xrightarrow{\Delta t_B>\Delta t_A}v_{av_A}>v_{av_B}$$

همچنین تکانهٔ برخورد گوی‌ها با سطح زمین از رابطهٔ $p=mv$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین:

$$p=mv\xrightarrow[v_A>v_B]{m_A>m_B}p_A>p_B$$

WWW.ArefOnline.ir

تذکر!

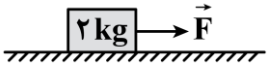
با توجه به رابطهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت داریم:

$$v_{av}=\frac{v_{\circ}+v}{۲} \xrightarrow[v_{\circ A}=v_{\circ B}=\circ]{v_{avA}>v_{avB}} v_A > v_B$$

یعنی اندازهٔ سرعت برخورد گوی A با سطح زمین بیش‌تر از اندازهٔ سرعت برخورد گوی B با سطح زمین است.

ماز

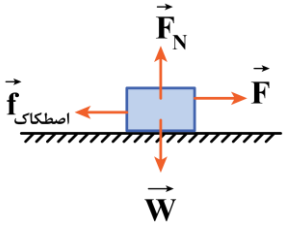
۶۱- در شکل زیر، به جسم ساکنی نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۲۵N وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به‌ترتیب ۰/۷ و ۰/۵ باشد، اندازهٔ نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) $۱۰\sqrt{۳}$
۲) $۱۰\sqrt{۵}$
۳) $۲\sqrt{۱۴۹}$
۴) ۲۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

کلام اول



ابتدا بررسی می‌کنیم که با وارد شدن نیروی $\vec{F}$، جسم روی سطح افقی ساکن می‌ماند یا حرکت می‌کند:

$$F_{net_y}=\circ \Rightarrow F_N=W=۲\circ N$$

$$f_{s,max}=\mu_s F_N=\circ/۷\times ۲\circ=۱۴N$$

چون $f_{s,max}<F$ است، جسم شروع به حرکت می‌کند، درنتیجه نیروی اصطکاک بین جسم و سطح از نوع اصطکاک جنبشی است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

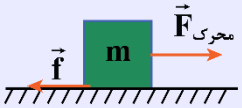
$$f_k=\mu_k F_N=\circ/۵\times ۲\circ=۱\circ N$$

کلام آخر

اندازهٔ نیروی سطح به جسم برابر است با:

$$R=\sqrt{f_k^۲+F_N^۲} \Rightarrow R=\sqrt{۱\circ^۲+۲\circ^۲}=۱\circ\sqrt{۵}N$$

حرکت روی سطح دارای اصطکاک



اگر مانند شکل مقابل، نیروی خالص محرکی به جسم ساکن اِعمال شود:

۱- ابتدا مقدار $F_{محرک}$ را به‌دست می‌آوریم که مساوی با برایند نیروهای در راستای حرکت خود به‌جز اصطکاک می‌شود.

۲- سپس نیروی $f_{s,max}$ را از رابطهٔ $f_{s,max}=\mu_s F_N$ به‌دست می‌آوریم.

۳- مقادیر دو مرحلهٔ قبل را باهم مقایسه می‌کنیم و سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $F_{محرک}<f_{s,max}$ ⇐ جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f=f_s=F_{محرک}$

ب) اگر $F_{محرک}=f_{s,max}$ ⇐ جسم در آستانهٔ حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f=f_{s,max}=\mu_s F_N=F_{محرک}$

پ) اگر $F_{محرک}>f_{s,max}$ ⇐ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

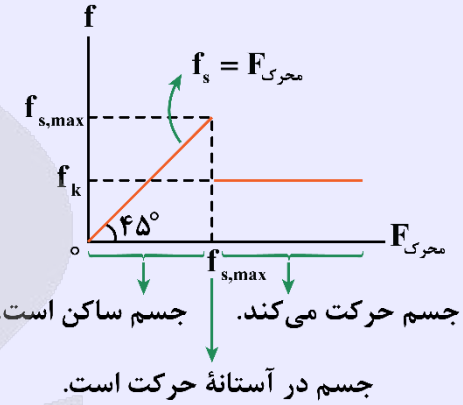
نیروی اصطکاک: $f=f_k=\mu_k F_N$

WWW.ArefOnline.ir

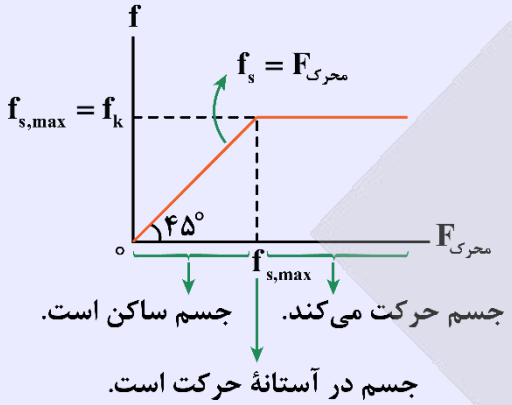
در روابط بالا μ_s و μ_k را به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم که به ویژگی‌های سطح در تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره:

$$\mu_s \geq \mu_k \Rightarrow f_{s,max} \geq f_k$$

اگر $\mu_s > \mu_k$ باشد:



اگر $\mu_s = \mu_k$ باشد:

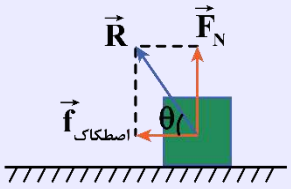


نیروی سطح

سطح یا تکیه‌گاهی که جسم روی آن ساکن یا درحال حرکت باشد دو نیرو به جسم وارد می‌کند:

۱- نیروی عمودی سطح **۲- نیروی اصطکاک**

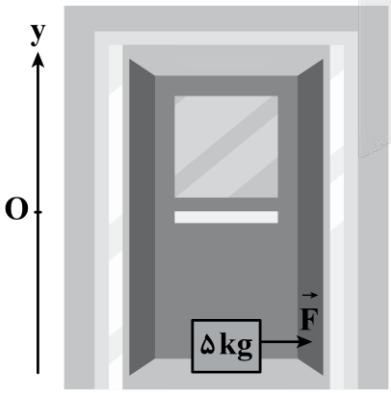
که این دو نیرو بر هم عمود می‌باشد و به برایند این دو نیرو، نیروی سطح یا تکیه‌گاه می‌گویند و با R نشان می‌دهند:



$$R = \sqrt{F_N^2 + (f_{اصطکاک})^2} \quad , \quad \tan\theta = \frac{F_N}{f_{اصطکاک}}$$

اگر اصطکاک سطح صفر باشد، نیروی سطح با نیروی عمودی تکیه‌گاه برابر است.

۶۲- در شکل زیر، آسانسور با شتابی به بزرگی $6\frac{m}{s^2}$ به‌صورت کندشونده به سمت پایین در حرکت است و به جسم ساکنی که در کف آسانسور قرار دارد، نیروی ثابت و افقی $\vec{F}$ به بزرگی ۶۰N وارد می‌شود. اگر ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح به‌ترتیب ۰/۸ و ۰/۵ باشد، بزرگی نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$



۱) $10\sqrt{61}$

۲) ۸۰

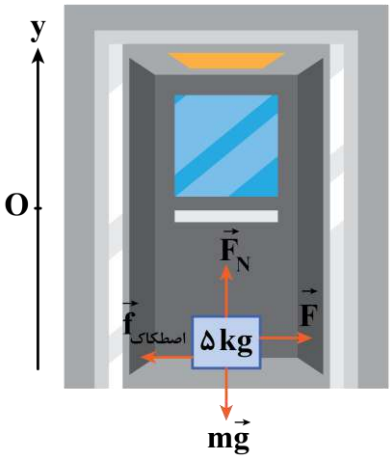
۳) $40\sqrt{5}$

۴) ۱۰۰

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۲ ـ ۱۲۰۲)

کام اول



این‌که آسانسور به‌صورت کندشونده به سمت پایین در حرکت است، تعبیرش این است که شتاب حرکت آسانسور رو به بالا است و $a = +۶\frac{m}{s^۲}$ است و داریم:

$$F_{net_y} = ma \Rightarrow F_N - mg = ma \Rightarrow F_N = m(g+a)$$

$$\xrightarrow{m=۵kg\ ,\ a=۶\frac{m}{s^۲}} F_N = ۵\times(۱۰+۶) = ۸۰N$$

کام دوم

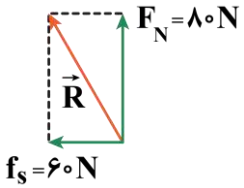
حال بررسی می‌کنیم که با وارد شدن نیروی $\vec{F}$، جسم روی سطح ساکن می‌ماند یا شروع به حرکت می‌کند:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \xrightarrow{\mu_s = ۰/۸\ ,\ F_N = ۸۰N} f_{s,max} = ۰/۸\times ۸۰ = ۶۴N$$

چون $f_{s,max} = ۶۴N$ بزرگ‌تر از $F = ۶۰N$ است، پس جسم نسبت به کف آسانسور، ساکن می‌ماند و در راستای افقی جابه‌جا نمی‌شود:

$$F_{net,x} = ۰ \Rightarrow f_s = F = ۶۰N$$

کام آخر



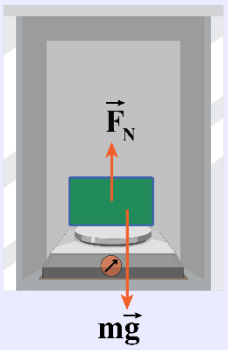
طبق قانون سوم نیوتون، بزرگی نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند، برابر با بزرگی نیرویی است که سطح به جسم وارد می‌کند و داریم:

$$R = \sqrt{f_s^۲ + F_N^۲} = \sqrt{۸۰^۲ + ۶۰^۲} = ۱۰۰N$$

آسانسور

سؤالاتی که بر جسم درون آسانسور فقط و فقط دو نیرو وارد شود (یکی نیروی mg و دیگری F_e یا F_N یا T) را می‌توان از دو روش زیر حل کرد:

۱- اگر در صورت سؤال جهت شتاب را بدهند:



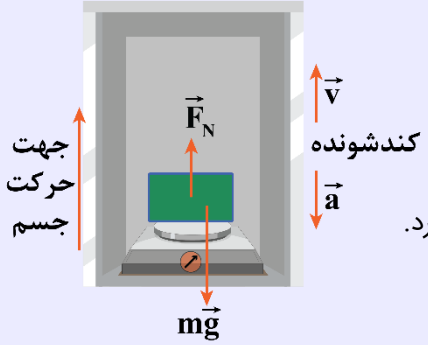
جهت شتاب $a > ۰$ یا جهت شتاب $a < ۰$

$$F_N = m(g \pm |a|)$$

(+): جهت شتاب به سمت بالا (-): جهت شتاب به سمت پایین

در استفاده از این رابطه نیازی به دانستن جهت حرکت نیست.

۲- اگر در صورت سؤال جهت حرکت و نوع حرکت را بدهند:



$$F_N = m(g \pm |a|)$$

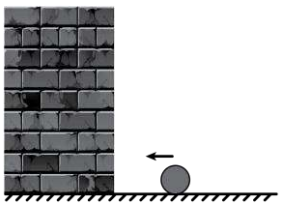
(+): آسانسور تندشوندهٔ رو به بالا یا کندشوندهٔ رو به پایین درحال حرکت باشد.

(-): آسانسور تندشوندهٔ رو به پایین یا کندشوندهٔ رو به بالا درحال حرکت باشد.

تذکر: اگر بر جسم درون آسانسور بیش‌تر از دو نیرو وارد شود دیگر نمی‌توان از روابط بالا استفاده کرد.

WWW.ArefOnline.ir

۶۳- مطابق شکل زیر، توپی به جرم ۴۰۰g در راستای افقی با تندی $۱۵\frac{m}{s}$ به یک دیوار برخورد می‌کند و با تندی $۱۰\frac{m}{s}$ در همان راستای افقی برمی‌گردد. اگر بزرگی نیروی متوسطی که دیوار بر توپ وارد می‌کند، برابر با ۵۰N باشد، مدت‌زمان تماس توپ با دیوار چند میلی‌ثانیه است؟



۱) ۰/۱
۲) ۰/۲
۳) ۱۰۰
۴) ۲۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

تغییر سرعت توپ را به‌دست می‌آوریم. با توجه به این‌که جهت حرکت توپ پس از برخورد به دیوار در خلاف جهت اولیهٔ حرکت توپ است، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} v_۱ = -۱۵\frac{m}{s} \\ v_۲ = ۱۰\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow \Delta v = v_۲ - v_۱ = ۱۰ - (-۱۵) = ۲۵\frac{m}{s}$$

گام دوم

تغییر تکانهٔ توپ را به‌دست می‌آوریم:

$$p = mv \Rightarrow \Delta p = m\Delta v \Rightarrow \Delta p = ۰/۴ \times ۲۵ = ۱۰\frac{kg.m}{s}$$

گام آخر

مدت‌زمان تماس توپ با دیوار برابر است با:

$$F_{net} = \frac{\Delta p}{\Delta t} \Rightarrow ۵۰ = \frac{۱۰}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = ۰/۲s = ۲۰۰ms$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به واحد خواسته‌شده برای زمان در انتهای سؤال نباشد، در دام گزینهٔ (۲) می‌افتید!

تکانه

۱- حاصل‌ضرب جرم در سرعت یک جسم را تکانه می‌نامند. تکانه یک کمیت برداری و هم‌جهت با سرعت است.

$\vec{p} = m\vec{v}$ تغییرات تکانه: $\Delta\vec{p} = m\Delta\vec{v}$

۲- قانون دوم نیوتون با استفاده از تغییرات تکانه به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\vec{F}_{net} = \frac{\Delta\vec{p}}{\Delta t}$$

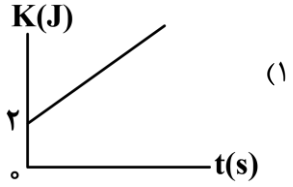
متوسط نیروی وارد بر جسم برابر آهنگ تغییرات تکانه است.

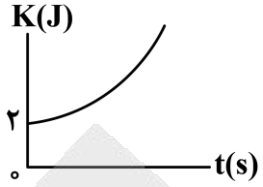
تذکر!

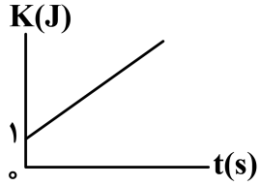
دقت کنید که سرعت یک کمیت برداری است؛ بنابراین برای محاسبهٔ تغییرات سرعت جسم باید از قوانین جمع برداری استفاده کنیم.

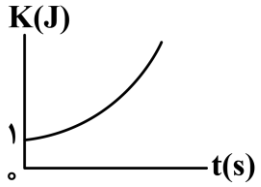
WWW.ArefOnline.ir

۶۴- معادلهٔ تکانه ـ زمان حرکت جسمی به جرم ۳kg در SI به‌صورت $p=\sqrt{9t+6}$ است. کدام‌یک از گزینه‌های زیر نمودار انرژی جنبشی برحسب زمان این جسم را به‌درستی نشان می‌دهد؟

۱) 

۲) 

۳) 

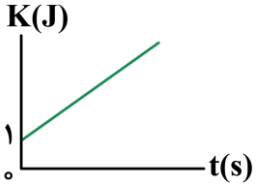
۴) 

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۲۰۲)

طبق رابطهٔ $K=\frac{p^2}{2m}$ می‌توانیم بنویسیم:

$$K=\frac{p^2}{2m}\Rightarrow K=\frac{(\sqrt{9t+6})^2}{2\times 3}=\frac{9t+6}{6}=1/5t+1$$

معادلهٔ انرژی جنبشی برحسب زمان برای این جسم، یک معادلهٔ درجهٔ اول است؛ بنابراین نمودار $K-t$ برای این جسم، خطی با شیب ثابت است و داریم:

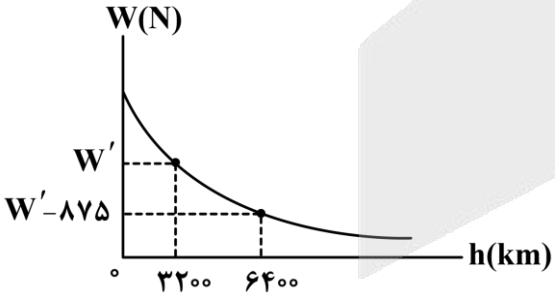


نکته

انرژی جنبشی یک جسم را می‌توان برحسب تکانه نیز نوشت:

انرژی جنبشی: $K=\frac{1}{2}mv^2=\frac{1}{2}\frac{(mv)^2}{m}=\frac{1}{2}\frac{p^2}{m}\Rightarrow K=\frac{p^2}{2m}$

۶۵- یک ماهوارهٔ تحقیقاتی از سطح زمین پرتاب و به فضا فرستاده می‌شود. نمودار وزن ماهواره برحسب ارتفاع از سطح زمین، مطابق شکل زیر است. جرم این ماهواره چند کیلوگرم است؟ (شعاع زمین ۶۴۰۰km و بزرگی شتاب گرانش در سطح زمین برابر با $10\frac{N}{kg}$ است.)



۱) ۴۵۰

۲) ۵۰۰

۳) ۹۰۰

۴) ۱۰۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

نسبت وزن ماهواره در ارتفاع ۳۲۰۰ کیلومتری از سطح زمین به وزن ماهواره در ارتفاع ۶۴۰۰ کیلومتری از سطح زمین را به‌دست می‌آوریم:

$$W=\frac{GM_em}{(R_e+h)^2}\Rightarrow\frac{W_1}{W_2}=(\frac{R_e+h_2}{R_e+h_1})^2\xrightarrow[W_2=W'-875\ ,\ h_2=6400km]{W_1=W'\ ,\ h_1=3200km}\frac{W'}{W'-875}=(\frac{6400+6400}{6400+3200})^2$$

$$\Rightarrow\frac{W'}{W'-875}=\frac{16}{9}$$

$$\Rightarrow 9W'=16W'-14000\Rightarrow 7W'=14000$$

$$\Rightarrow W'=2000N\Rightarrow W_1=2000N$$

WWW.ArefOnline.ir

گام دوم

با توجه به رابطهٔ شتاب گرانش، بزرگی شتاب گرانش را در ارتفاع ۳۲۰۰ کیلومتری از سطح زمین به‌دست می‌آوریم:

$$g=\frac{GM_e}{r^2}\Rightarrow\frac{g_1}{g_0}=(\frac{R_e}{R_e+h_1})^2=(\frac{6400}{6400+3200})^2=\frac{4}{9}$$

$$\Rightarrow\frac{g_1}{10}=\frac{4}{9}\Rightarrow g_1=\frac{40}{9}\frac{m}{s^2}$$

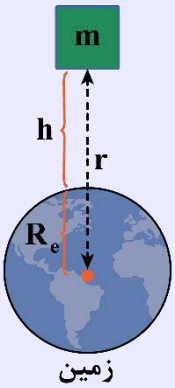
گام آخر

با توجه به رابطهٔ وزن داریم:

$$W_1=mg_1\Rightarrow 2000=m\times\frac{40}{9}\Rightarrow m=450kg$$

رابطهٔ بین وزن و نیروی گرانشی

وزن یک جسم در فاصلهٔ r از مرکز زمین، برابر با نیروی گرانشی واردشده بر جسم از طرف زمین است:



$$W=G\frac{M_em}{r^2}\xrightarrow{r=R_e+h}W=G\frac{M_em}{(R_e+h)^2}$$

W: وزن جسم برحسب N

G: ثابت عمومی گرانش برحسب $\frac{N.m^2}{kg^2}$

M_e: جرم زمین برحسب kg

m: جرم جسم برحسب kg

r: فاصلهٔ جسم از مرکز زمین برحسب m

h: فاصلهٔ جسم از سطح زمین برحسب m

R_e: شعاع زمین برحسب m

نکات

۱- شتاب گرانشی زمین با جرم زمین رابطهٔ مستقیم و با مربع فاصله از مرکز زمین رابطهٔ وارون دارد.

۲- برای مقایسهٔ شتاب گرانشی زمین در دو فاصلهٔ h_1 و h_2 از سطح زمین داریم:

$$g=G\frac{M_e}{r^2}\Rightarrow\frac{g_2}{g_1}=\frac{G\frac{M_e}{r_2^2}}{G\frac{M_e}{r_1^2}}=(\frac{r_1}{r_2})^2\xrightarrow{r_1=R_e+h_1\ ,\ r_2=R_e+h_2}\frac{g_2}{g_1}=(\frac{R_e+h_1}{R_e+h_2})^2$$

۳- شتاب گرانشی زمین در سطح آن $(h=0\Rightarrow r=R_e)$ برابر است با:

$$g_0=G\frac{M_e}{R_e^2}$$

۴- در یک سیارهٔ دیگر به جرم M و شعاع R، شتاب گرانشی در فاصلهٔ h از سطح سیاره برابر است با:

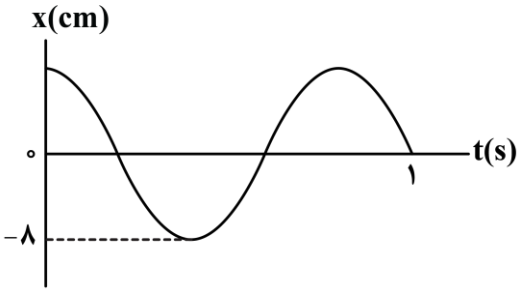
$$g=G\frac{M}{r^2}\xrightarrow{r=R+h}g=G\frac{M}{(R+h)^2}\xrightarrow[h=0]{\text{در سطح سیاره}}g_0=G\frac{M}{R^2}$$

۵- با افزایش فاصله از سطح یک سیاره، شتاب گرانشی متناسب با مربع فاصله از مرکز سیاره کاهش می‌یابد (شتاب گرانشی از مربع فاصله از مرکز سیاره رابطهٔ وارون دارد).

۶- در هر سیاره‌ای، جهت شتاب گرانشی سیاره به سمت مرکز آن است.

WWW.ArefOnline.ir

۶۶- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای، مطابق شکل زیر است. معادلهٔ حرکت این نوسانگر برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده است؟



۱) $x = ۸\cos(۲/۵\pi t)$

۲) $x = ۰/۰۸\cos(۲/۵\pi t)$

۳) $x = ۸\cos(۵\pi t)$

۴) $x = ۰/۰۸\cos(۵\pi t)$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۳)

کام اول

با توجه به نمودار، دامنهٔ حرکت نوسانگر برابر با $A = ۸cm$ است. از طرفی با توجه به نمودار داریم:

$$\frac{۵}{۴}T = ۱ \Rightarrow T = ۰/۸s$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{۰/۸} = ۲/۵\pi \frac{rad}{s}$$

کام آخر

بنابراین معادلهٔ حرکت نوسانگر برابر است با:

$$x = A\cos(\omega t) \xrightarrow[\omega = ۲/۵\pi \frac{rad}{s}]{A = ۸cm = ۰/۰۸m} x = ۰/۰۸\cos(۲/۵\pi t)$$

سوتی‌های پرتکرار

اگر حواستان به یکای دامنه نباشد، در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید!

معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده

معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده درحالتی‌که نوسانگر در مبدأ زمان $(t = ۰)$ در مکان $x = +A$ قرار داشته باشد، به‌صورت زیر است:

$$x = A\cos\omega t$$

x: مکان نوسانگر برحسب متر (m) A: دامنهٔ نوسان برحسب متر (m) ωt: شناسهٔ تابع کسینوسی (rad) یا فاز

بسامد زاویه‌ای (ω) از چه رابطه‌ای به‌دست می‌آید؟

اگر بسامد نوسان را با f و دورهٔ تناوب را با T نشان دهیم، رابطهٔ ω با f و T به‌صورت زیر است:

$$\omega = ۲\pi f$$

$$\omega = \frac{۲\pi}{T}$$

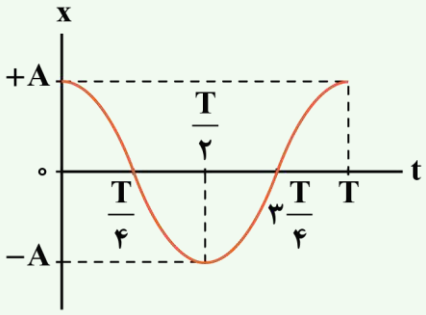
ω: بسامد زاویه‌ای برحسب رادیان بر ثانیه $(\frac{rad}{s})$ f: بسامد برحسب هرتز (Hz)

T: دورهٔ تناوب برحسب ثانیه (s)

WWW.ArefOnline.ir

نمودار مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده

با توجه به معادلهٔ حرکت هماهنگ ساده $(x = A\cos\omega t)$ نمودار مکان ـ زمان آن نیز به‌صورت کسینوسی است. شکل زیر این نمودار را در مدت‌زمان یک دورهٔ تناوب نشان می‌دهد.



۶۷- معادلهٔ حرکت نوسانگر هماهنگ ساده‌ای در SI به‌صورت $x = ۰/۰۲\cos(۱۰\pi t)$ است. مسافتی که این نوسانگر در مدت‌زمان $t = ۰$ تا $t = \frac{۳}{۲۰}s$ طی می‌کند، برابر چند سانتی‌متر است؟

۱) ۱۰ ۲) ۶ ۳) ۱۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۳)

با توجه به معادلهٔ حرکت نوسانگر داده‌شده داریم:

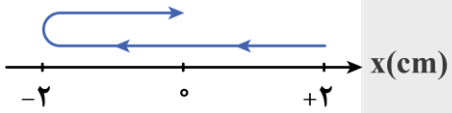
$$\begin{cases} x = ۰/۰۲\cos(۱۰\pi t) \\ x = A\cos(\omega t) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = ۰/۰۲m = ۲cm \\ \omega = ۱۰\pi(\frac{rad}{s}) \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow T = \frac{۲\pi}{۱۰\pi} = ۰/۲s \end{cases}$$

نوسانگر بر روی پاره‌خطی به طول $۴cm$ درحال نوسان است و مکان آن در دو لحظهٔ $t = ۰$ و $t = \frac{۳}{۲۰}s$ برابر است با:

$$t = ۰ \Rightarrow x = ۰/۰۲m = ۲cm$$

$$t = \frac{۳}{۲۰}s \Rightarrow x = ۰/۰۲\cos(۱۰\pi \times \frac{۳}{۲۰}) = ۰$$

با توجه به این‌که بازهٔ زمانی $t = ۰$ تا $t = \frac{۳}{۲۰}s$ برابر با $\frac{۳T}{۴}$ است، مسیر حرکت نوسانگر در این بازهٔ زمانی به شکل زیر است:



بنابراین مسافت طی‌شده توسط نوسانگر برابر است با:

$$l = ۳A = ۳ \times ۲ = ۶cm$$

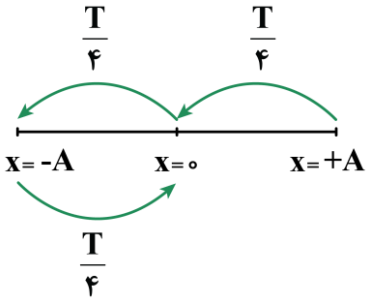
۶۸- جسمی را به انتهای فنری بسته و پس از کشیدن فنر، آن را رها می‌کنیم تا جسم شروع به نوسان هماهنگ ساده کند. مدت‌زمان $\frac{۳}{۴}s$ طول می‌کشد تا بزرگی تکانهٔ این نوسانگر هماهنگ ساده برای دومین بار به مقدار بیشینه برسد. حداقل چند ثانیه طول می‌کشد تا انرژی پتانسیل این نوسانگر از بیشینه به صفر برسد؟

۱) ۰/۵ ۲) ۰/۲۵ ۳) ۰/۷۵ ۴) ۱

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۶ ـ ۱۲۰۳)

کام اول



بزرگی تکانهٔ نوسانگر در مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل)، بیشینه است (چون تندی نوسانگر در مرکز نوسان، بیشینه است)؛ بنابراین مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا نوسانگر برای دومین بار از نقطهٔ تعادل عبور کند برابر با $\frac{۳T}{۴}$ است.

$$t_۱ = \frac{۳T}{۴} \Rightarrow \frac{۳}{۴} = \frac{۳T}{۴} \Rightarrow T = ۱s$$

کام آخر

انرژی پتانسیل نوسانگر در دامنه‌ها بیشینه و در مرکز نوسان، صفر است، پس حداقل زمان مورد نیاز برای رسیدن انرژی پتانسیل از بیشینهٔ خود به صفر برابر مدت‌زمانی است که نوسانگر از دامنهٔ نوسان به مرکز نوسان می‌رسد، یعنی $\frac{T}{۴}$؛ بنابراین:

$$t_۲ = \frac{T}{۴} = \frac{۱}{۴}s = ۰/۲۵s$$

۶۹- طول نخ آونگ ساده‌ای را چند درصد و چگونه تغییر دهیم تا بسامد نوسان آن ۲۰ درصد کاهش یابد؟

۱) ۳۶، کاهش ۲) ۳۶، افزایش ۳) ۵۶/۲۵، کاهش ۴) ۵۶/۲۵، افزایش

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۲۰۳)

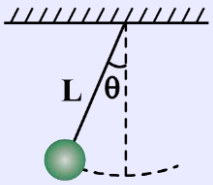
برای آن‌که بسامد ۲۰ درصد کاهش یابد ($\frac{۴}{۵}$ برابر شود)، باید دورهٔ نوسان $\frac{۵}{۴}$ برابر شود؛ بنابراین داریم:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}} \Rightarrow \frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \Rightarrow \frac{۵}{۴} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} \Rightarrow \frac{L_۲}{L_۱} = \frac{۲۵}{۱۶} = \frac{۱۵۶/۲۵}{۱۰۰}$$

بنابراین باید طول نخ آونگ را **۵۶/۲۵ درصد افزایش** دهیم.

حرکت هماهنگ سادهٔ آونگ ساده

یک آونگ ساده از یک وزنهٔ کوچک متصل به نخی با طول ثابت و کش‌نیامدنی با زاویهٔ انحراف کوچک تشکیل شده و حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد.



دورهٔ تناوب نوسان آونگ ساده از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$$

T: دورهٔ تناوب (s) L: طول نخ (m) g: شتاب گرانش $(\frac{m}{s^۲})$

طبق رابطهٔ بالا درمی‌یابیم، دورهٔ تناوب آونگ ساده با طول نخ آونگ رابطهٔ مستقیم و با شتاب گرانش رابطهٔ معکوس دارد؛ بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱} \times \frac{g_۱}{g_۲}}$$

WWW.ArefOnline.ir

می‌دانیم $f=\frac{۱}{T}$ و $\omega=\frac{۲\pi}{T}$ است؛ درنتیجه رابطهٔ بسامد و بسامد زاویه‌ای آونگ به‌صورت زیر است:

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{g}{L}}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{g}{L}}$$

با توجه به روابط بالا درمی‌یابیم بسامد و بسامد زاویه‌ای آونگ با شتاب گرانش رابطهٔ مستقیم و با طول نخ آونگ رابطهٔ معکوس دارند؛ بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای آن‌ها نیز به‌صورت زیر است:

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱}=\frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{g_۲}{g_۱}\times\frac{L_۱}{L_۲}}$$

نکات

۱- در آونگ ساده، دورهٔ تناوب، بسامد و بسامد زاویه‌ای به جرم گلوله و دامنه بستگی ندارند.

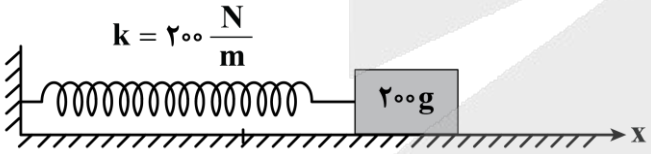
۲- با دورشدن از سطح زمین و کاهش شتاب گرانش دورهٔ تناوب افزایش و بسامد کاهش می‌یابد.

۳- دورهٔ تناوب آونگ در قطب‌های زمین از استوا کم‌تر است.

۴- اگر دورهٔ آونگ یک ساعت آونگ‌دار کاهش یابد، ساعت تندتر کار می‌کند و ساعت جلو می‌افتد.

ماز

۷۰- مطابق شکل زیر، جسمی به جرم ۲۰۰g را به انتهای فنری با ثابت $۲۰۰\frac{N}{m}$ و طول ۶۰cm متصل می‌کنیم. جسم را به سمت راست می‌کشیم تا طول فنر ۸۰cm شود، سپس وزنه را رها کرده تا حرکت هماهنگ ساده انجام دهد. اگر اصطکاک جسم با سطح افقی ناچیز باشد، از لحظه‌ای که طول فنر ۷۵cm و درحال افزایش است تا سومین بار پس از این لحظه که طول فنر ۴۵cm می‌شود، چند ثانیه طول می‌کشد؟ $(\pi=\sqrt{۱۰})$



۱) ۰/۱

۲) ۰/۲

۳) ۰/۳

۴) ۰/۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۲۰۳)

با توجه به این‌که طول فنر نسبت به حالت عادی ۲۰cm زیاد شده است، پس دامنهٔ نوسان ۲۰cm است:

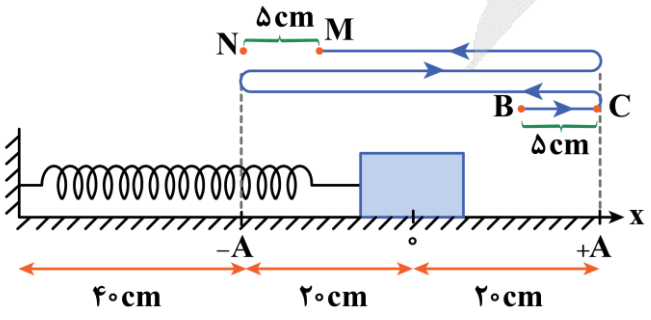
$$A=۸۰-۶۰=۲۰cm$$

بنابراین دورهٔ تناوب سامانهٔ جسم ـ فنر برابر است با:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۲}{۲۰۰}}\xrightarrow{\pi=\sqrt{۱۰}}T=۲\times\sqrt{۱۰}\times\sqrt{\frac{۱}{۱۰۰۰}}$$

$$\Rightarrow T=۰/۲s$$

حال روی شکل، مسیر مورد نظر را مشخص می‌کنیم:



WWW.ArefOnline.ir

اگر ۵ سانتی‌متر قسمت BC را در قسمت MN قرار دهیم، متوجه می‌شویم که مدت‌زمان لازم برای پیمودن مسیر مورد نظر، $\frac{۳}{۲}$ دورهٔ تناوب است؛ بنابراین:

$$\Delta t = \frac{۳}{۲}T = \frac{۳}{۲} \times ۰/۲ = ۰/۳s$$

سامانهٔ جرم ـ فنر

اگر جسمی به جرم m را به یک فنر با ثابت k وصل کنیم و در شرایطی که نیروی اصطکاک و مقاومت هوا نباشد، جسم را از حالت تعادل خارج و رها کنیم، جسم حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد.

دورهٔ تناوب نوسانگر جرم ـ فنر:

دورهٔ تناوب نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

T: دورهٔ تناوب (s)　　m: جرم نوسانگر (kg)　　k: ثابت فنر $(\frac{N}{m})$

بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای دورهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر به‌صورت زیر است:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{m_۲}{m_۱} \times (\frac{k_۱}{k_۲})}$$

با توجه به رابطهٔ $f = \frac{۱}{T}$، بسامد نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$f = \frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{f_۲}{f_۱} = \sqrt{\frac{k_۲}{k_۱} \times \frac{m_۱}{m_۲}}$$

از طرفی با توجه به رابطهٔ $\omega = \frac{۲\pi}{T}$، بسامد زاویه‌ای نوسانگر جرم ـ فنر از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

بنابراین رابطهٔ مقایسه‌ای آن به‌صورت زیر است:

$$\frac{\omega_۲}{\omega_۱} = \sqrt{\frac{k_۲}{k_۱} \times \frac{m_۱}{m_۲}}$$

یه نمونهٔ باحال

یک نوسانگر جرم ـ فنر، از جسمی به جرم ۱/۵kg و فنری با ثابت $۴۸۶\frac{N}{m}$ تشکیل شده است. این نوسانگر در مدت‌زمان یک دقیقه چند نوسان کامل انجام می‌دهد؟ $(\pi = ۳)$

پاسخ تشریحی:

$$T = ۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}} \Rightarrow T = ۲ \times ۳\sqrt{\frac{۱/۵}{۴۸۶}} = ۲ \times ۳ \times \frac{۱}{۱۸} = \frac{۱}{۳}s$$

$$T = \frac{t}{n} \Rightarrow \frac{۱}{۳} = \frac{۶۰}{n} \Rightarrow n = ۱۸۰$$

WWW.ArefOnline.ir

یه نمونهٔ باحال

دو نوسانگر جرم ـ فنر A و B در اختیار داریم. اگر جرم نوسانگر A، ۲۱ درصد بیش‌تر از جرم نوسانگر B و ثابت فنر A، ۳۶ درصد کم‌تر از ثابت فنر B باشد، بسامد نوسانگر A چند برابر بسامد نوسانگر B است؟

پاسخ تشریحی:

با توجه به رابطهٔ بسامد برای سامانهٔ جرم ـ فنر داریم:

$$f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\frac{f_A}{f_B}=\sqrt{\frac{k_A}{k_B}\times\frac{m_B}{m_A}}\xrightarrow[m_A=m_B+\frac{۲۱}{۱۰۰}m_B=\frac{۱۲۱}{۱۰۰}m_B]{k_A=k_B-\frac{۳۶}{۱۰۰}k_B=\frac{۶۴}{۱۰۰}k_B}$$

$$\frac{f_A}{f_B}=\sqrt{\frac{۶۴}{۱۰۰}\times\frac{۱۰۰}{۱۲۱}}=\sqrt{\frac{۶۴}{۱۲۱}}=\frac{۸}{۱۱}$$

آزمون سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۵۴- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ نوسانگری در SI به‌صورت $x=۰/۰۲\cos ۶\pi t$ است. بیش‌ترین سرعت متوسط نوسانگر در مدت $۰/۵\,s$ چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۲}$

پاسخ تشریحی:

$$x=۰/۰۲\cos ۶\pi t\Rightarrow\omega=۶\pi\frac{rad}{s}\quad\text{و}\quad A=۰/۰۲m=۲cm$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۶\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱}{۳}s$$

ابتدا محاسبه می‌کنیم زمان موردنظر چه مضربی از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۵}{\frac{۱}{۳}}=۱/۵\Rightarrow\Delta t=۱/۵T$$

Δt ثابت است، پس بیش‌ترین سرعت متوسط زمانی رخ می‌دهد که جابه‌جایی حداکثر شود:

$$\uparrow v_{av}=\frac{\Delta x\uparrow}{\Delta t\rightarrow\text{ثابت}}$$

بازهٔ زمانی موردنظر $\Delta t=۱/۵T$ است چون در مدت یک دوره دوباره به مکان اول بازمی‌گردیم و جابه‌جایی در مدت یک دوره صفر است، پس ما باید حداکثر جابه‌جایی را در $۰/۵T$ به‌دست آوریم و در این مدت حداکثر جابه‌جایی زمانی است که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ بازگشت طی شود.

$$|\Delta x|=۲A=۲\times۲=۴cm$$

$$|v_{av}|=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{۴cm}{۰/۵s}=۸\frac{cm}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

ماز

۷۱- معادلهٔ نیرو ـ مکان یک نوسانگر هماهنگ ساده که بر روی پاره‌خطی به طول $۱۰cm$ در راستای محور x نوسان می‌کند، در SI به‌صورت $F=-۲۰x$ می‌باشد. بیشینهٔ انرژی پتانسیل این نوسانگر چند میلی‌ژول است؟

۱) ۰/۰۵ ۲) ۰/۰۲۵ ۳) ۵۰ ۴) ۲۵

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ⏱ ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۲۰۳)

طول پاره‌خط نوسان، ۲ برابر دامنهٔ نوسان (A) می‌باشد، پس $A = ۵cm$ است و طبق رابطهٔ نیروی وارد بر نوسانگر در هر نقطه، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} F = -۲۰x \\ F = -m\omega^۲x \end{cases} \Rightarrow m\omega^۲ = ۲۰$$

از طرفی برای به‌دست آوردن بیشینهٔ انرژی پتانسیل نوسانگر که همان انرژی مکانیکی می‌باشد، داریم:

$$U_{max} = E = \frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲ \xrightarrow{m\omega^۲=۲۰\ ,\ A=۰/۰۵m} E = \frac{۱}{۲}\times(\frac{۵}{۱۰۰})^۲ \times ۲۰ = ۱۰ \times \frac{۲۵}{۱۰۰۰۰} = ۰/۰۲۵J = ۲۵mJ$$

شتاب و نیروی نوسانگر

با ترکیب قانون هوک و قانون دوم نیوتون، می‌توانیم بنویسیم:

$$\begin{cases} F = ma \\ F = -kx \end{cases} \Rightarrow ma = -kx \Rightarrow a = \frac{-k}{m}x$$

از طرفی می‌دانیم در سامانهٔ جرم ـ فنر $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ است؛ بنابراین معادلهٔ شتاب - مکان نوسانگر به‌صورت زیر است:

$$a = -\omega^۲x$$

طبق رابطهٔ $a = -\omega^۲x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱- اندازهٔ شتاب یک نوسانگر با فاصلهٔ آن از مرکز نوسان یعنی مقدار x رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین داریم:

یک نوسانگر: $\frac{a_۲}{a_۱} = \frac{x_۲}{x_۱}$

۲- بیشینهٔ شتاب نوسانگر در نقاط بازگشتی $(x = \pm A)$ است و برابر است با:

$$a_m = A\omega^۲$$

حال با توجه به رابطهٔ $F = ma$، درمی‌یابیم که معادلهٔ نیرو ـ مکان نوسانگر به‌صورت زیر است:

$$F = -m\omega^۲x$$

طبق رابطهٔ $F = m\omega^۲x$ به نتایج زیر می‌رسیم:

۱- برای یک نوسانگر اندازهٔ نیرو با فاصلهٔ نوسانگر از مرکز نوسان یعنی مقدار x رابطهٔ مستقیم دارد؛ بنابراین داریم:

یک نوسانگر: $\frac{F_۲}{F_۱} = \frac{x_۲}{x_۱}$

۲- بیشینهٔ نیروی نوسانگر در نقاط بازگشتی $(x = \pm A)$ است و برابر است با:

$$F_m = mA\omega^۲$$

یه نمونهٔ باحال

معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری در SI به‌صورت $x = ۰/۵\cos \pi t$ است.

۱- در لحظهٔ $t = ۰/۲۵s$، شتاب نوسانگر را به‌دست آورید. $(\pi = \sqrt{۱۰})$

$$t = ۰/۲۵s \Rightarrow x = ۰/۵\underbrace{\cos(\pi \times ۰/۲۵)}_{\cos\frac{\pi}{۴}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}} = ۰/۵ \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{\sqrt{۲}}{۴}m$$

WWW.ArefOnline.ir

$$a=-\omega^{2}x \xrightarrow{\omega=\pi\frac{rad}{s}=\sqrt{10}\frac{rad}{s}} a=-10(\frac{\sqrt{2}}{4})=\frac{-5\sqrt{2}}{2}\frac{m}{s^{2}}$$

۲- اگر جرم نوسانگر ۱۰۰g باشد، نیروی وارد بر نوسانگر را در لحظهٔ $t=\frac{5}{6}s$ به‌دست آورید.

$$t=\frac{5}{6}s \Rightarrow x=0/5\underbrace{\cos(\pi\times\frac{5}{6})}_{\cos\frac{5\pi}{6}=\frac{-\sqrt{3}}{2}}=\frac{-\sqrt{3}}{4}m$$

$$F=-m\omega^{2}x \xrightarrow[\omega^{2}=10\,,\ x=\frac{-\sqrt{3}}{4}m]{m=100g=0/1kg} F=-0/1\times10\times(\frac{-\sqrt{3}}{4})=\frac{\sqrt{3}}{4}N$$

۷۲- در لحظه‌ای که انرژی جنبشی یک نوسانگر هماهنگ ساده برابر با صفر است، بزرگی شتاب این نوسانگر برابر با $0/2\frac{m}{s^{2}}$ است. اگر بزرگی سرعت این نوسانگر در مرکز نوسان برابر با $0/1\frac{m}{s}$ باشد، زمانی که نوسانگر در فاصلهٔ ۲cm از نقطهٔ بازگشت قرار دارد، بزرگی شتابش چند متر بر مجذور ثانیه است؟

۱) ۰/۰۸ ۲) ۰/۱۲ ۳) ۸ ۴) ۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ استدلالی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۷ ـ ۱۲۰۳)

گام اول

انرژی جنبشی نوسانگر در نقاط بازگشت، صفر است که در این نقاط، شتاب نوسانگر بیشینه می‌باشد؛ بنابراین:

$$|a_{max}|=A\omega^{2}=0/2\frac{m}{s^{2}}$$

در مرکز نوسان، سرعت نوسانگر بیشینه است؛ بنابراین:

$$|v_{max}|=A\omega=0/1\frac{m}{s}$$

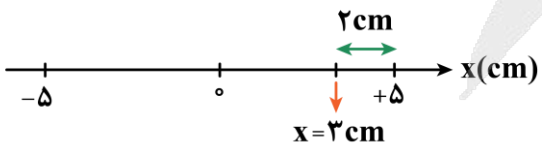
بنابراین:

$$\frac{A\omega}{A\omega^{2}}=\frac{0/1}{0/2}\Rightarrow\frac{1}{\omega}=\frac{1}{2}\Rightarrow\omega=2\frac{rad}{s}$$

$$A\omega=0/1\Rightarrow A\times2=0/1\Rightarrow A=0/05m$$

گام آخر

زمانی‌که فاصلهٔ نوسانگر تا نقطهٔ بازگشت برابر با ۲cm است، مکان نوسانگر $x=3cm$ می‌باشد.



$$a=-\omega^{2}x\Rightarrow a=-2^{2}\times\frac{3}{100}=-0/12\frac{m}{s^{2}}$$

$$\Rightarrow|a|=0/12\frac{m}{s^{2}}$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۳- میل‌لنگ یک خودرو که قطر محور آن ۵cm است، در هر دقیقه ۲۴۰۰ دور می‌چرخد. تندی نقطه‌ای روی لبهٔ محور این میل‌لنگ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۲π

۲) ۴π

۳) ۲

۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۹ ـ ۱۲۰۲)

کام اول

ابتدا زمان یک دور، یعنی دورهٔ تناوب میل‌لنگ را به روش تبدیل زنجیره‌ای محاسبه می‌کنیم:

$$T=\frac{۱\min}{۲۴۰۰\text{دور}}\times\frac{۶۰s}{۱\min}=\frac{۱}{۴۰}s=۰/۰۲۵s$$

کام آخر

با استفاده از رابطهٔ $T=\frac{۲\pi r}{v}$ و این‌که $r=۲/۵cm$ است، تندی این نقطه برابر است با:

$$v=\frac{۲\pi r}{T}=\frac{۲\pi\times۲/۵\times۱۰^{-۲}}{۰/۰۲۵}=۲\pi(\frac{m}{s})$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت

اگر ذره‌ای روی یک مسیر دایره‌ای با **تندی ثابت** حرکت کند، می‌گویند ذره دارای حرکت دایره‌ای یکنواخت است.

تندی حرکت ذره یکسان است، ولی با توجه به این‌که جهت سرعت حرکت ذره تغییر می‌کند؛ بنابراین این حرکت یک حرکت شتابدار است.

نکات

۱- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، همواره بردار سرعت ذره مماس بر مسیر حرکت دایره‌ای است.

۲- با توجه به این‌که تندی حرکت ذره در حرکت دایره‌ای یکنواخت، ثابت است؛ بنابراین در حرکت دایره‌ای یکنواخت، در بازه‌های زمانی برابر، ذره مسافت‌های یکسانی را طی می‌کند.

دورهٔ تناوب در حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت‌زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره را دورهٔ تناوب (دوره) می‌نامیم و آن را با T نمایش می‌دهیم.

از آنجا که در این حرکت، ذره محیط دایره $(۲\pi r)$ را با تندی v در مدت‌زمان T طی می‌کند، داریم:

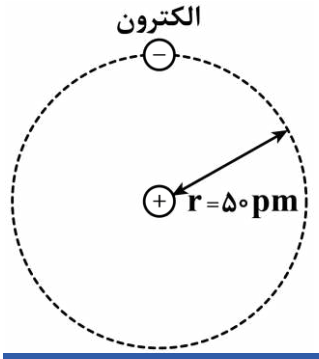
$$T=\frac{۲\pi r}{v}$$

نکته

یکای دوره در SI برابر با ثانیه (s) است.

WWW.ArefOnline.ir

۷۴- مطابق شکل زیر، الکترونی به جرم $۹\times۱۰^{-۳۱}kg$ حول پروتونی، حرکت دایره‌ای یکنواخت انجام می‌دهد. اندازهٔ شتاب مرکزگرا و تندی حرکت الکترون به‌ترتیب از راست به چپ برحسب SI در کدام گزینه به‌درستی آمده‌اند؟



($k=۹\times۱۰^{۹}\frac{N.m^{۲}}{C^{۲}}$ ، $e=۱/۶\times۱۰^{-۱۹}C$ و نیروی وزن ناچیز است.)

۱) $۱/۰۲۴\times۱۰^{۲۳}$ و $۱/۶\times۱۰^{۶}$

۲) $۱/۰۲۴\sqrt{۲}\times۱۰^{۲۳}$ و $۱/۶\times۱۰^{۶}$

۳) $۱/۰۲۴\times۱۰^{۲۳}$ و $۱/۶\sqrt{۲}\times۱۰^{۶}$

۴) $۱/۰۲۴\sqrt{۲}\times۱۰^{۲۳}$ و $۱/۶\sqrt{۲}\times۱۰^{۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بَر ـ صفحهٔ ۵۲ ـ ۱۲۰۲)

گام اول

نیروی الکتریکی وارد بر الکترون از طرف پروتون، نقش نیروی مرکزگرا را دارد:

$$F_C=k\frac{|q_۱||q_۲|}{r^{۲}}=۹\times۱۰^{۹}\times\frac{(۱/۶\times۱۰^{-۱۹})^{۲}}{(۵۰\times۱۰^{-۱۲})^{۲}}=\frac{۹\times(۱/۶)^{۲}}{۲۵}\times۱۰^{-۷}N$$

گام دوم

با توجه به قانون دوم نیوتون، اندازهٔ شتاب مرکزگرا برابر است با:

$$a_C=\frac{F_C}{m}=\frac{\frac{۹\times(۱/۶)^{۲}}{۲۵}\times۱۰^{-۷}}{۹\times۱۰^{-۳۱}}=۱/۰۲۴\times۱۰^{۲۳}\frac{m}{s^{۲}}$$

گام آخر

برای محاسبهٔ تندی حرکت الکترون می‌توان نوشت:

$$a_C=\frac{v^{۲}}{r}\Rightarrow v=\sqrt{ra_C}=\sqrt{(۵۰\times۱۰^{-۱۲})\times۱/۰۲۴\times۱۰^{۲۳}}$$

$$\Rightarrow v=\sqrt{۵/۱۲\times۱۰^{۱۲}}=۱/۶\sqrt{۲}\times۱۰^{۶}\frac{m}{s}$$

حرکت دایره‌ای یکنواخت

در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اندازهٔ سرعت ثابت است اما جهت آن دائماً تغییر می‌کند. بنا به همین دلیل این حرکت، شتابدار است و جهت این شتاب همواره به سمت مرکز دایره است. از این جهت به این شتاب، شتاب مرکزگرا می‌گویند. درنتیجه اگر جسمی با تندی ثابت v بر روی دایره‌ای به شعاع r حرکت کند، اندازهٔ شتاب مرکزگرای آن از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$a_C=\frac{v^{۲}}{r}$$

a_C : شتاب مرکزگرا برحسب $\frac{m}{s^{۲}}$

بر جسمی به جرم m که بر روی دایره‌ای با شعاع r با تندی ثابت v حرکت می‌کند، نیرویی به سمت مرکز دایره وارد می‌شود که به آن نیروی مرکزگرا می‌گویند. براساس قانون دوم نیوتون $(F=ma)$ اندازهٔ نیروی مرکزگرا برابر است با:

$$F_C=ma_C\xrightarrow{a_C=\frac{v^{۲}}{r}}F_C=\frac{mv^{۲}}{r}$$

F_{net} : نیروی خالص برحسب N

WWW.ArefOnline.ir

۷۵- کدام گزینه در ارتباط با حرکت دایره‌ای ماهواره‌ها به دور زمین صحیح است؟

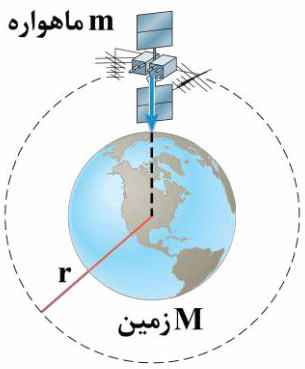
۱) مربع دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مکعب فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین است.

۲) مربع دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مکعب فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین است.

۳) مکعب دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مربع فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین است.

۴) مکعب دورهٔ گردش ماهواره‌ها به دور زمین، متناسب با مربع فاصلهٔ ماهواره از سطح زمین است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۴ ـ ۱۲۰۲)



دورهٔ چرخش ماهواره‌ای به جرم m که به‌واسطهٔ نیروی گرانشی بین زمین و ماهواره در فاصلهٔ r از مرکز زمین روی مدار دایره‌ای‌شکل به دور زمین می‌چرخد، برابر است با:

$$\begin{cases} F_C = G\dfrac{mM_e}{r^2} \\ F_C = m\dfrac{v^2}{r} \xrightarrow{v=\frac{2\pi r}{T}} F_C = \dfrac{m4\pi^2 r}{T^2} \end{cases} \Rightarrow \frac{GmM_e}{r^2} = m\frac{4\pi^2 r}{T^2} \Rightarrow T^2 = \frac{4\pi^2}{GM_e}r^3$$

بنابراین **مربع دورهٔ گردش ماهواره** با **مکعب** فاصله از **مرکز زمین**، متناسب است.

نکات

برای ماهواره‌ای که در فاصلهٔ r از مرکز زمین درحال چرخش است:

۱- شتاب مرکزگرا برابر با شتاب گرانشی زمین در محل ماهواره است:

$$a_C = g = G\frac{M_e}{r^2}$$

۲- تندی مداری ماهواره از رابطهٔ $v = \sqrt{G\frac{M_e}{r}}$ به‌دست می‌آید.

۳- دورهٔ چرخش ماهواره از رابطهٔ $T = \sqrt{\frac{4\pi^2 r^3}{G.M_e}}$ به‌دست می‌آید.

۴- اگر فاصلهٔ ماهواره از مرکز زمین، از r_1 به r_2 تغییر کند، داریم:

$$\frac{v_2}{v_1} = \sqrt{\frac{r_1}{r_2}} \quad , \quad \left(\frac{T_2}{T_1}\right)^2 = \left(\frac{r_2}{r_1}\right)^3$$

WWW.ArefOnline.ir

بودجه‌بندی این آزمون

شیمی ۳: مولکول‌ها در خدمت تندرستی: کل فصل / آسایش و رفاه در سایه شیمی: کل فصل
صفحه‌های ۱ تا ۶۶

سهم در کنکور

مباحث این آزمون در مجموع ۹ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

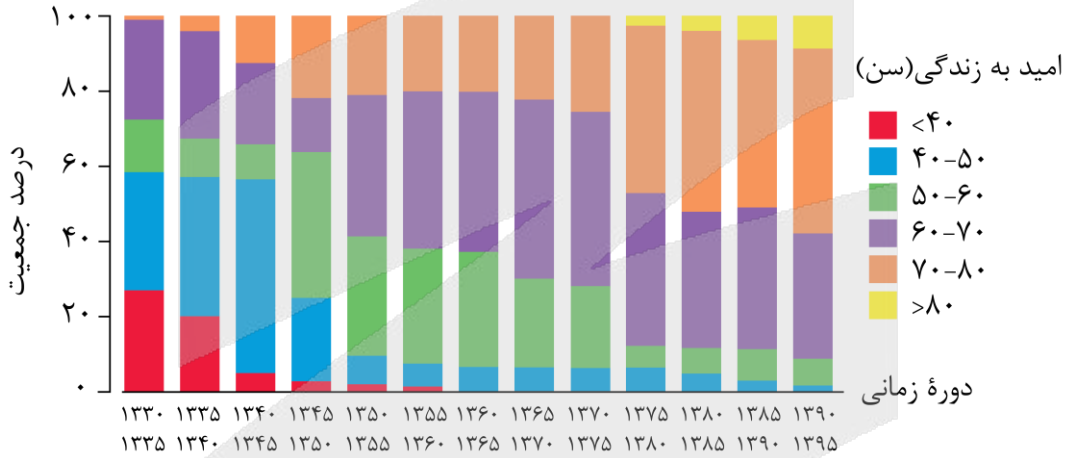
برای دیدن پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!
یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!
پاسخنامهٔ ویدئویی

۷۶- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) در طول سال‌های اخیر، میزان شاخص امید به زندگی برای بیش از ۵۰٪ مردم ساکن در جهان، کمتر از ۵۰ سال است.
۲) اوره، از جمله مواد نیتروژن‌دار محلول در آب بوده و بین ذرات سازنده آن امکان ایجاد پیوندهای هیدروژنی وجود دارد.
۳) با گذشت زمان، میانگین امید به زندگی در جهان، به میانگین امید به زندگی مناطق توسعه یافته نزدیک‌تر می‌شود.
۴) عدد اکسایش اتم‌های کربن در اتیلن گلیکول، منفی‌تر از عدد اکسایش اتم کربن در ساختار دی‌کلرومتان است.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۲۰۱)

نمودار زیر، **میزان شاخص امید به زندگی مردم جهان** را در طول تاریخ نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، در طول سال‌های اخیر میزان شاخص امید به زندگی برای اغلب مردم ساکن در جهان در بازهٔ بین **۷۰** تا **۸۰ سال** قرار دارد. در **آخرین بازه زمانی** نشان داده شده در این نمودار (سال ۱۳۹۰ تا ۱۳۹۵)، **بیشتر از ۵۰٪ مردم** طول عمر بیشتر از **۷۰ سال** دارند و با گذشتن زمان نیز طول عمر افراد در حال **افزایش** است.

شاخص امید به زندگی

شاخص امید به زندگی نشان می‌دهد با توجه به خطراتی که انسان‌ها در طول زندگی با آن مواجه هستند، به‌طور میانگین چند سال در این جهان زندگی می‌کنند. امید به زندگی شاخصی است که در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای یک کشور نیز با هم تفاوت دارد، زیرا این شاخص به عوامل گوناگونی بستگی دارد. مقدار این شاخص در سطح جهان، در حال حاضر تقریباً برابر با ۶۵ سال است.

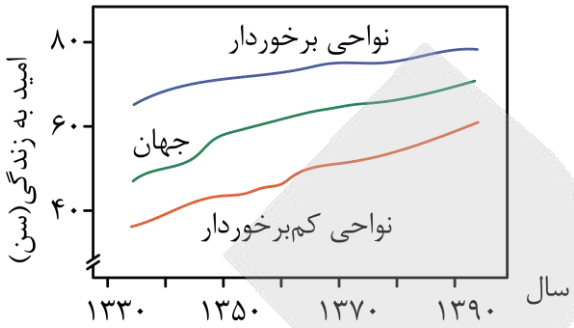
بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) **اوره**، از مولکول‌های **قطبی** تشکیل شده و از جمله مواد **محلول در آب** به شمار می‌رود. چون اوره دارای اتم‌های **هیدروژن متصل به نیتروژن** است، بین مولکول‌های این ماده امکان برقرار شدن پیوند **هیدروژنی** وجود دارد. اطلاعات مربوط به اوره، به‌صورت زیر است:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
اوره	$CO(NH_2)_2$	$O=C(NH_2)_2$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

WWW.ArefOnline.ir

۳) با گذشت زمان، امید به زندگی در سطح جهان هم در نواحی **کم برخوردار** و هم در نواحی توسعه یافته **افزایش** یافته است و میانگین امید به زندگی در جهان، به میانگین امید به زندگی مناطق توسعه یافته **نزدیک‌تر** می‌شود. نمودار زیر، **روند تغییر مقدار امید به زندگی** را نشان می‌دهد:

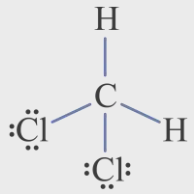


با توجه به نمودار، در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان **افزایش** پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق **کم‌برخوردار**، **بیشتر** از مناطق **برخوردار** بوده است، اما هنوز هم **میزان امید به زندگی** در نواحی برخوردار جهان در حدود **۲۰ سال بیشتر** از مناطق کم‌برخوردار است.

۴) جدول زیر، اطلاعات مختلفی از اتیلن گلیکول را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
اتیلن گلیکول	CH_2OHCH_2OH	$HO-CH_2-CH_2-OH$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

اتیلن گلیکول، یک **الکل دو عاملی** است که از آن برای تهیه **ضدیخ** نیز استفاده می‌شود. در ساختار مولکولی این ماده، هر اتم کربن به ۱ اتم کربن، ۱ اتم اکسیژن و ۲ اتم هیدروژن متصل شده است، پس عدد اکسایش هر اتم کربن در این ماده برابر با ۱− می‌شود. در ساختار دی‌کلرومتان (CH_2Cl_2)، یک اتم کربن به ۲ اتم هیدروژن و ۲ اتم کلر متصل شده است. عدد اکسایش این اتم کربن برابر با **صفر** می‌شود. ساختار دی‌کلرومتان به‌صورت زیر است:



۷۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ چربی‌ها، حاوی برخی از انواع مواد اسیدی بوده و نیروی بین مولکولی غالب در آن‌ها از نوع واندروالسی است.

ب ـ فقط یکی از کاتیون‌هایی که باعث افزایش درجه سختی آب می‌شوند، در آرایش خود ۲ لایه پر از الکترون دارد.

ج ـ اسید چرب سازندهٔ استر سه عاملی با فرمول $C_{57}H_{104}O_6$، سیرشده بوده و دارای ۱۸ اتم کربن است.

د ـ با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، بخش قطبی ذرات صابون در کنار هم قرار می‌گیرد.

۱) «الف» و «ج»　　۲) «الف» و «د»　　۳) «ب» و «ج»　　۴) «ب» و «د»

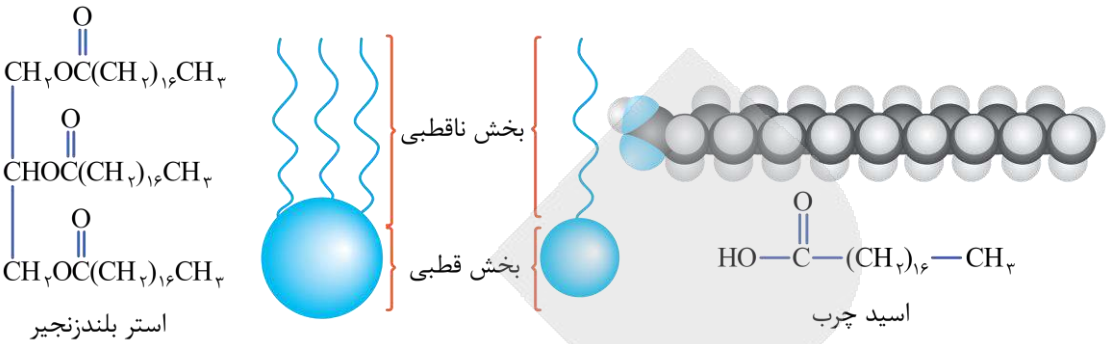
پاسخ: گزینهٔ ۲　　**(سخت ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)**

عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

WWW.ArefOnline.ir

بررسی موارد:

الف) چربی‌ها مخلوطی از **اسیدهای چرب** و **استرهای** بلند **زنجیر** هستند که بخش ناقطبی آن‌ها بر بخش قطبی‌شان غلبه دارد و در نتیجه نیروی بین مولکولی **غالب** در آن‌ها از نوع **واندروالسی** است. ساختار ذرات موجود در چربی‌ها را می‌توان به‌صورت زیر نشان داد:



توجه داریم که **اسیدهای چرب**، خاصیت **اسیدی** بسیار ملایمی داشته و انحلال‌پذیری آن‌ها در آب **بسیار ناچیز** است.

ب) نوع و میزان یون‌های موجود در آب، بر قدرت پاک‌کنندگی صابون‌ها تأثیر دارد. در صورتی که آب مورد استفاده برای شستن لباس‌ها، حاوی کاتیون‌های **کلسیم** و **منیزیم** باشد (به چنین آب‌هایی، به اصطلاح **آب سخت** گفته می‌شود)، قدرت پاک‌کنندگی صابون **کاهش** پیدا می‌کند. در آرایش الکترونی هر دو یون کلسیم و منیزیم، فقط لایه‌های الکترونی اول و دوم پر از الکترون هستند و هیچ لایه پر از الکترون دیگری وجود ندارد. در رابطه با این دو یون، داریم:

$Mg^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6$

$Ca^{2+}: 1s^2 2s^2 2p^6 3s^2 3p^6$

آب‌های سخت

مولکول‌های صابون، بر اساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:

واکنش صابون با یون کلسیم:

$$2RCOONa(aq) + Ca^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Ca(s) + 2Na^+(aq)$$

واکنش صابون با یون منیزیم:

$$2RCOONa(aq) + Mg^{2+}(aq) \rightarrow (RCOO)_2Mg(s) + 2Na^+(aq)$$

رسوب‌های تولید شده در این واکنش‌ها، سفید رنگ بوده و رد آن‌ها بر روی لباس‌ها باقی می‌ماند. همان‌طور که مشخص است، نسبت شمار آنیون‌ها به شمار کاتیون‌ها در این رسوب‌ها برابر با ۲ خواهد بود.

ج) ترکیبی با فرمول مولکولی $C_{57}H_{104}O_6$، مربوط به یک **استر سه عاملی** مثل روغن زیتون است که الکل سازندهٔ آن معادل با $C_3H_8O_3$ بوده و تعداد اتم‌های کربن و هیدروژن اسید چرب سازندهٔ آن نیز قابل محاسبه هستند. در رابطه با کربن، داریم:

شمار اتم‌های کربن الکل + مجموع شمار اتم‌های کربن سه اسید چرب = شمار اتم‌های کربن استر

$$57 = 3 + (3 \times x) \rightarrow x = 18$$

در رابطه با اتم هیدروژن نیز داریم:

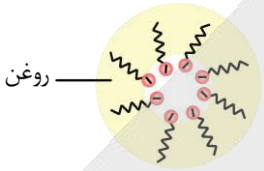
شمار اتم هیدروژن الکل + مجموع شمار اتم هیدروژن سه اسید چرب = شمار اتم هیدروژن استر + مجموع اتم هیدروژن سه مولکول آب

$$104 + 6 = 8 + (3 \times y) \rightarrow y = 34$$

فرمول مولکولی اسید چرب در صورت سیرشده بودن، به‌صورت $C_nH_{2n}O_2$ است. چون در اسید چرب سازندهٔ این استر نسبت $\frac{34}{18} < 2$ برقرار است، در نتیجه این ماده یک اسید چرب **سیر نشده** خواهد بود. در واقع در ساختار این ماده **یک پیوند** $C = C$ وجود دارد.

WWW.ArefOnline.ir

روغن زیتون، نوعی ترکیب آلی است که با استفاده از مولکول‌های **ناقطبی** ساخته شده است. با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، یک **کلوئید پایدار** ایجاد می‌شود که در آن، **بخش قطبی ذرات صابون** (گروه $-COO^-$) در کنار هم و در وسط **توده‌های مولکولی** قرار گرفته و بخش **ناقطبی ذرات صابون** (دم هیدروکربنی) در مجاورت با **روغن زیتون** قرار می‌گیرد. تصویر زیر، نمایی از فرایند قرارگیری مولکول‌های صابون (همان بخش آنیونی صابون) در کنار هم در مخلوطی از صابون و روغن زیتون را نشان می‌دهد:



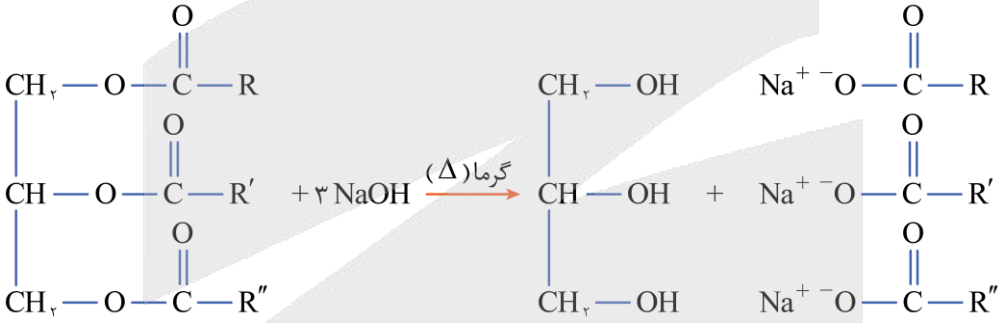
۷۸- بر اثر واکنش ۲۴۰ گرم از یک استر سنگین سه عاملی با مقدار کافی محلول سود سوزآور، ۲۴۸/۴ گرم صابون جامد با فرمول شیمیایی $C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na$ تولید شده است. جرم مولی استر سنگین مصرف شده برابر با چند گرم است؟

$(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۷۵۸ ۲) ۸۸۴ ۳) ۸۴۲ ۴) ۸۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

بر اثر واکنش یک **مول استر سنگین سه عاملی** با مقدار کافی **محلول سود سوزآور**، **سه مول صابون جامد** تولید می‌شود:



برای پیدا کردن فرمول آنیون صابون، $C_۳H_۵$ را از فرمول مولکولی استر سنگین کم کرده و آن را بر سه تقسیم می‌کنیم:

$$\text{فرمول مولکولی } RCOO^- = \frac{\text{فرمول مولکولی استر سنگین} - C_۳H_۵}{۳}$$

فرمول شیمیایی صابون تولید شده به‌صورت $C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na$ است که در صورت سؤال نیز به آن اشاره شده است. جرم مولی این صابون، برابر با **۲۷۶ گرم بر مول** است. بر این اساس، مقدار **مول صابون تولید شده** را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na = \frac{\text{جرم } C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na}{\text{جرم مولی } C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na} = \frac{۲۴۸/۴\ g\ C_{۱۶}H_{۲۹}O_۲Na}{۲۷۶} = ۰/۹\ mol$$

در این فرایند، **۰/۹ مول صابون** تولید شده است. همان‌طور که می‌دانیم، به ازای مصرف هر **مول استر سنگین**، **۳ مول صابون** تولید می‌شود؛ پس مقدار مول استر مصرف شده در این واکنش که منجر به تولید **۰/۹ مول** صابون شده، برابر با **۰/۳ مول** بوده است. از طرفی، طبق فرض سؤال، در این واکنش **۲۴۰ گرم استر سنگین** مصرف شده است. بر این اساس، در رابطه با جرم مولی استر سنگین داریم:

$$\text{مول استر سنگین} = \frac{\text{جرم استر سنگین}}{\text{جرم مولی استر سنگین}} \Longrightarrow ۰/۳ = \frac{۲۴۰\ g \text{ استر سنگین}}{x} \Longrightarrow x = ۸۰۰\ g.mol^{-۱}$$

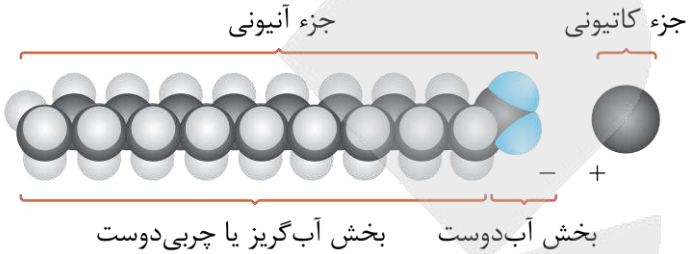
WWW.ArefOnline.ir

۷۹- با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی در ساختار نوعی صابون، ..... .

۱) انحلال‌پذیری صابون در آب بیشتر می‌شود
۲) درصد جرمی اکسیژن در صابون کاهش می‌یابد
۳) حالت فیزیکی صابون تغییر می‌کند
۴) قدرت نیروهای بین ذره‌ای صابون با آب افزایش می‌یابد

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶ ـ ۱۲۰۱)

هم ساختار **صابون** و هم ساختار پاک‌کننده **غیر صابونی**، از دو بخش **قطبی** و **ناقطبی** تشکیل می‌شود. در این پاک‌کننده‌ها، هیچ‌یک از بخش‌ها بر دیگری غلبه ندارد و به همین علت، این مواد هم در **آب** و هم در **چربی** حل می‌شوند. برای مثال، ساختار صابون‌های جامد به‌صورت زیر است:



صابون‌های **جامد**، نمک **سدیم** اسیدهای چرب هستند و می‌توان آن‌ها را با فرمول کلی $RCOONa$ نشان داد که در آن، گروه R نشان‌دهندهٔ یک زنجیر هیدروکربنی بلند است. اگر بخش R در صابون‌ها معادل با زنجیر **آلکیلی** باشد، فرمول کلی این صابون‌ها $C_{n+1}H_{2n+1}O_2Na$ خواهد بود. با افزایش طول زنجیر هیدروکربنی در ساختار صابون مورد نظر، جرم مولی این ماده **افزایش** پیدا می‌کند اما جرم اتم‌های **اکسیژن** موجود در این ماده **ثابت** باقی می‌ماند. با افزایش جرم مولی صابون، درصد جرمی اکسیژن در آن **کاهش** پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با **افزایش** طول زنجیر هیدروکربنی (بخش ناقطبی) در صابون، ذرات این ماده **ناقطبی‌تر** شده و بر این اساس، **انحلال‌پذیری** صابون در آب به‌عنوان یک **حلال قطبی**، **کاهش** پیدا می‌کند.

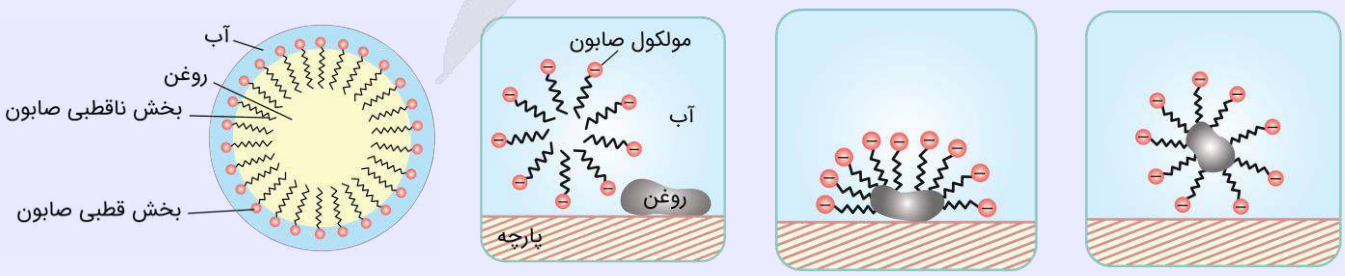
۳) **حالت فیزیکی** صابون، تحت تأثیر نوع **کاتیون** موجود در آن بوده و تغییر طول زنجیر هیدروکربنی صابون، تأثیری روی حالت فیزیکی آن ندارد.

۴) با **افزایش** طول زنجیر هیدروکربنی در صابون، ذرات این ماده **ناقطبی‌تر** شده و **قدرت نیروهای بین ذره‌ای** صابون با آب **کاهش** پیدا می‌کند.

مکانیسم عمل پاک‌کننده‌ها

پاک‌کننده‌ها بر اساس مکانیسم عملکرد خود به دو دسته پاک‌کننده‌های کلوئیدساز و خورنده تقسیم می‌شوند. در این رابطه، داریم:

۱) پاک‌کننده‌های کلوئیدساز که شامل صابون و پاک‌کننده غیرصابونی هستند، از دو بخش قطبی و غیرقطبی تشکیل‌شده‌اند. این پاک‌کننده‌ها از سمت بخش قطبی با مولکول‌های آب و از سمت بخش ناقطبی با مولکول‌های چربی یا روغن جاذبه برقرار می‌کنند. در این حالت قطرات چربی به‌صورت توده مولکولی درآمده و اطراف آن را پاک‌کننده‌ها می‌پوشانند. در این حالت، ذرات پاک‌کننده به گونه‌ای قرار می‌گیرند که سمت ناقطبی آن‌ها به سمت داخل (توده چربی) و سمت قطبی آن‌ها به سمت بیرون (آب) است. در این رابطه، داریم:



۲) پاک‌کننده‌های خورنده شامل مواد اسیدی یا بازی هستند که علاوه بر داشتن برهم‌کنش فیزیکی با آلاینده‌ها، با آن‌ها واکنش شیمیایی نیز می‌دهند و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند. مواد محلول ایجاد شده طی این فرایند، از محل لکه شسته خواهند شد.

WWW.ArefOnline.ir

۸۰- اگر زنجیر آلکیل متصل به بخش آب‌دوست یک صابون جامد دارای ۱۶ اتم کربن باشد، چند گرم از این صابون با ۴ لیتر محلول ۰/۴ مولار کلسیم کلرید به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟ $(Na = ۲۳ , O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۴۴۴/۸ ۲) ۸۸۹/۶ ۳) ۴۶۷/۲ ۴) ۹۳۴/۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۹ ـ ۱۲۰۱)

پاک‌کننده‌های صابونی، از جمله موادی هستند که از آن‌ها برای پاک کردن لکه‌ها و قطره‌های چربی استفاده می‌شود. اگر به‌جای اتم **هیدروژن** موجود در ساختار گروه کربوکسیل اسیدهای چرب، **کاتیون سدیم** قرار داده شود، **صابون** یا همان نمک **سدیم** اسیدهای چرب به دست می‌آید. این نوع از صابون‌ها حالت **جامد** دارند و فرمول همگانی آن‌ها به‌صورت $RCOONa$ است که بخش R موجود در آن، یک زنجیره هیدروکربنی **بلند** است. طبق صورت سؤال، تعداد اتم کربن زنجیر آلکیلی $(C_nH_{۲n+۱})$ برابر با ۱۶ است، بنابراین فرمول شیمیایی صابون موردنظر $C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na$ خواهد بود. بر این اساس، داریم:

$$\text{جرم مولی صابون موردنظر} = (۱۷ \times ۱۲) + (۳۳ \times ۱) + (۲ \times ۱۶) + ۲۳ = ۲۹۲ g.mol^{-۱}$$

هر مول یون کلسیم موجود در محلول کلسیم کلرید، با **۲ مول صابون** واکنش داده و به رسوب تبدیل می‌شود. معادله واکنش صابون مورد نظر با کاتیون‌های کلسیم به‌صورت زیر است:

$$۲C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na(aq) + Ca^{۲+}(aq) \rightarrow (C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲)_۲Ca(s) + ۲Na^{+}(aq)$$

بر این اساس، جرم صابون مورد نیاز برای واکنش با **۴ لیتر محلول ۰/۴ مولار کلسیم کلرید** را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\ C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na = ۴\ L \text{ محلول کلسیم کلرید} \times \frac{۰/۴\ mol\ CaCl_۲}{۱\ L \text{ محلول کلسیم کلرید}} \times \frac{۱\ mol\ Ca^{۲+}}{۱\ mol\ CaCl_۲} \times \frac{۲\ mol\ C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na}{۱\ mol\ Ca^{۲+}} = ۳/۲\ mol$$

جرم مولی صابون، برابر با ۲۹۲ گرم بر مول است. بر این اساس، داریم:

$$?\,g\ C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na = ۳/۲\ mol\ C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na \times \frac{۲۹۲\ g\ C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na}{۱\ mol\ C_{۱۷}H_{۳۳}O_۲Na} = ۹۳۴/۴\ g$$

صابون‌ها

صابون‌های مایع، نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب و صابون‌های جامد نیز نمک سدیم اسیدهای چرب هستند. فرمول شیمیایی صابون‌های جامد را می‌توان به‌صورت $RCOONa$ نشان داد که در آن گروه R نشان‌دهنده زنجیر هیدروکربنی بلند است. اگر R زنجیر آلکیلی باشد، فرمول شیمیایی کلی این صابون‌ها به‌صورت $C_nH_{۲n-۱}O_۲Na$ خواهد بود. بین قسمت آب‌دوست از بخش آنیونی مولکول‌های صابون و مولکول‌های آب، نیروی جاذبه یون ـ دوقطبی برقرار می‌شود. در این حالت، مولکول‌های آب از سر مثبت خود (از طرف اتم‌های هیدروژن) به طرف قسمت آب‌دوست مولکول‌های صابون جذب می‌شوند.

۸۱- اگر مقدار مول برابر از ..... و ..... را به‌صورت مجزا در حجم یکسان از آب مقطر حل کنیم، شمار یون‌ها در دو محلول ایجاد شده برابر خواهد بود.

۱) گاز هیدروژن فلوئورید ـ نمونه جامد لیتیم اکسید
۲) گاز آمونیاک ـ نمونه جامد دی‌نیتروژن پنتاکسید
۳) گاز گوگرد تری‌اکسید ـ نمونه باریم اکسید
۴) نمونه لیتیم هیدروکسید ـ نیترو اسید

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

گاز گوگرد تری‌اکسید، از جمله **اسیدهای آرنیوس** بوده و **سولفوریک اسید** را تولید می‌کند. بر اساس واکنش زیر، از انحلال یک **مول** گوگرد **تری‌اکسید**، دو مول یون H^+ و یک مول یون $SO_۴^{۲-}$ تولید می‌شود:

$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow ۲H^{+}(aq) + SO_۴^{۲-}(aq)$$

باریم اکسید نیز یک نوع **اکسید بازی** بوده و در مجاورت با آب، **باریم هیدروکسید** را تولید می‌کند. از انحلال یک مول باریم اکسید در آب نیز دو مول یون OH^- و یک مول یون $Ba^{۲+}$ تولید می‌شود:

$$BaO(s) + H_۲O(l) \rightarrow Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^{-}(aq)$$

اگر مول گاز گوگرد تری‌اکسید و نمونه باریم اکسید با هم **برابر** باشد، در محلول این ماده **مقدار مول برابر یون** تولید خواهد شد.

WWW.ArefOnline.ir

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هیدروفلوئوریک اسید یک **اسید ضعیف** است، درنتیجه از انحلال **یک مول گاز HF کمتر از ۲ مول یون** تولید می‌شود. معادله انحلال این ماده و **یونش** آن در آب، به‌صورت زیر است:

$$HF(g) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$$

از انحلال **یک مول** لیتیم اکسید در آب نیز **دو مول یون OH^-** و دو مول یون Li^+ تولید می‌شود. معادله واکنش این ماده با آب به‌صورت زیر است:

$$Li_2O(s) + H_2O(l) \rightarrow 2Li^+(aq) + 2OH^-(aq)$$

لیتیم اکسید، به‌صورت قطعی ۴ مول یون در محلول تولید کرده و شمار یون‌ها در محلول آن بیشتر از محلول هیدروفلوئوریک اسید خواهد بود.

۲) آمونیاک یک **باز ضعیف** است، درنتیجه از انحلال **یک مول** گاز NH_3 **کمتر از ۲ مول یون** تولید می‌شود. معادله انحلال این ماده و **یونش** آن در آب، به‌صورت زیر است:

$$NH_3(g) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

از انحلال یک مول دی‌نیتروژن پنتاکسید در آب نیز دو مول یون H^+ و دو مول یون NO_3^- تولید می‌شود:

$$N_2O_5(s) + H_2O(l) \rightarrow 2H^+(aq) + 2NO_3^-(aq)$$

دی‌نیتروژن پنتاکسید، **به‌صورت قطعی ۴ مول** یون در محلول تولید کرده و **شمار یون‌ها** در محلول آن **بیشتر** از محلول آمونیاک خواهد بود.

۴) از انحلال **یک مول** لیتیم هیدروکسید در آب یک مول یون OH^- و یک مول یون Li^+ تولید می‌شود. این ماده بر اساس معادله زیر در محلول خود به یون‌های مثبت و منفی **تفکیک** می‌شود:

$$LiOH(s) \rightarrow Li^+(aq) + OH^-(aq)$$

نیترو اسید یک اسید ضعیف است، درنتیجه از انحلال یک مول HNO_2 در محلول، **کمتر از ۲ مول یون** تولید می‌شود. فرایند **یونش** این ماده در محلول خود به‌صورت زیر است:

$$HNO_2(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_2^-(aq)$$

ماز

۸۲- درصد یونش مولکول‌های اسید HA در محلولی از این ماده با غلظت ۲۰ گرم بر لیتر، برابر با ۲/۵٪ است. pH محلول مورد نظر چقدر بوده و ثابت یونش این اسید در شرایط داده شده چقدر است؟ ($HA = 50\ g.mol^{-1}$)

۱) 4×10^{-4} ۲) 4×10^{-4} ۳) $2/5 \times 10^{-4}$ ۴) $2/5 \times 10^{-4}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

نوعی از بیان **غلظت** بر مبنای حجم محلول وجود دارد که **مقدار گرم حل‌شونده در هر لیتر محلول** را نشان می‌دهد. در رابطه با این نوع غلظت داریم:

$$\text{غلظت گرم بر لیتر} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$

در رابطه با این نوع از غلظت، می‌توان نوشت:

$$\text{جرم مولی حل‌شونده} \times \text{غلظت مولی محلول} = \text{غلظت گرم بر لیتر} = \frac{\text{جرم مولی حل‌شونده} \times \text{مول حل‌شونده}}{\text{لیتر محلول}}$$

بر این اساس، **غلظت مولی اسید HA** در محلول این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$[HA] = \frac{\text{غلظت گرم بر لیتر } HA}{\text{جرم مولی } HA} = \frac{20\ g.L^{-1}}{50\ g.mol^{-1}} = 0/4\ mol.L^{-1}$$

WWW.ArefOnline.ir

معادله یونش اسید HA به‌صورت زیر است:

$$HA(aq) \rightarrow A^-(aq) + H^+(aq)$$

با توجه به **درجه یونش** این اسید، **غلظت یون هیدرونیوم** را محاسبه کرده و پس از آن، **pH محلول** را به‌دست می‌آوریم:

$$[H_3O^+] = \text{غلظت اسید} \times \frac{\text{درصد یونش}}{100} \Longrightarrow [H_3O^+] = 0/4 \times \frac{2/5}{100} = 0/01\ mol.L^{-1}$$
$$pH = -log[H_3O^+] = -log(0/01) = 2$$

در مرحله بعد، باید **ثابت یونش (K_a) اسید داده شده** را به‌دست بیاوریم:

$$K_a = \frac{\alpha^2 \times M}{1-\alpha} \xrightarrow{\alpha<0/05} K_a = \alpha^2 \times M \Rightarrow K_a = \left(\frac{2/5}{100}\right)^2 \times 0/4 = 2/5 \times 10^{-4}\ mol.L^{-1}$$

۸۳- مقداری گاز متیل‌آمین ($K_b = 2 \times 10^{-5}$) را در آب حل کرده و حجم محلول را به ۳/۵ لیتر می‌رسانیم. اگر pH محلول حاصل از این فرایند برابر با ۱۱/۶ شده باشد، حجم گاز متیل آمین حل شده در محلول برابر چند لیتر است؟ (در شرایط آزمایش، حجم هر مول ماده گازی برابر ۲۴ لیتر است.)

۱) ۲۲/۴ ۲) ۴۴/۸ ۳) ۳۳/۶ ۴) ۶۷/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۹ ـ ۱۲۰۱)

در قدم اول، با توجه به **pH محلول**، **غلظت یون هیدروکسید** تولید شده در آن را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = 10^{pH-14} \Longrightarrow [OH^-] = 10^{11/6-14} = 4 \times 10^{-3}$$

در مرحله بعد، با توجه به **غلظت یون هیدروکسید** در این محلول، **غلظت متیل‌آمین حل شده** در آن (M) را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = \sqrt{K_b \times M} \Rightarrow 4 \times 10^{-3} = \sqrt{2 \times 10^{-5} \times M} \Rightarrow 16 \times 10^{-6} = 2 \times 10^{-5} \times M \Rightarrow M = 0/8\ mol.L^{-1}$$

در قدم آخر، با توجه به **حجم محلول**، **حجم گاز متیل‌آمین (CH_3NH_2) حل شده** در آن را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ L\ CH_3NH_2 = 3/5\ L \text{ محلول} \times \frac{0/8\ mol\ CH_3NH_2}{1\ L \text{ محلول}} \times \frac{24\ L\ CH_3NH_2}{1\ mol\ CH_3NH_2} = 67/2\ L$$

بر این اساس، **۶۷/۲ لیتر گاز متیل‌آمین** (معادل با **۲/۸** مول گاز متیل‌آمین) در محلول مورد نظر حل شده است. توجه داریم که برای حل این سؤال، اصلاً نیازی به دانستن فرمول شیمیایی متیل‌آمین نداریم.

۸۴- اگر به ۰/۵ لیتر محلول ۰/۰۰۲ مولار اسید ضعیف HA، مقدار ۲۴ لیتر آب خالص اضافه کنیم، pH محلول چند واحد تغییر پیدا می‌کند و ۵۰ میلی‌لیتر از محلول غلیظ اولیه با چند مول سدیم هیدروکسید واکنش داده و خنثی می‌شود؟

۱) 10^{-4} - ۱/۷ ۲) 2×10^{-4} - ۱/۷ ۳) 2×10^{-4} - ۰/۸۵ ۴) 10^{-4} - ۰/۸۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

با **رقیق کردن** اسیدها و بازهای **قوی** به اندازه **n برابر**، **pH** آن‌ها به اندازه $\log n$ به pH ناحیه خنثی (در **شرایط اتاق**، pH برابر با ۷) **نزدیک‌تر** می‌شود. همچنین با **رقیق کردن** اسیدها و بازهای ضعیف به اندازه n برابر، **pH محلول آن‌ها** به اندازه $\frac{1}{2}\log n$ به pH ناحیه خنثی **نزدیک‌تر** می‌شود. در این سؤال به اندازه **۴۸ برابر** مقدار اولیه به محلول آب اضافه شده است. در این رابطه، داریم:

$$\text{حجم محلول نهایی} = \text{حجم محلول اولیه} + \text{حجم آب اضافه شده} = 0/5 + 24 = 24/5\ L$$

بر این اساس، می‌توان گفت حجم محلول مورد نظر **۴۹ برابر** حالت اولیه و **غلظت اسید** در محلول مورد نظر $\frac{1}{49}$ برابر شده است. با توجه به نکته بالا، مقدار pH این محلول به اندازه **۰/۸۵ واحد** ($\frac{1}{2}\log 49 = \log 7 = 0/85$) به ناحیه خنثی نزدیک می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

اسید ضعیف مورد نظر طبق معادله زیر با **سدیم هیدروکسید** واکنش می‌دهد:

$$HA(aq) + NaOH(s) \longrightarrow NaA(aq) + H_2O(l)$$

در واقع، **هر مول** سدیم هیدروکسید با یک **مول از اسید** مورد نظر واکنش داده و آن را خنثی می‌کند. حال **مقدار سدیم هیدروکسید** ($NaOH$) مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ mol\ NaOH = ۵۰\ mL\ \text{محلول اسیدی} \times \frac{۱\ L\ \text{محلول اسیدی}}{۱۰۰۰\ mL\ \text{محلول اسیدی}} \times \frac{۰/۰۰۲\ mol\ HA}{۱\ L\ \text{محلول اسیدی}} \times \frac{۱\ mol\ NaOH}{۱\ mol\ HA} = ۱۰^{-۴}\ mol$$

۸۵- اگر در محلولی از پتاسیم هیدروکسید، نسبت غلظت یون هیدروکسید به غلظت یون هیدروژن برابر با ۴×۱۰^{۶} باشد، pH این محلول برابر با ..... شده و غلظت یون پتاسیم در این محلول در مقیاس ppm برابر با ..... می‌شود. (چگالی محلول برابر با $۱/۰۴\ g.mL^{-۱}$ است. $K = ۳۹\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۰/۳ ـ ۵ ۲) ۱۰/۳ ـ ۷/۵ ۳) ۱۱/۳ ـ ۵ ۴) ۱۱/۳ ـ ۷/۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۳۴ ـ ۱۲۰۱)

در شرایط اتاق (دمای ۲۵°C)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ در محلول‌های آبی برابر $۱۰^{-۱۴}$ است. با توجه به نسبت میان غلظت یون هیدروکسید به غلظت یون هیدروژن در این محلول، غلظت هر کدام از این یون‌ها را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[OH^-][H^+] = ۱۰^{-۱۴} \xrightarrow{[OH^-]=۴\times۱۰^{۶}\times[H^+]} ۴ \times ۱۰^{۶} \times [H^+] \times [H^+] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [H^+] = \frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۱۰} mol.L^{-۱}$$

$$[OH^-][H^+] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow [OH^-] = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$$

خودیونش آب

براساس آزمایش‌های انجام‌شده، نمونه‌ای از آب خالص که فاقد هر گونه حل‌شونده‌ای است، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های موردنظر، براساس واکنش زیر در آب تولید می‌شوند:

$$H_2O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$$

ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = K_W = [OH^-]\ [H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_W در دمای اتاق، برابر با $۱۰^{-۱۴} mol^۲.L^{-۲}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است.

در قدم اول، با توجه به **غلظت مولی یون هیدروژن**، مقدار **pH این محلول** را محاسبه می‌کنیم.

$$pH = -log[H^+] = -log(\frac{۱}{۲} \times ۱۰^{-۱۰}) = ۱۰/۳$$

در محلول پتاسیم هیدروکسید (KOH)، **غلظت مولی یون پتاسیم** با **غلظت مولی یون هیدروکسید برابر است**. بر این اساس، ابتدا **جرم یون پتاسیم** موجود در **یک لیتر** از این محلول را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[OH^-] = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱} \Longrightarrow [K^+] = ۲ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$$

$$?\ g\ K^+ = ۱\ L\ \text{محلول} \times \frac{۲ \times ۱۰^{-۴}\ mol\ K^+}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۳۹\ g\ K^+}{۱\ mol\ K^+} = ۷/۸ \times ۱۰^{-۳}\ g$$

چگالی محلول برابر با **۱/۰۴ گرم بر میلی‌لیتر** است، پس **جرم هر لیتر** از آن برابر با **۱۰۴۰ گرم** می‌شود. بر این اساس، **غلظت ppm یون پتاسیم** را در این محلول بازی محاسبه می‌کنیم.

$$ppm = \frac{\text{جرم حل شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰^{۶} = \frac{۷/۸ \times ۱۰^{-۳}\ g\ K^+}{۱۰۴۰\ g\ \text{محلول}} \times ۱۰^{۶} = ۷/۵$$

WWW.ArefOnline.ir

۸۶- یک نمونه سدیم نیترات، در ساختار خود $۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۲}$ اتم اکسیژن دارد. با تجزیه این نمونه بر اساس معادله زیر، چند میلی‌لیتر گاز نیتروژن در شرایط استاندارد تولید شده و با استفاده از سدیم اکسید تولید شده، چند لیتر محلول سود با غلظت ۰/۱ مولار می‌توان تهیه کرد؟

$$NaNO_۳(s) \rightarrow Na_۲O(s) + O_۲(g) + N_۲(g)$$ معادله واکنش موازنه شود

۱) ۰/۵ - ۱۱۲ ۲) ۰/۵ - ۲۲۴ ۳) ۰/۲ - ۱۱۲ ۴) ۰/۲ - ۲۲۴

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۶ ـ ۱۲۰۱)

هر مول سدیم نیترات ($NaNO_۳$) در ساختار خود دارای **۳ مول اتم اکسیژن** است. با توجه به اینکه هر مول اتم شامل $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ ذره می‌شود، مقدار مول سدیم نیترات را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,mol\,NaNO_۳ = ۳/۶۱۲ \times ۱۰^{۲۲}\,atom\,O \times \frac{۱\,mol\,O}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,atom\,O} \times \frac{۱\,mol\,NaNO_۳}{۳\,mol\,O} = ۰/۰۲\,mol$$

معادله موازنه‌شده واکنش تجزیه سدیم نیترات به‌صورت زیر است:

$$۴NaNO_۳(s) \rightarrow ۲Na_۲O(s) + ۵O_۲(g) + ۲N_۲(g)$$

همان‌طور که می‌دانیم، در شرایط استاندارد (دمای ۰ درجه سانتی‌گراد و فشار ۱ اتمسفر)، **حجم یک مول** از گازهای گوناگون برابر با ۲۲/۴ **لیتر یا ۲۲۴۰۰ میلی‌لیتر** است. بر این اساس، داریم:

$$?\,mL\,N_۲ = ۰/۰۲\,mol\,NaNO_۳ \times \frac{۲\,mol\,N_۲}{۴\,mol\,NaNO_۳} \times \frac{۲۲۴۰۰\,mL\,N_۲}{۱\,mol\,N_۲} = ۲۲۴\,mL$$

در نتیجه در این واکنش، **۲۲۴ میلی‌لیتر** گاز نیتروژن تولید می‌شود. **مقدار مول سدیم اکسید** تولید شده در این فرایند، به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$?\,mol\,Na_۲O = ۰/۰۲\,mol\,NaNO_۳ \times \frac{۲\,mol\,Na_۲O}{۴\,mol\,NaNO_۳} = ۰/۰۱\,mol$$

در این فرایند، **۰/۰۱ مول سدیم اکسید** تولید شده و این مقدار سدیم اکسید، **۰/۰۲ مول سدیم هیدروکسید** را در محلول تولید می‌کند. با استفاده از **۰/۰۲ مول سدیم هیدروکسید**، می‌توان ۰/۲ لیتر محلول **۰/۱ مولار سدیم** هیدروکسید را تهیه کرد.

۸۷- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) در دما و غلظت یکسان، قدرت اسیدی محلول نیتریک اسید کمتر از قدرت اسیدی محلولی از نیترواسید است.
۲) اسید معده، یک اسید تک‌پروتون‌دار بوده و موجب فعال کردن آنزیم‌های گوارشی موجود در معده می‌شود.
۳) مقدار pH خون موجود در رگ‌های بدن انسان، همانند آب گازدار، بیشتر از pH آب خالص است.
۴) اکسیدهای نافلزی در ساختار خود دارای پیوند اشتراکی بوده و همه آن‌ها اسید آرنیوس هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۶ ـ ۱۲۰۱)

اسید معده که نام شیمیایی آن **هیدروکلریک اسید** است، یک اسید **تک‌پروتون‌دار** به شمار می‌رود. این ماده، دو عملکرد مهم دارد که باید آن‌ها را بلد باشید. این موارد عبارت هستند از:

۱ـ فعال کردن آنزیم‌ها برای تجزیه مواد غذایی ۲ـ از بین بردن جانداران ذره‌بینی موجود در غذا

توجه داریم که دلیل **سوزش معده**، **برگشت** مقداری از محتویات اسیدی معده به **لولهٔ مری** است.

WWW.ArefOnline.ir

اسید معده

با ورود غذا به معده انسان، غدد موجود در دیواره معده برای از بین بردن میکروب‌های موجود در غذاها و فعال کردن آنزیم‌های گوارشی، شروع به ترشح هیدروکلریک اسید می‌کنند. در بدن انسان بالغ، روزانه بین ۲ تا ۳ لیتر شیره معده تولید می‌شود که غلظت یون هیدرونیوم در آن حدوداً برابر با ۰/۰۳ مول بر لیتر است. بر این اساس، می‌توان گفت pH اسید ترشح‌شده در معده تقریباً برابر ۱/۵ است و به همین خاطر، فضای درون معده را می‌توان یک محیط اسیدی به حساب آورد؛ به‌طوری‌که این اسید می‌تواند فلز روی را در خود حل کند. دیواره داخلی معده، به‌طور طبیعی مقدار اندکی از یون‌های هیدرونیوم ترشح‌شده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. در این شرایط، اگر مقدار اسید موجود در معده به هر دلیلی بیش از اندازه باشد، مقدار یون‌های هیدرونیوم جذب‌شده توسط دیواره معده بیشتر شده و مقدار بیشتری از سلول‌های دیواره معده آسیب می‌بینند. آسیب به سلول‌های دیواره معده، سبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) مقایسه قدرت اسیدی برخی از مواد مطرح شده در کتاب درسی به شرح زیر است:

قدرت اسیدی بیشتر ← نیتریک اسید ← نیتروواسید ← فورمیک اسید ← استیک اسید ← هیدروسیانیک اسید ← قدرت اسیدی کمتر

با توجه به تصویر بالا، نیتریک اسید در مقایسه با نیتروواسید **قدرت اسیدی بالاتری** داشته و **غلظت یون‌ها** در محلول حاصل از آن **بیشتر** است؛ پس می‌توان گفت در **دما** و **غلظت یکسان**، قدرت اسیدی و رسانایی الکتریکی محلول نیتریک اسید **بیشتر** از قدرت اسیدی و رسانایی الکتریکی محلول نیتروواسید است.

۳) آب گازدار (یک نمونه از آب که گاز **کربن دی‌اکسید** در آن حل شده است)، یک محلول **اسیدی** و **خون** موجود در رگ‌های بدن یک محلول **بازی** است. محلول‌های **اسیدی** دارای pH **کوچک‌تر از ۷** بوده و محلول‌های **بازی** نیز دارای pH **بزرگ‌تر از ۷** هستند.

خواص اسیدی و بازی بدن

محتویات موجود در هر عضو از بدن انسان، براساس وظیفه و کارکرد آن عضو، pH خاصی دارند. به‌عنوان مثال، pH بزاق تقریباً برابر ۶ و pH شیره معده تقریباً برابر ۱/۷ بوده و این محلول‌ها خاصیت اسیدی دارند. در طرف مقابل، pH خون و محتویات روده به ترتیب برابر ۷/۴ و ۸/۵ است؛ پس این محیط‌ها خاصیت بازی دارند. توجه داریم که چربی پوست، حاوی برخی از انواع اسیدهای چرب بوده و اسیدهای چرب نیز خاصیت اسیدی بسیار ملایمی دارند.

۴) **اغلب** اکسیدهای **نافلزی** بر اثر حل شدن در آب **یون هیدرونیوم** تولید می‌کنند و **اسید آرنیوس** به شمار می‌روند، امّا برخی از این اکسیدها مانند CO و **نیتروژن مونوکسید**، اکسید خنثی هستند و در هنگام حل شدن در آب، با آن **واکنش نمی‌دهند**.

ماز

۸۸- **رسانایی الکتریکی کدام محلول زیر، با رسانایی الکتریکی محلولی از هیدروکلریک اسید با $pH = ۰/۵$ برابر است؟**

۱) محلول آبی ۰/۱ مولار کلسیم نیترات
۲) محلول آبی ۰/۲ مولار سدیم سولفات
۳) محلول آبی ۰/۳ مولار پتاسیم فسفات
۴) محلول آبی ۰/۵ مولار لیتیم کلرید

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

پس از قرار دادن مواد مختلف در مسیر جریان برق، برخی از مواد جریان الکتریسیته را عبور داده و برخی، جریان الکتریسیته را عبور نمی‌دهند. موادی که **جریان الکتریسیته را از خود عبور می‌دهند**، **رسانا** نام داشته و موادی که **جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی‌دهند**، **نارسانا** نام می‌گیرند. برای برقراری جریان الکتریسیته، بار الکتریکی توسط **یون‌ها** و یا **الکترون‌ها** باید از یک نقطه به نقطه دیگر انتقال پیدا کند. بر این اساس، رسانایی مواد مختلف در یکی از دو گروه زیر قرار می‌گیرد:

- انواع مواد رسانا
  - رساناهای یونی ← موادی که رسانایی آن‌ها به واسطه یون‌ها انجام می‌شود
    - نمک‌های مذاب
    - محلول نمک‌ها
  - رساناهای الکترونی ← موادی که رسانایی آن‌ها به واسطه الکترون‌های آزاد انجام می‌شود
    - گرافیت
    - عناصر فلزی

WWW.ArefOnline.ir

رسانایی الکتریکی محلول‌های آبی مختلف، **وابسته به مجموع غلظت مولی یون‌ها** (آنیون‌ها و کاتیون‌ها) در این محلول‌ها است. در رابطه با محلولی از هیدروکلریک اسید با $pH = ۰/۵$، داریم:

$$pH = ۰/۵ \Rightarrow [H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۰/۵} = ۰/۳\ mol.L^{-۱}$$

در محلول هیدروکلریک اسید، به ازای هر **یون هیدروژن**، یک **یون کلرید** وجود دارد، پس مجموع غلظت مولی یون‌ها در این محلول برابر با **۰/۶ مول بر لیتر** می‌شود. **سدیم سولفات** ($Na_۲SO_۴$) نیز نوعی نمک بوده و هر مول از آن، **۳ مول یون** در محلول آزاد می‌کند. در محلول آبی این نمک با غلظت **۰/۲ مولار** نیز مجموع غلظت مولی یون‌ها برابر با **۰/۶ مول بر لیتر** می‌شود؛ پس رسانایی الکتریکی این دو محلول با یکدیگر **برابر** است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) هر مول کلسیم نیترات ($Ca(NO_۳)_۲$)، با انحلال در آب **۳ مول یون آزاد** می‌کند. بر این اساس، در محلول آبی **۰/۱ مولار** از نمک مورد نظر مجموع غلظت مولی آنیون‌ها و کاتیون‌ها برابر با **۰/۳ مول بر لیتر** است.

۳) هر مول پتاسیم فسفات ($K_۳PO_۴$)، با انحلال در آب **۴ مول یون** آزاد می‌کند. بر این اساس، در محلول آبی **۰/۳ مولار** از نمک مورد نظر مجموع غلظت مولی آنیون‌ها و کاتیون‌ها برابر با **۱/۲ مول بر لیتر** است.

۴) هر مول لیتیم کلرید ($LiCl$)، با انحلال در آب **۲ مول یون آزاد** می‌کند. بر این اساس، در محلول آبی **۰/۵ مولار** از نمک مورد نظر مجموع غلظت مولی آنیون‌ها و کاتیون‌ها برابر با **یک مول بر لیتر** است.

ماز

۸۹- به ۴۰ میلی‌لیتر محلول نیتریک اسید ۰/۰۵ مولار، مقدار $۱۰mL$ محلول باریم هیدروکسید اضافه می‌کنیم. اگر محلول حاصل با ۲۲۴ میلی‌لیتر گاز HCl در شرایط استاندارد به‌طور کامل خنثی شود، pH محلول قبل از افزودن هیدروژن کلرید و غلظت مولی محلول باریم هیدروکسید اولیه به ترتیب کدام است؟ ($Cl = ۳۵/۵ , O = ۱۶ , N = ۱۴ , H = ۱ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۱۳/۶ - ۰/۶ ۲) ۱۳/۳ - ۰/۶ ۳) ۱۳/۶ - ۰/۸ ۴) ۱۳/۳ - ۰/۸

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۳۱ ـ ۱۲۰۱)

طبق فرض سؤال، مراحل زیر انجام شده است:

۱) یک محلول اسیدی با غلظت ۰/۰۵ مولار در اختیار داشته‌ایم. با افزودن باریم هیدروکسید به این محلول، کل **اسید** موجود در آن **خنثی** شده و **مقداری باز اضافه آمده است**.

۲) پس از افزودن باز به محلول اولیه، یک محلول **بازی** ایجاد شده است. این محلول بازی، با **گاز هیدروژن کلرید** واکنش داده و کل **باز** موجود در آن **به‌طور کامل خنثی شده** است.

بر این اساس، می‌توان گفت با افزودن گاز هیدروژن کلرید به محلول حاصل از مرحله اول، **کل باز** موجود در محلول **خنثی** شده و یک محلول خنثی به‌دست می‌آید. ابتدا **غلظت یون OH^-** را در محلول حاصل از مرحله اول، **قبل از افزودن HCl** محاسبه می‌کنیم. توجه داریم که **غلظت** OH^- موجود در این محلول، با **غلظت مولی H^+ تولید شده** طی انحلال HCl در محلول برابر است، پس داریم:

$$?\,mol\,H^+ = ۲۲۴\,mL\,HCl \times \frac{۱\,mol\,HCl}{۲۲۴۰۰\,mL\,HCl} \times \frac{۱\,mol\,H^+}{۱\,mol\,HCl} = ۰/۰۱\,mol$$

$$[OH^-] = \frac{\text{تعداد مول } OH^-}{\text{لیتر محلول}} = \frac{\text{تعداد مول } H^+ \text{ حاصل از هیدروکلریک اسید}}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۰/۰۱\,mol\,H^+}{\frac{۴۰ + ۱۰}{۱۰۰۰}} = ۰/۲\,mol.L^{-۱}$$

$$\Rightarrow [H^+] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[OH^-]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۰/۲} = ۵ \times ۱۰^{-۱۴} mol.L^{-۱}$$

بنابراین pH محلول قبل از افزودن HCl برابر است با:

$$pH = -log(۵ \times ۱۰^{-۱۴}) = ۱۴ - log\,۵ = ۱۴ - ۰/۷ = ۱۳/۳$$

WWW.ArefOnline.ir

در مرحله اول از فرایند داده شده، **نیتریک اسید** با **باریم هیدروکسید** واکنش می‌دهد. واکنش نیتریک اسید با باریم هیدروکسید به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$۲HNO_۳(aq) + Ba(OH)_۲(aq) \longrightarrow Ba(NO_۳)_۲(aq) + ۲H_۲O(l)$$

غلظت یون هیدروژن در محلول نیتریک اسید اولیه برابر با **۰/۰۵ مول بر لیتر** بوده است. این مقدار یون هیدروژن، با افزودن محلول باریم هیدروکسید **به‌طور کامل خنثی شده** و سپس، **غلظت یون هیدروکسید** موجود در محلول به $۰/۲\ mol.L^{-۱}$ می‌رسد؛ بنابراین داریم:

$$[OH^-]_{\text{نهایی}} = \frac{(n_{\text{باز}} \times M_{\text{باز}} \times V_{\text{باز}}) - (n_{\text{اسید}} \times M_{\text{اسید}} \times V_{\text{اسید}})}{V_{\text{باز}} + V_{\text{اسید}}} = \frac{(۲ \times M_{\text{باز}} \times ۱۰) - (۱ \times ۰/۰۵ \times ۴۰)}{۱۰ + ۴۰} = ۰/۲$$

$$\Longrightarrow ۲۰M_{\text{باز}} - ۲ = ۱۰ \Longrightarrow M_{\text{باز}} = \frac{۱۲}{۲۰} = ۰/۶\ mol.L^{-۱}$$

۹۰- محلولی از یک اسید ضعیف با $Ka = ۲/۵ \times ۱۰^{-۴}$ و $pH = ۳$ در اختیار داریم. تفاوت غلظت مولی ذرات اسید یونیده نشده و غلظت مولی یون هیدرونیوم، در این محلول چقدر است؟

۱) ۰/۰۱۲ ۲) ۰/۰۰۹ ۳) ۰/۰۰۶ ۴) ۰/۰۰۳

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ سریع ـ صفحهٔ ۲۳ ـ ۱۲۰۱)

در قدم اول از مراحل حل سؤال، ابتدا **غلظت مولی یون هیدروژن** را در محلول محاسبه می‌کنیم.

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱}$$

در این مرحله، فرض می‌کنیم که می‌توانیم از **مقدار** $۱ - \alpha$ **صرف‌نظر کنیم** و بر این اساس، **مقدار** α را محاسبه می‌کنیم.

$$Ka = \alpha^۲.M \xrightarrow{[H^+]=\alpha.M} Ka = [H^+] \times \alpha \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۲/۵ \times ۱۰^{-۴} = ۱۰^{-۳} \times \alpha \Longrightarrow \alpha = ۰/۲۵$$

همان‌طور که مشخص است، **مقدار** α در چنین حالتی بیشتر از ۰/۰۵ می‌شود، پس **مجاز به صرف‌نظر کردن از مقدار** $۱ - \alpha$ **نیستیم** و باید آن را در محاسبات خود لحاظ کنیم. بر این اساس، داریم:

$$Ka = \frac{\alpha^۲.M}{۱ - \alpha} \xrightarrow{[H^+]=\alpha.M} Ka = \frac{[H^+] \times \alpha}{۱ - \alpha} \xrightarrow{\text{جایگذاری}} ۲/۵ \times ۱۰^{-۴} = \frac{۱۰^{-۳} \times \alpha}{۱ - \alpha} \Longrightarrow \frac{\alpha}{۱ - \alpha} = ۰/۲۵ \Longrightarrow \alpha = ۰/۲$$

در قدم بعد، با توجه به **مقدار** α، **غلظت مولی اولیه اسید** موجود در این محلول را محاسبه می‌کنیم.

$$[H^+] = M \times \alpha \Longrightarrow ۱۰^{-۳}\ mol.L^{-۱} = M \times ۰/۲ \Longrightarrow M = ۰/۰۰۵\ mol.L^{-۱}$$

بر این اساس، **غلظت مولکول‌های اسیدی یونیده نشده** در محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{غلظت مولکول‌های اسیدی یونیده نشده} = \text{غلظت اولیه اسید} \times (۱ - \alpha) = ۰/۰۰۵ \times (۱ - ۰/۲) = ۰/۰۰۴ mol.L^{-۱}$$

غلظت یون هیدروژن نیز در این محلول اسیدی برابر با **۰/۰۰۱ مول بر لیتر** بود. بر این اساس، داریم:

$$\text{غلظت ذرات اسید یونیده نشده} = \text{غلظت یون هیدروژن} - ۰/۰۰۱ = ۰/۰۰۴ - ۰/۰۰۱ = ۰/۰۰۳\ mol.L^{-۱}$$

WWW.ArefOnline.ir

۹۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) برای باز کردن راه لوله‌ای که توسط رسوب آهک مسدود شده است، می‌توان از محلول سولفوریک اسید استفاده کرد.
۲) دیواره داخلی معده انسان، به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در حفره معده را جذب می‌کند.
۳) باز موجود در شیر منیزی، برخلاف باز موجود در شیشه‌پاک‌کن، نامحلول در آب بوده و نوعی ترکیب یونی است.
۴) عناصر موجود در ساختار جوش شیرین، به یقین در ساختار یک پاک‌کننده صابونی نیز وجود دارند.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۳۲ ـ ۱۲۰۱)

جوش شیرین با فرمول شیمیایی $NaHCO_3$، با **آب** واکنش داده و یون **هیدروکسید** تولید می‌کند؛ بنابراین یک **باز آرنیوس** به شمار می‌رود. در ساختار این ماده، **یون سدیم** وجود دارد در حالی که اگر صابون حالت **مایع** داشته باشد، در ساختار آن **اتم سدیم یافت نمی‌شود.**

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) آهک (کلسیم اکسید)، یک اکسید **فلزی** با خاصیت **بازی** است. چون این ماده خاصیت **بازی** دارد، پس می‌توان گفت برای باز کردن راه لوله‌ای که توسط **رسوب آهک مسدود شده** است، باید از یک محلول اسیدی مثل محلول **سولفوریک اسید، هیدروبرمیک اسید** و یا **هیدروکلریک** اسید استفاده کرد.

۲) در بدن انسان بالغ، **روزانه** بین **۲ تا ۳ لیتر شیرهٔ معده** تولید می‌شود. **دیواره داخلی معده**، به‌طور طبیعی مقدار **اندکی** از یون‌های هیدرونیوم ترشح‌شده را مجدداً جذب می‌کند. این فرایند، سبب نابودی برخی از سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود.

۳) ضد اسیدها داروهایی هستند که برای **کاهش اسیدی بودن شیره معده** استفاده می‌شوند. **شیر منیزی** یکی از **رایج‌ترین** ضد اسیدها است که از **سوسپانسیون منیزیم هیدروکسید** تولید می‌شود. این ماده مطابق واکنش زیر **اسید معده** را **خنثی** می‌کند.

$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \longrightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

همچنین از دیگر مواد موجود در ضد اسیدها می‌توان به آلومینیم هیدروکسید ($Al(OH)_3$) و سدیم هیدروژن کربنات یا همان جوش شیرین ($NaHCO_3$) اشاره کرد. توجه داریم که **آلومینیم هیدروکسید** و **منیزیم هیدروکسید**، از جمله مواد **نامحلول** در آب به شمار می‌روند. **باز** موجود در محلول **شیشه‌پاک‌کن** نیز **آمونیاک** است که مطابق معادله زیر در آب به‌صورت **تعادلی**، **یونش** می‌یابد.

$$NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq)$$

بازهای **ضعیف** در آب به‌صورت **تعادلی** یونش می‌یابند اما **اکثر بازهای قوی** خود **ترکیب یونی** هستند و یون‌های آن‌ها به هنگام ورود به آب **به‌طور کامل تفکیک** (نه یونیده!) می‌شوند. در فرایند یونش، واکنش‌دهنده اولیه مولکول است و جدا شدن یون‌های یک ترکیب یونی در آب را نمی‌توان یونش نامید.

ماز

۹۲- **یک نمونه ۳۰۰ گرمی از اسید HB با درصد یونش ۲/۵٪ را وارد ۲ لیتر آب مقطر می‌کنیم تا محلولی با $pH = 1/3$ به‌دست بیاید. چند درصد از اسید در آب حل شده و در ۵۰۰ میلی‌لیتر از این محلول، چند مول یون هیدروکسید وجود دارد؟ (از تغییر حجم محلول بر اثر انحلال اسید صرف‌نظر شود. $HB = 60\ g.mol^{-1}$)**

۱) $40 - 10^{-13}$ ۲) $40 - 2 \times 10^{-13}$ ۳) $80 - 10^{-13}$ ۴) $80 - 2 \times 10^{-13}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۲۷ ـ ۱۲۰۱)

برای حل این سؤال، مراحل زیر را به‌ترتیب طی می‌کنیم:

گام اول: محاسبه غلظت یون هیدرونیوم

گام دوم: پیدا کردن غلظت اسید با استفاده از درجه یونش

گام سوم: محاسبه جرم اسید حل شده در محلول و پیدا کردن درصدی از اسید که در محلول حل شده است.

گام چهارم: محاسبه غلظت و مول یون هیدروکسید در محلول

WWW.ArefOnline.ir

برای محاسبه **غلظت یون هیدرونیوم** در این محلول اسیدی، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۳} = ۱۰^{۰/۷} \times ۱۰^{-۲} = ۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

با توجه به **درصد یونش اسید** و **غلظت یون هیدروژن**، می‌توان **غلظت اولیه اسید** را در محلول محاسبه کرد. غلظت اولیه اسید HB برابر است با:

$$\alpha \text{ درصد} = \frac{[H^+]}{[HB]} \times ۱۰۰ \Rightarrow ۲/۵ = \frac{۵ \times ۱۰^{-۲}}{[HB]} \times ۱۰۰ \Rightarrow [HB] = ۲\ mol.L^{-۱}$$

جرم اسید حل شده به این صورت محاسبه می‌شود:

$$?\ g\ HB = ۲\ L \text{ محلول} \times \frac{۲\ mol\ HB}{۱\ L \text{ محلول}} \times \frac{۶۰\ g\ HB}{۱\ mol\ HB} = ۲۴۰\ g$$

بر این اساس، **درصد اسید حل شده** برابر است با:

$$\frac{\text{جرم اسید حل شده در محلول}}{\text{جرم کل اسید}} \times ۱۰۰ = \frac{۲۴۰}{۳۰۰} \times ۱۰۰ = ۸۰ \text{ درصد}$$

با توجه به رابطه زیر، **غلظت یون هیدروکسید** و **مول** آن را در محلول به‌دست می‌آوریم:

$$[H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Rightarrow [OH^-] = \frac{۱۰^{-۱۴}}{[H^+]} = \frac{۱۰^{-۱۴}}{۵ \times ۱۰^{-۲}} = ۲ \times ۱۰^{-۱۳}\ mol.L^{-۱}$$

$$?\ mol\ OH^- = ۵۰۰\ mL \text{ محلول} \times \frac{۱\ L \text{ محلول}}{۱۰۰۰\ mL \text{ محلول}} \times \frac{۲ \times ۱۰^{-۱۳}\ mol\ OH^-}{۱\ L \text{ محلول}} = ۱۰^{-۱۳}\ mol$$

کنکورشناسی: این سؤال با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور سراسری ۱۴۰۴ طراحی شده است.

ماز

۹۳- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) ساخت قوطی محتوی مواد غذایی و لوازم آشپزی مقاوم در برابر خوردگی، در گرو بهره‌گیری از دانش الکتروشیمی است.
۲) سیلیسیم، یک شبه‌فلز با سطح براق بوده و عنصر اصلی سازنده یکی از اجزای تشکیل‌دهنده چراغ‌های خورشیدی است.
۳) در زمان گذشته، از واکنش سوختن یکی از عناصر دسته s، به‌عنوان منبع نور برای عکاسی استفاده می‌شده است.
۴) در نیم‌واکنش اکسایش مربوط به تبدیل یون $MnO_۴^-$ به یون منگنز(II)، تعداد ۵ الکترون مبادله می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

نیم‌واکنش تبدیل یون $MnO_۴^-$ به یون منگنز(II)، از نوع **کاهش** است، پس **نماد الکترون** در سمت **چپ** آن قرار می‌گیرد. طی این فرایند عدد اکسایش منگنز از $+۷$ به $+۲$ رسیده است، پس می‌توان گفت در این نیم‌واکنش **۵ الکترون** مبادله شده است. بر این اساس، می‌توان گفت **ضریب الکترون** در نیم‌واکنش مورد نظر که از نوع کاهشی است، برابر **۵** خواهد بود.

WWW.ArefOnline.ir

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ساخت لوله‌های فلزی انتقال آب، قوطی‌های محتوی مواد غذایی، لوازم آشپزی که در برابر خوردگی مقاوم بوده و مانع از آلوده شدن آب و مواد غذایی می‌شوند، همگی با استفاده از فرایند **آبکاری** انجام می‌شود. فرایند **آبکاری** و همچنین **کسب اطمینان از کیفیت تولید فراورده‌های دارویی، بهداشتی** و **غذایی**، چهره‌ای از **افزایش سطح رفاه** و **آسایش** هستند که دستیابی به آن‌ها در گرو بهره‌گیری از دانش الکتروشیمی است.

۲) چراغ خورشیدی، یک ابزار روشنایی است که از **لامپ** LED، **سلول خورشیدی** و **باتری قابل شارژ** تشکیل شده است. همانطور که می‌دانیم، عنصر **سیلیسیم** با **عدد اتمی ۱۴**، **عنصر اصلی سازندهٔ سلول‌های خورشیدی** است. سیلیسیم، یک عنصر **شبه‌فلزی** بوده که در گروه ۱۴ جدول دوره‌ای قرار گرفته و **رسانایی الکتریکی کمی** دارد.

شبه‌فلزها

شبه‌فلزها همانند مرزی بین فلزها و نافلزهای موجود در جدول دوره‌ای قرار گرفته‌اند. خواص فیزیکی شبه‌فلزها بیشتر به فلزها شبیه بوده در حالی که رفتار شیمیایی آن‌ها همانند نافلزها است. به‌عنوان مثال، سیلیسیم و ژرمانیم دو عنصر شبه‌فلزی از گروه ۱۴ جدول هستند. خواص این دو عنصر شبه‌فلزی به شرح زیر است:

۱) این دو عنصر شبه‌فلزی، در حالت جامد سطحی درخشان و صیقلی داشته و پرتوهای نور تابیده شده به سمت خود را بازتاب می‌کنند.

۲) سیلیسیم و ژرمانیم، همانند عناصر نافلزی، چکش‌خوار نبوده و پس از اصابت ضربهٔ چکش، خرد می‌شوند.

۳) این عناصر، همانند عناصر فلزی، رسانای جریان الکتریسیته و گرما هستند. رسانایی الکتریکی این عناصر در مقایسه با فلزها کمتر است.

۴) اتم‌های سیلیسیم و ژرمانیم در واکنش با سایر اتم‌ها، می‌توانند الکترون به اشتراک بگذارند.

۳) در **گذشته** از واکنش **سوختن منیزیم** به‌عنوان **منبع نور** برای **عکاسی** استفاده می‌شده است. طی این واکنش، **اتم‌های منیزیم** با **گاز اکسیژن** واکنش داده و با ایجاد **یک نور خیره‌کننده** می‌سوزند.

ماز

۹۴- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ در سلول گالوانی روی-مس، الکترون‌های موجود در مدار خارجی به سمت تیغه روی جاری می‌شوند.

ب ـ بین آهن و مس، قدرت کاهندگی عنصر با تعداد الکترون ظرفیتی بیشتر، نسبت به عنصر دیگر کمتر است.

ج ـ واکنش سلول روی-مس مشابه واکنشی است که با ورود تیغهٔ روی به محلول مس(II) سولفات اتفاق می‌افتد.

د ـ از محلول یک مولار فورمیک اسید، می‌توان به‌عنوان الکترولیت موجود در ساختار نیم‌سلول SHE استفاده کرد.

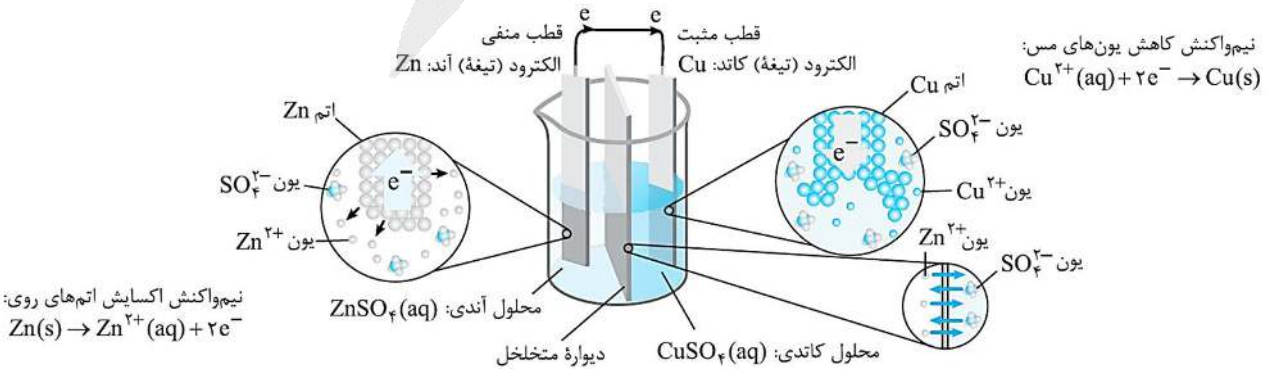
۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۷ ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) **پتانسیل کاهشی استاندارد فلز مس** در مقایسه با **روی بیشتر** است. بر این اساس، در سلول گالوانی **روی-مس، الکترون‌های موجود** در مدار **خارجی** به سمت **تیغه کاتدی** (**تیغهٔ مسی**) جاری می‌شوند. تصویر زیر، نمایی از این سلول گالوانی را نشان می‌دهد:



WWW.ArefOnline.ir

ب) فلز **آهن** دارای **۸ الکترون ظرفیتی** بوده و فلز **مس** نیز دارای **۱۱ الکترون ظرفیتی** است. از طرفی، می‌دانیم که **پتانسیل کاهشی استاندارد مس** بیشتر از **آهن** است و به همین خاطر، **قدرت کاهندگی** (تمایل به از دست دادن الکترون و اکسید شدن) **مس کمتر** از **آهن** خواهد بود. تصویر زیر، نمایی از جدول پتانسیل کاهشی و برخی از عناصر مهم موجود در آن را نشان می‌دهد:

E°(V)	نیم‌واکنش کاهش		
ولتاژ	گونهٔ کاهنده	الکترون	گونهٔ اکسنده
+۱/۵۰	Au(s)	$+۳e^- \rightarrow$	$Au^{۳+}(aq)$
+۱/۲۰	Pt(s)	$+۲e^- \rightarrow$	$Pt^{۲+}(aq)$
+۰/۸۰	Ag(s)	$e^- \rightarrow$	$Ag^+(aq)$
+۰/۳۴	Cu(s)	$+۲e^- \rightarrow$	$Cu^{۲+}(aq)$
۰/۰۰	$H_۲(g)$	$+۲e^- \rightarrow$	$۲H^+(aq)$
-۰/۴۴	Fe(s)	$+۲e^- \rightarrow$	$Fe^{۲+}(aq)$
-۰/۷۶	Zn(s)	$+۲e^- \rightarrow$	$Zn^{۲+}(aq)$
-۱/۱۸	Mn(s)	$+۲e^- \rightarrow$	$Mn^{۲+}(aq)$
-۱/۶۶	Al(s)	$+۳e^- \rightarrow$	$Al^{۳+}(aq)$
-۲/۳۷	Mg(s)	$+۲e^- \rightarrow$	$Mg^{۲+}(aq)$

کاهندهٔ قوی‌تر ↓ — اکسندهٔ قوی‌تر ↑

ج) در هر دو مورد واکنش مقابل انجام می‌شود:

$$Zn(s) + Cu^{۲+}(aq) \rightarrow Zn^{۲+}(aq) + Cu(s)$$

توجه داریم که واکنش در سلول **گالوانی** در **شرایط کاملاً کنترل شده** صورت می‌گیرد و **الکترون‌های تولید شده** از طریق مدار **بیرونی** جابه‌جا می‌شوند و ما می‌توانیم از این جریان الکتریکی ایجاد شده به‌عنوان منبع تولید الکتریسیته استفاده کنیم.

د) در نیم‌سلول‌های **استاندارد**، باید از محلول‌هایی با **غلظت یک مولار از کاتیون‌ها** استفاده کرد. چون فورمیک اسید، یک **اسید تک پروتون‌دار ضعیف** با Ka **کوچک** است، **غلظت یون هیدروژن** در محلول یک مولار آن **کمتر** از ۱ مول بر لیتر بوده و به همین خاطر، از محلول یک مولار این اسید **نمی‌توانیم** به‌عنوان **محلول الکترولیت** موجود در **نیم‌سلول استاندارد هیدروژن** (SHE) استفاده کنیم.

نیم‌سلول استاندارد هیدروژن

اندازه‌گیری پتانسیل یك نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نبوده و باید این کمیت به‌طور نسبی اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، نیم‌سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به‌عنوان مبنا انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با صفر ولت در نظر گرفتند. در این نیم‌سلول، محلولی با $pH = ۰$ (محلولی که غلظت مولی یون هیدروژن در آن برابر با ۱ مول بر لیتر است) قرار داشته و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر بر روی این محلول دمیده می‌شود. شیمی‌دان‌ها با تشکیل سلول گالوانی از هر نیم‌سلول با نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، توانستند پتانسیل الکتریکی بسیاری از نیم‌سلول‌ها را اندازه‌گیری کرده و در جدولی به نام سری الکتروشیمیایی ثبت کنند.

ماز

۹۵- کدام‌یک از عبارت‌های زیر در رابطه با عنصر مس، درست است؟

۱) این عنصر فلزی، به رنگ نارنجی دیده شده و در هیچ شرایطی دچار خوردگی نمی‌شود.
۲) آرایش الکترونی این عنصر، از قاعده آفبا پیروی کرده و در اتم آن، لایه $n = ۳$ پر از الکترون است.
۳) با قرار دادن این فلز در محلول آلومینیم سولفات، دمای محلول افزایش یافته و رنگ محلول آبی می‌شود.
۴) از ظروف ساخته شده با استفاده از این فلز واسطه، می‌توان برای نگهداری محلول‌های اسیدی استفاده کرد.

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

مقدار E° برای عناصر فلزی **طلا**، **پلاتین**، **جیوه**، **نقره** و **مس**، **بزرگ‌تر از صفر** است. از آن‌جا که مقدار E° این عناصر فلزی **بزرگ‌تر از** $E^\circ(H^+/H_2)$ است، محلول‌های اسیدی حاوی یون $H^+(aq)$ بر این فلزها **اثری نداشته** و آن‌ها را دچار خوردگی **نمی‌کنند**. به‌جز این عناصر، مقدار E° برای سایر فلزها **منفی** بوده و به همین خاطر است که سایر عناصر فلزی در واکنش با اسیدها دچار خوردگی می‌شوند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) فلز مس، به رنگ **نارنجی** دیده می‌شود. گاز اکسیژن، در مقایسه با مس دارای **پتانسیل کاهشی بزرگ‌تری** بوده و به همین خاطر، هم در محیط **خنثی** و هم در محیط **اسیدی** فلز **مس** را دچار **خوردگی** می‌کند.

خوردگی وسایل

در زندگی روزانه از وسایل و ابزار گوناگونی مانند وسایل آشپزخانه، شیرآلات ساختمان، دستگیره در و ... استفاده می‌شود که فلز اصلی سازنده آن‌ها آهن یا مس است. خوردگی این فلزها از یک سو سبب از بین رفتن زیبایی وسیله می‌شود و از سوی دیگر به سلامتی بدن آسیب می‌رساند. به همین دلیل، سطح اغلب این وسایل فلزی را به کمک فرایند آبکاری و با فلزهایی مانند نقره، کروم، نیکل و طلا می‌پوشانند. با پوشش دادن به سطح این فلزها، وسایل ساخته شده از آن‌ها در مقابل خوردگی محافظت می‌شوند.

۲) مس، بعد از کروم، **دومین عنصر از جدول دوره‌ای** است که آرایش الکترونی آن از قاعده آفبا پیروی **نمی‌کند**. در این اتم، یک الکترون از زیرلایه $4s$ به زیرلایه $3d$ منتقل شده است. آرایش الکترونی مس به‌صورت زیر است:

$$_{29}^{64}Cu : [_{18}Ar]3d^{10}4s^1$$

۳) چون فلز مس در مقایسه با آلومینیم **پتانسیل کاهشی استاندارد بالاتری** دارد، با قرار دادن این فلز در محلول آلومینیم سولفات، هیچ واکنشی در محلول **انجام نمی‌شود**. بر این اساس، دمای محلول **ثابت** باقی مانده و رنگ محلول دچار **تغییر نمی‌شود**.

ماز

۹۶- در سلول گالوانی منیزیم-نقره که از اتصال دو نیم‌سلول استاندارد تشکیل شده و حجم الکترولیت‌های به کار رفته در هر نیم‌سلول آن برابر با ۰/۵ لیتر است، پس از حرکت $1/204 \times 10^{23}$ الکترون از مدار خارجی، نسبت غلظت مولی کاتیون‌ها در نیم‌سلول آندی به نیم‌سلول کاتدی چقدر می‌شود؟ (دیواره متخلخل، فقط به آنیون‌ها اجازه عبور می‌دهد.)

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۵ ۳) ۲/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۴۵ ـ ۱۲۰۲)

در سلول مورد نظر، واکنش زیر انجام می‌شود:

$$Mg(s) + 2Ag^+(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + 2Ag(s)$$

با توجه به معادله واکنش انجام شده در این سلول، به ازای عبور **۲ مول الکترون** در مدار خارجی سلول، **۲ مول یون نقره** مصرف شده و **یک مول یون منیزیم** تولید می‌شود. بر این اساس، **مقدار تغییر مول‌های هر یون** را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,mol\,Ag^+ = 1/204 \times 10^{23}\,e \times \frac{1\,mol\,e}{6/02 \times 10^{23}\,e} \times \frac{2\,mol\,Ag^+}{2\,mol\,e} = 0/2\,mol$$

$$?\,mol\,Mg^{2+} = 1/204 \times 10^{23}\,e \times \frac{1\,mol\,e}{6/02 \times 10^{23}\,e} \times \frac{1\,mol\,Mg^{2+}}{2\,mol\,e} = 0/1\,mol$$

تغییر غلظت هر یون در یک نیم‌سلول، با استفاده از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{تغییر غلظت یون} = \frac{\text{مقدار مول فلز تولید یا مصرف شده}}{\text{حجم محلول}}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، در این فرایند **۰/۲ مول یون نقره** مصرف شده است. با توجه به حجم محلول موجود در نیم‌سلول استاندارد نقره، می‌توان گفت غلظت یون نقره در این نیم‌سلول **از ۱ مول بر لیتر به ۰/۶ مول بر لیتر** رسیده است. در طول همین بازه زمانی، **۰/۱ مول یون منیزیم** نیز در نیم‌سلول منیزیم تولید شده و غلظت این یون در محلول موجود در نیم‌سلول منیزیم از **۱ مول بر لیتر به ۱/۲ مول بر لیتر** رسیده است. بر این اساس، می‌توان گفت **نسبت غلظت مولی کاتیون‌ها** در نیم‌سلول‌های مورد نظر برابر با **۲** شده است.

WWW.ArefOnline.ir

۹۷- کدام موارد از عبارت‌های زیر در رابطه با باتری دگمه‌ای روی-نقره درست است؟

الف ـ با تغییر دمای محیط، مقدار نیروی الکتروموتوری این سلول دچار تغییر می‌شود.

ب ـ کاتیون‌های نقره، از خلال غشای متخلخل موجود در ساختار این باتری عبور می‌کنند.

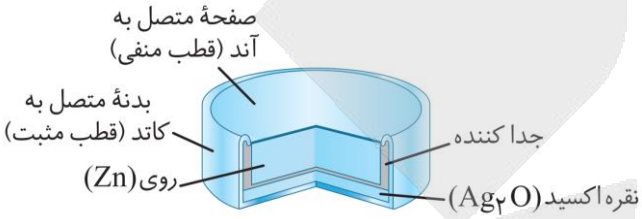
ج ـ اگر به‌جای فلز روی، از فلز لیتیم در این باتری استفاده کنیم، مقدار emf آن کاهش پیدا می‌کند.

د ـ در این سلول، همانند سلول نورالکتروشیمیایی مربوط به تولید گاز هیدروژن، انرژی الکتریکی تولید می‌شود.

۱) «الف» و «ج» ۲) «الف» و «د» ۳) «ب» و «ج» ۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۲ **(متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۲۰۲)**

نوعی از **باتری‌های دگمه‌ای**، **باتری‌های روی-نقره** است. ساختار این باتری‌ها به‌صورت زیر است:



در این باتری‌ها، **اتم‌های روی اکسایش یافته** و الکترون‌های خود را به سمت **نقره** می‌فرستند. معادله واکنش کلی انجام شده در این باتری به‌صورت زیر است:

$$Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow 2Ag(s) + ZnO(s)$$

فلز **روی**، در نقش **آند** (گونه **کاهنده**) و نقره **اکسید**، در نقش **کاتد** (گونه **اکسنده**) این سلول است. این باتری‌ها، انواعی از سلول‌های **گالوانی** به شمار می‌روند. در رابطه با این باتری‌ها، عبارت‌های (الف) و (د) درست هستند.

باتری‌های جدید

با رشد و پیشرفت چشمگیر صنایع، نیاز و تقاضا برای ساخت باتری‌ها با ویژگی‌های گوناگون و کاربرد معین افزایش یافته است. شیمی‌دان‌ها در پی پاسخ به این نیازها، توانستند به فناوری ساخت باتری‌های جدید دست یابند. در این فناوری، نقش فلز لیتیم پررنگ است؛ زیرا لیتیم در میان فلزها دارای کمترین چگالی و منفی‌ترین مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد است. این ویژگی‌های لیتیم سبب شد راه برای ساخت باتری‌های سبک‌تر (به‌خاطر چگالی کم لیتیم)، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی (به‌خاطر پتانسیل کاهشی استاندارد منفی لیتیم) هموار شود. باتری دگمه‌ای از جمله باتری‌های لیتیمی است که در شکل‌ها و اندازه‌های گوناگون به کار می‌رود. این باتری‌ها قابلیت شارژ شدن را ندارند. دسته‌ای دیگر از باتری‌های لیتیمی، آن‌هایی هستند که در تلفن و رایانه همراه به کار می‌روند و می‌توان آن‌ها را بارها شارژ کرد.

بررسی موارد:

الف) دما **محیط**، **غلظت یون‌ها** در محلول‌های آندی و کاتدی و **جنس تیغه‌های آندی** و **کاتدی**، از جمله عوامل مؤثر بر ولتاژ سلول‌های گالوانی هستند. با تغییر این موارد، می‌توان **نیروی الکتروموتوری سلول** را تغییر داد.

ب) در سلول مورد نظر، **کاتیون‌های نقره** و **روی**، جابه‌جا **نمی‌شوند**. در این سلول، صرفاً **یون اکسید** از بخش **کاتدی** به سمت بخش **آندی** حرکت می‌کند.

ج) چون پتانسیل کاهشی لیتیم در مقایسه با روی منفی‌تر است، اگر به‌جای فلز روی (آند)، از فلز لیتیم در این باتری استفاده کنیم، مقدار emf آن نسبت به حالت اولیه **افزایش** پیدا می‌کند.

د) سلول مورد نظر، نوعی سلول **گالوانی** است و E° **مثبت** دارد، پس در این سلول، انرژی الکتریکی تولید می‌شود. سلول **نورالکتروشیمیایی** مربوط به تولید گاز **هیدروژن** نیز E° **مثبت** دارد، پس در این سلول نیز انرژی الکتریکی تولید می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

سلول الکتروشیمیایی

در برخی از سلول‌های الکتروشیمیایی، برای انجام واکنش اکسایش-کاهش از نور استفاده می‌شود و به همین علت به آن‌ها سلول نورالکتروشیمیایی گفته می‌شود. از یکی از این سلول‌های نور الکتروشیمیایی، برای تولید گاز هیدروژن استفاده می‌شود. در این سلول، پتانسیل کاهشی استاندارد آند کمتر از کاتد بوده و emf سلول مثبت است. به‌طور کلی، این سلول‌ها ویژگی‌هایی بین سلول‌های گالوانی و الکترولیتی را داشته و در یک دسته جداگانه قرار می‌گیرند. توجه داریم که مقدار emf این سلول بسیار کوچک بوده و بازده و سرعت واکنش آن پایین است، اما با این وجود چون این فرایند برخلاف برقکافت آب، به کمک نور خورشید انجام‌شده و نیاز به مصرف انرژی ندارد، برای تولید گاز هیدروژن توصیه می‌شود. واکنش کلی انجام‌شده در سلول به‌صورت زیر است:

$$Si(s) + ۲H_۲O(l) \longrightarrow SiO_۲(s) + ۲H_۲(g)$$

ماز

۹۸- از میان سلول‌های گالوانی زیر، چه تعداد از سلول‌ها دارای emf بزرگ‌تر از سلول روی-هیدروژن بوده و در چه تعداد از سلول‌ها، یک فلز واسطه در نقش آند قرار گرفته است؟

سلول (۱)	سلول (۲)	سلول (۳)	سلول (۴)
قلع ـ هیدروژن	منیزیم ـ مس	آلومینیم ـ هیدروژن	روی ـ نقره

۱) ۳ ـ ۱ ۲) ۳ ـ ۲ ۳) ۲ ـ ۱ ۴) ۲ ـ ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۴۸ ـ ۱۲۰۲)

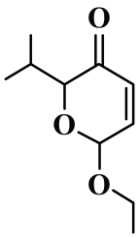
در رابطه با سلول‌های داده شده، داریم:

سلول	سلول (۱)	سلول (۲)	سلول (۳)	سلول (۴)
سلول	قلع ـ هیدروژن	منیزیم ـ مس	آلومینیم ـ هیدروژن	روی ـ نقره
آند	قلع	منیزیم	آلومینیم	روی
کاتد	SHE	مس	SHE	نقره
جنس آند	فلز اصلی	فلز اصلی	فلز اصلی	فلز واسطه

در سلول قلع-هیدروژن، **پتانسیل کاهشی استاندارد آند** در مقایسه با سلول روی-هیدروژن، **بیشتر** است. بر این اساس، **نیروی الکتروموتوری** این سلول در مقایسه با سلول روی-هیدروژن **کمتر** است. در سلول منیزیم-مس، **پتانسیل کاهشی استاندارد آند کمتر** و **پتانسیل کاهشی استاندارد کاتد بیشتر** از سلول روی-هیدروژن است، پس **نیروی الکتروموتوری** این سلول در مقایسه با سلول روی-هیدروژن بیشتر است. در سلول آلومینیم-هیدروژن، **پتانسیل کاهشی استاندارد آند** در مقایسه با سلول روی-هیدروژن، **منفی‌تر** است. بر این اساس، نیروی **الکتروموتوری** این سلول در مقایسه با سلول روی-هیدروژن بیشتر است. در سلول روی-نقره نیز **پتانسیل کاهشی استاندارد کاتد** در مقایسه با سلول روی-هیدروژن، **مثبت‌تر** است. بر این اساس، **نیروی الکتروموتوری** این سلول در مقایسه با سلول روی-هیدروژن **بیشتر** است.

ماز

۹۹- کدام مورد زیر، در رابطه با ساختار مولکول داده شده نادرست است؟ ($O = ۱۶, H = ۱ : g.mol^{-۱}$)



۱) دارای ۳ گروه متیل و یک گروه عاملی کربونیل است.
۲) شمار اتم‌های هیدروژن در آن، ۴ برابر شمار پیوندهای $C-O$ است.
۳) جرم اتم‌های اکسیژن موجود در آن، ۶ برابر جرم اتم‌های هیدروژن است.
۴) شمار جفت الکترون‌های ناپیوندی در آن، ۳ برابر شمار اتم‌های کربن با عدد اکسایش مثبت است.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی و مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۶۳ ـ ۱۲۰۲)

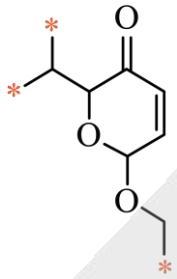
فرمول شیمیایی این ترکیب به‌صورت $C_۱۰H_{۱۶}O_۳$ نوشته می‌شود. در ساختار این ماده، **۱۰ اتم کربن**، **یک حلقه** و **۲ پیوند دوگانه** وجود دارد. با توجه به فرمول شیمیایی این ماده، نسبت جرم اتم‌های اکسیژن به هیدروژن در این ترکیب برابر است با:

$$\frac{\text{جرم اکسیژن}}{\text{جرم هیدروژن}} = \frac{۳ \times ۱۶}{۱۶ \times ۱} = ۳$$

WWW.ArefOnline.ir

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) این ترکیب دارای **سه گروه متیل** است که در شکل زیر مشخص شده‌اند:

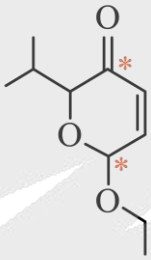


این ترکیب، **یک گروه عاملی کتونی** نیز در قسمت بالایی خود دارد که نوعی **کربونیل** است. علاوه بر این، در ساختار ترکیب مورد نظر **۲ گروه** عاملی اتری نیز یافت می‌شود.

۲) در ساختار این ترکیب آلی، **۱۶ اتم هیدروژن** و **۴ پیوند** $C\text{-}O$ وجود دارد. بر این اساس، مقدار نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{\text{تعداد اتم } H}{\text{تعداد پیوند } C-O} = \frac{۱۶}{۴} = ۴$$

۴) به ازای **هر اتم اکسیژن**، **۲ جفت الکترون ناپیوندی** در ساختار این ماده وجود دارد، پس این ماده در مجموع **۶ جفت الکترون ناپیوندی** دارد. در ساختار این ترکیب، تنها **دو اتم کربن** با عدد اکسایش **مثبت** وجود دارد که در شکل زیر مشخص شده‌اند:



۱۰۰- یک سلول الکترولیتی، در حال برقکافت آب است. در سمتی از این سلول که گاز تولید شده در آن دمای جوش بیشتری دارد، ۸ گرم فراورده گازی تولید شده است. در مدار خارجی این سلول چند الکترون مبادله شده و در قطب دیگر سلول، چند لیتر گاز در شرایط استاندارد تولید می‌شود؟ $(O = ۱۶ , C = ۱۲ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ - ۵/۶

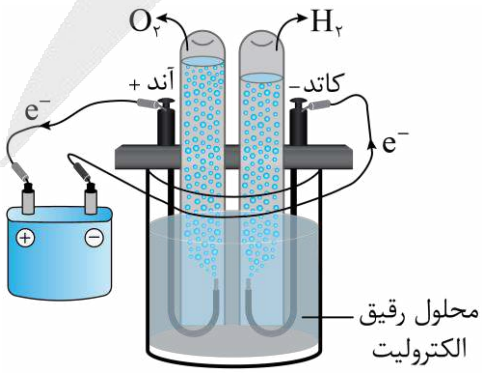
۲) $۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۴}$ - ۵/۶

۳) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}$ - ۱۱/۲

۴) $۴/۸۱۶ \times ۱۰^{۲۴}$ - ۱۱/۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۵۴ ـ ۱۲۰۲)

تصویر زیر، نمایی از سلول مربوط به برقکافت آب را نشان می‌دهد:



WWW.ArefOnline.ir

در سلول مورد نظر، واکنش $۲H_۲O(l) \xrightarrow{۴e} ۲H_۲(g) + O_۲(g)$ انجام می‌شود. در یک قطب این سلول، گاز **هیدروژن** و در قطب دیگر، گاز **اکسیژن** تولید می‌شود. اکسیژن در مقایسه با هیدروژن **جرم مولی بیشتر** داشته و بر این اساس، **قدرت نیروهای بین‌مولکولی** در آن **قوی‌تر** است و **دمای جوش** آن نیز **بالاتر** از هیدروژن است. با توجه به جرم گاز اکسیژن تولید شده (۸ گرم)، **تعداد الکترون مبادله شده** در مدار خارجی سلول را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,e \text{ تعداد} = ۸\,g\,O_۲ \times \frac{۱\,mol\,O_۲}{۳۲\,g\,O_۲} \times \frac{۴\,mol\,e}{۱\,mol\,O_۲} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,e}{۱\,mol\,e} = ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,e$$

در قدم بعد، **حجم گاز هیدروژن تولید شده** در سمت **کاتد** سلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم.

$$?\,L\,H_۲ = ۸\,g\,O_۲ \times \frac{۱\,mol\,O_۲}{۳۲\,g\,O_۲} \times \frac{۲\,mol\,H_۲}{۱\,mol\,O_۲} \times \frac{۲۲/۴\,L\,H_۲}{۱\,mol\,H_۲} = ۱۱/۲\,L$$

۱۰۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

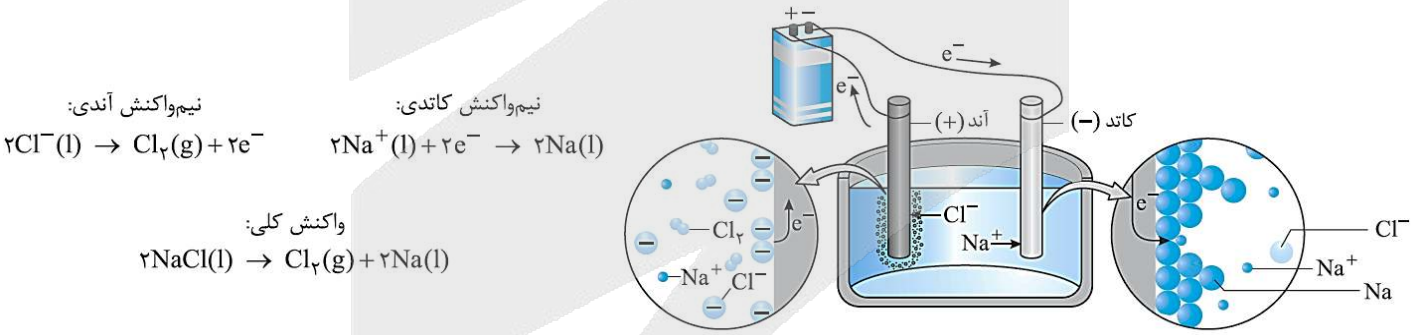
۱) سلول‌های سوختی، نوعی سلول گالوانی هستند که باعث کاهش ردپای کربن دی‌اکسید می‌شوند.
۲) نیم‌واکنش کاهش در کاتد سلول‌های مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب و منیزیم کلرید مذاب، یکسان است.
۳) در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن با غشای مبادله کننده هیدروژن، بخار آب از سمت قطب مثبت خارج می‌شود.
۴) در فرایند استخراج منیزیم از آب دریا، یک ترکیب یونی دوتایی را به حالت مذاب درآورده و سپس برقکافت می‌کنند.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۶ ـ ۱۲۰۲)

نیم‌واکنش **اکسایش** در برقکافت منیزیم کلرید مذاب و سدیم کلرید مذاب **یکسان** بوده و به‌صورت زیر است:

$$۲Cl^-(l) \rightarrow Cl_۲(g) + ۲e^-$$

طی این فرایند، **یون کلرید به گاز کلر** تبدیل می‌شود. تصویر زیر، نمایی از سلول الکترولیتی مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب را نشان می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سلول سوختی، نوعی سلول **گالوانی** است که توسط شیمی‌دان‌ها و برای گذر از تنگنای تولید انرژی و کاهش آلودگی محیط زیست پیشنهاد می‌شود. این سلول‌ها افزون بر کارایی بیشتر، می‌توانند **ردپای کربن دی‌اکسید** را **کاهش** بدهند. **رایج‌ترین** سلول سوختی، **سلول هیدروژن-اکسیژن** است که در آن گاز **هیدروژن** به آرامی و تحت یک شرایط **کنترل شده** با گاز **اکسیژن** وارد واکنش شده و اکسید می‌شود. طی این فرایند، **بخش زیادی** از انرژی شیمیایی ذخیره شده در مولکول‌های هیدروژن به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

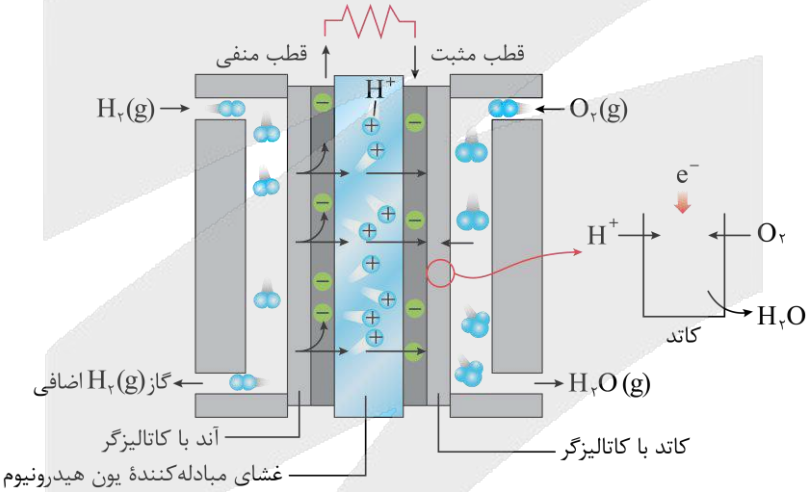
سلول‌های سوختی

با وجود پیشرفت‌های ایجادشده در زمینه تأمین انرژی، سوخت‌های فسیلی همچنان مناسب‌ترین سوخت برای استفاده در خودروها و نیروگاه‌ها به شمار می‌روند. در رابطه با مصرف این سوخت‌ها، دو چالش عمده زیر وجود دارد:

- استخراج و مصرف بی‌رویهٔ این سوخت‌ها سبب کاهش ذخایر آن‌ها شده است.
- افزایش استفاده از این سوخت‌ها سبب گسترش روزافزون آلودگی جهان و افزایش مقدار گازهای گلخانه‌ای شده است.

یکی از روش‌های تبدیل انرژی شیمیایی سوخت‌ها به انرژی الکتریکی، استفاده از سلول‌های سوختی است. در این روش، سوخت موردنظر به‌طور مستقیم وارد سلول‌های سوختی شده و انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در آن، مستقیماً به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. از آن‌جا که در سلول‌های سوختی، انرژی شیمیایی سوخت‌ها به‌طور مستقیم به انرژی الکتریکی تبدیل شده و برخلاف نیروگاه‌ها، در این روش چند مرحلهٔ متوالی از تبدیل انرژی صورت نمی‌گیرد، اتلاف انرژی به‌صورت گرما در این روش کمتر است و درصد بیشتری از انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در سوخت به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود. مراحل تبدیل انرژی در سلول سوختی و نیروگاه‌های حرارتی به شرح زیر است:

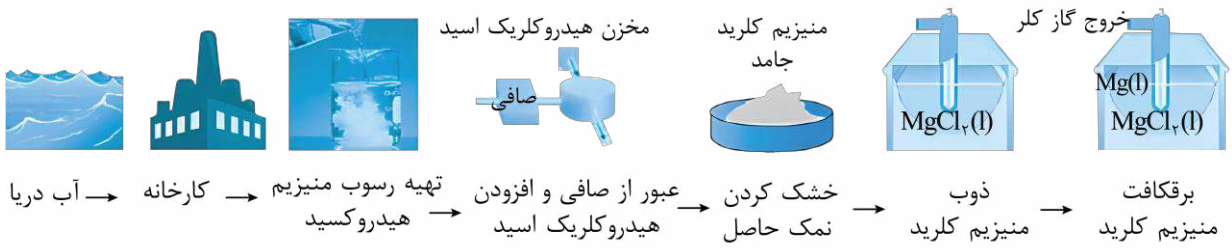
۳ نیم‌واکنش **کاهش** در سلول سوختی هیدروژن-اکسیژن، به‌صورت $O_2(g)+4H^+(aq)+4e^- \rightarrow 2H_2O(l)$ بوده و **بخار آب** از سمت **کاتد** (قطب **مثبت** این سلول) خارج می‌شود. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



۴ در مرحله **آخر** از فرایند استخراج فلز منیزیم از آب دریا، **منیزیم کلرید** حاصل را **ذوب** کرده و به کمک **جریان الکتریکی** و یک سلول **الکترولیتی** آن را **برقکافت** می‌کنند تا فلز **منیزیم مذاب** $(Mg(l))$ و **گاز کلر** $(Cl_2(g))$ به دست بیایند. نیم‌واکنش‌های **آندی** و **کاتدی** انجام‌شده در این سلول به‌صورت زیر هستند:

نیم‌واکنش آندی : $2Cl^-(l) \rightarrow Cl_2(g) + 2e^-$ نیم‌واکنش کاتدی : $Mg^{2+}(l) + 2e^- \rightarrow Mg(l)$

تصویر زیر، مراحل استخراج فلز منیزیم از آب دریا را نشان می‌دهد:



WWW.ArefOnline.ir

استخراج فلز منیزیم از آب دریا

بعد از سدیم، یون‌های منیزیم فراوان‌ترین کاتیون‌های موجود در آب دریا هستند. به همین خاطر، آب دریا یکی از منابع مورداستفاده برای استخراج فلز منیزیم به حساب می‌آید. برای این منظور، پس از انتقال آب دریا به کارخانه، منیزیم موجود در آن را در قالب ماده جامد و نامحلول منیزیم هیدروکسید رسوب داده و از سایر یون‌های موجود در آب جدا می‌کنند. در مرحله بعد، با اضافه کردن هیدروکلریک اسید به رسوب منیزیم هیدروکسید، آن را به منیزیم کلرید تبدیل کرده و پس از آن، آب موجود در محلول را تبخیر می‌کنند تا منیزیم کلرید جامد به دست بیاید. در مرحله بعد، منیزیم کلرید حاصل را ذوب کرده و به کمک جریان الکتریکی آن را برقکافت می‌کنند. فلز منیزیم ماده ارزشمندی است که از آن برای تهیه آلیاژها و شربت معده استفاده می‌شود.

ماز

۱۰۲- مخلوطی از مس (II) کلرید و آهن (II) برمید مذاب را در یک سلول الکترولیتی برقکافت می‌کنیم. در ساختار هر اتم از فراورده تولید شده در قطب منفی این سلول، چند الکترون با $n = ۳$ وجود دارد؟

۱) ۱۷ ۲) ۱۸ ۳) ۱۴ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۵ ـ ۱۲۰۲)

اگر در یک سلول **الکترولیتی**، بیشتر از یک نوع گونه **اکسنده** (گونه‌ای که بتواند **الکترون بگیرد**) وجود داشته باشد، میان این گونه‌ها برای به‌دست آوردن الکترون رقابت ایجاد می‌شود. به رقابت موردنظر، به اصطلاح **رقابت کاتدی** گفته می‌شود و در آن گونه‌ای برنده می‌شود که تمایل بیشتری برای گرفتن الکترون داشته باشد. به عبارت دیگر، گونه‌ای که E° بزرگ‌تری داشته باشد، در رقابت کاتدی پیروز شده و الکترون به دست می‌آورد. در این سلول، یون‌های **مس** و **آهن** توانایی گرفتن الکترون را دارند. چون مس پتانسیل کاهشی استاندارد **بالاتری** دارد، در رقابت برای گرفتن الکترون پیروز شده و در سمت **کاتد**، **مس** تولید می‌شود.

اگر در یک سلول **الکترولیتی**، بیشتر از یک نوع گونه **کاهنده** (گونه‌ای که بتواند **الکترون از دست بدهد**) وجود داشته باشد، میان این گونه‌ها برای از دست دادن الکترون رقابت ایجاد می‌شود. به رقابت موردنظر، به اصطلاح رقابت آندی گفته می‌شود و در آن گونه‌ای برنده می‌شود که تمایل **بیشتری** برای **از دست دادن الکترون** داشته باشد. به عبارت دیگر، گونه‌ای که E° **کوچک‌تری** داشته باشد و موقعیت آن در جدول پتانسیل‌های کاهش **پایین‌تر** باشد، در رقابت آندی پیروز شده و الکترون از دست می‌دهد. در این سلول، یون‌های کلرید و برمید توانایی از دست دادن الکترون را دارند. چون **برم خاصیت نافلزی کمتری دارد**، پتانسیل کاهشی استاندارد آن **پایین‌تر** بوده و در رقابت برای از دست دادن الکترون پیروز شده و در سمت **آند**، بخار **برم** تولید می‌شود.

با توجه به توضیحات داده شده، در قطب منفی این سلول فلز **مس** و در قطب **مثبت** آن **بخار برم** تولید می‌شود. هر اتم **مس** در آرایش الکترونی خود دارای **۱۸** الکترون در لایه **سوم** است.

ماز

۱۰۳- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست هستند؟

الف ـ آهن سفید، یکی از فراورده‌های صنعتی است که از آن برای ساختن تانکر آب و کانال کولر استفاده می‌شود.

ب ـ با اتصال فلزهای آهن و منیزیم به یکدیگر در هوای مرطوب، منیزیم نقش آند را ایفا کرده و خورده می‌شود.

ج ـ با انحلال گاز $SO_۳$ در قطرات آب موجود بر سطح آهن، سرعت خوردگی این فلز کاهش پیدا می‌کند.

د ـ به ازای خوردگی هر مول فلز آهن در مجاورت رطوبت هوا، ۱/۵ مول گاز اکسیژن مصرف می‌شود.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «ج» ۳) «ج» و «د» ۴) «الف» و «د»

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مفهومی ـ سریع ـ صفحهٔ ۵۹ ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های (الف) و (ب) درست هستند.

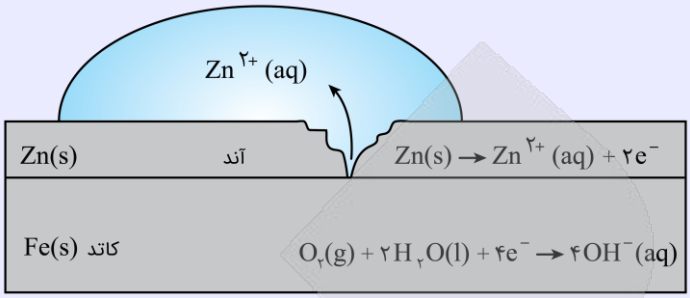
بررسی موارد:

الف) آهن سفید (آهن گالوانیزه)، یکی از فراورده‌های صنعتی است که از آن برای ساختن **تانکر آب** و **کانال کولر** استفاده می‌شود. در ساختار آهن سفید، یک لایه نازک از **فلز روی** بر سطح **آهن** قرار گرفته و این فرایند، باعث **محافظت از فلز آهن در برابر خوردگی** می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

آهن سفید

یکی از راه‌های محافظت از آهن در مقابل خوردگی، اتصال این فلز به فلزی است که پتانسیل کاهشی استاندارد منفی‌تری نسبت به آهن داشته باشد. برای مثال، به ورقه‌های آهنی که سطح آن‌ها با لایه نازکی از فلز روی پوشیده شده باشد، آهن گالوانیزه یا آهن سفید گفته می‌شود. تصویر زیر، یک قطعه از آهن گالوانیزه که سطح آن خراش برداشته را نشان می‌دهد:



همان‌طور که مشخص است، در ساختار این ماده عناصر آهن و روی وجود دارند. فداکاری فلز روی برای حفاظت از آهن سبب شد تا در صنعت از ورقه‌های گالوانیزه برای ساختن تانکر آب و کانال کولر و ... استفاده شود. تا قبل از ایجاد هر گونه خراشی در سطح آهن گالوانیزه، فلز روی به‌عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط خود روی نیز به خاطر ایجاد شدن یک لایه متراکم از $ZnO(s)$ در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. هنگامی که خراشی در سطح آهن گالوانیزه پدید می‌آید، هر دو فلز (روی و آهن) در مجاورت با اکسیژن و رطوبت قرار می‌گیرند و برای از دست دادن الکترون (اکسایش یافتن) رقابت می‌کنند. از آن‌جا که E° فلز روی از E° آهن کم‌تر است، فلز روی (عنصر فلزی با عدد اتمی بیشتر) در این رقابت پیروز شده و در نقش آند اکسید می‌شود و از آهن به‌عنوان یک محافظ کاتدی در مقابل خورده شدن محافظت می‌کند.

ب) چون **پتانسیل کاهشی منیزیم کمتر از آهن** است، با اتصال آهن و منیزیم به یکدیگر در هوای مرطوب، **منیزیم** نقش **آند** را ایفا کرده و **اکسید** می‌شود.

حفاظت کاتدی

وسایل آهنی در هوای مرطوب زنگ زده و پس از آن دچار خوردگی می‌شوند. این فرایند، یک واکنش اکسایش-کاهش نامطلوب و ناخواسته است که در شهرهای بندری و ساحلی به مقدار بیشتری انجام می‌شود. یکی از روش‌های جلوگیری از خوردگی آهن، محافظت کاتدی است. در این روش، فلزی که قرار است در برابر خوردگی محافظت شود را در تماس با یک فلز دیگری قرار می‌دهند که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد. در این شرایط، فلزهای موردنظر برای از دست دادن الکترون و اکسایش یافتن با یکدیگر رقابت می‌کنند. در چنین شرایطی، فلزی که E° کوچک‌تر و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون داشته باشد در نقش آند اکسید می‌شود، اما فلزی که E° بزرگ‌تری دارد در نقش کاتد ظاهر شده و در برابر خوردگی محافظت می‌شود.

ج) با انحلال مقداری گاز SO_2 در قطرات آب موجود بر سطح آهن، این قطرات آب خاصیت **اسیدی** پیدا می‌کنند و همان‌طور که می‌دانیم، **سرعت خوردگی** آهن در محیط‌های **اسیدی افزایش** پیدا می‌کند.

د) معادله واکنش فرایند **خوردگی آهن** به‌صورت $4Fe(s) + 3O_2(g) + 6H_2O(l) \rightarrow 4Fe(OH)_3(s)$ است. به ازای خوردگی **هر مول فلز آهن** در مجاورت رطوبت هوا، **۰/۷۵ مول گاز اکسیژن** مصرف می‌شود.

ماز

۱۰۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر درست است؟

۱) در فرایند آبکاری، تغییر جرم دو الکترودی که در الکترولیت قرار گرفته‌اند، می‌تواند برابر باشد.
۲) در فرایند آبکاری، جسم فلزی که آبکاری روی آن انجام می‌شود، به تیغه کاتدی باتری متصل است.
۳) همانند سلول فرایند هال، جرم آند به کار رفته در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، به مرور کاهش می‌یابد.
۴) تولید قوطی آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، به ۷۰٪ از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ مفهومی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۲ ـ ۱۲۰۲)

پوشش سطح یک فلز با لایه نازکی از فلزهای **ارزشمند** و **مقاوم در برابر خوردگی** (مانند طلا، نقره، کروم و ...)، **آبکاری** نام دارد. در سلول الکترولیتی مربوط به این فرایند، تیغه **فلز آبکاری** را به قطب **مثبت** باتری و **جسم فلزی** را به قطب **منفی** باتری وصل می‌کنیم. الکترولیت به کاررفته در این واکنش نیز **محلولی از نمک فلز آبکاری** است.

WWW.ArefOnline.ir

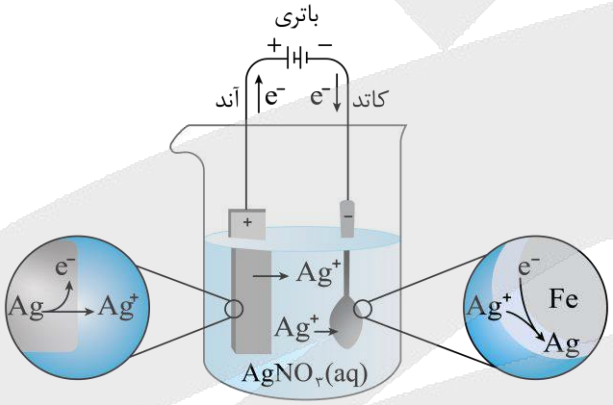
در قطب مثبت یا همان **آند**، فلز آبکاری اکسایش یافته و به کاتیون تبدیل می‌شود.الکترون آزادشده در این قطب به سمت قطب منفی یا همان کاتد رفته و در نیم‌واکنش کاهش، کاتیون موجود در محلول شرکت می‌کند. در واقع نیم‌واکنش‌ها انجام‌شده در این سلول **قرینه یکدیگر** هستند.

$$\text{کاتد}: M^{n+}(aq) + ne^- \longrightarrow M(s) \qquad \text{آند}: M(s) \longrightarrow M^{n+}(aq) + ne^-$$

در سلول آبکاری اگر n مول فلز در آند اکسایش یابد، n مول کاتیون همان فلز در کاتد کاهش می‌یابد. پس در این سلول، اگر آند از جنس فلز پوشاننده باشد، کاهش جرم تیغه آندی برابر افزایش جرم تیغه کاتدی است. همچنین با توجه به **تولید** و **مصرف مقدار یکسان کاتیون** در دو نیم‌واکنش، **غلظت کاتیون** این فلز در الکترولیت **ثابت** بوده و نیازی به اضافه کردن نمک آن به محلول حین انجام کار سلول **نیست**.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲) در فرایند آبکاری، جسمی که **آبکاری روی آن انجام می‌شود** باید به قطب **منفی** باتری وصل شود تا نقش **کاتد** را داشته باشد و بر روی سطح آن، نیم‌واکنش **کاهش** رخ دهد. **باتری**، نوعی سلول **گالوانی** بوده و قطب **منفی** آن معادل با **آند** است. تصویر زیر، نمایی از این سلول را نشان می‌دهد:



۳) در فرایند برقکافت سدیم کلرید مذاب، جرم تیغه‌های آندی و کاتدی بدون **تغییر** باقی می‌ماند؛ اما در **فرایند هال**، جرم تیغه‌های **آندی** گرافیتی **کاهش** پیدا می‌کند چراکه این تیغه‌ها در واکنش کلی انجام شده در سلول هال شرکت می‌کنند.

۴) فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی، هزینهٔ بالایی دارد؛ از این رو با **بازیافت فلز آلومینیم** می‌توان ضمن **افزایش عمر** یکی از مهم‌ترین منابع تجدیدناپذیر طبیعت، برخی از هزینه‌های تولید این فلز را کاهش داد. برای **نمونه تولید قوطی‌های آلومینیمی** از **قوطی‌های کهنه** فقط به **۷٪ از انرژی لازم** برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد. به عبارت دیگر، با **بازیافت قوطی‌های آلومینیمی** می‌توان به اندازهٔ **۹۳٪** در میزان انرژی مصرفی **صرفه‌جویی** کرد.

ماز

۱۰۵- در یک سلول الکترولیتی مربوط به فرآیند هال، اگر ۱۰٪ از کل الکترولیت موجود در سلول برقکافت شود، $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۴}$ الکترون میان دو الکترود مبادله می‌شود. در صورت مصرف کل الکترولیت موجود در سلول، چند تیغه ۱۵ گرمی گرافیت مصرف شده و چند گرم آلومینیم با خلوص ۹۶٪ تولید می‌شود؟ $(Al = ۲۷ , C = ۱۲ : g.mol^{-1})$

۱) ۱۸۷/۵ - ۴ ۲) ۹۳/۸ - ۴ ۳) ۹۳/۸ - ۵ ۴) ۱۸۷/۵ - ۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۱ ـ ۱۲۰۲)

فرایند هال به‌صورت مقابل انجام می‌شود:

$$۲Al_۲O_۳(l) + ۳C(s) \rightarrow ۴Al(l) + ۳CO_۲(g)$$

نیم‌واکنش **کاتدی** در این فرایند به‌صورت مقابل است:

$$Al^{۳+}(l) + ۳e^- \rightarrow Al(l)$$

WWW.ArefOnline.ir

در سلول الکترولیتی مورد نظر، اگر ۱۰٪ از کل الکترولیت برقکافت شود، $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۴}$ **الکترون** مبادله می‌شود. بر این اساس، اگر **کل الکترولیت** را برقکافت کنیم، **مجموعاً** $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۵}$ **الکترون** مبادله می‌شود؛ بنابراین جرم آلومینیم ناخالص تولید شده در صورت **پیشرفت کامل واکنش** مورد نظر برابر است با:

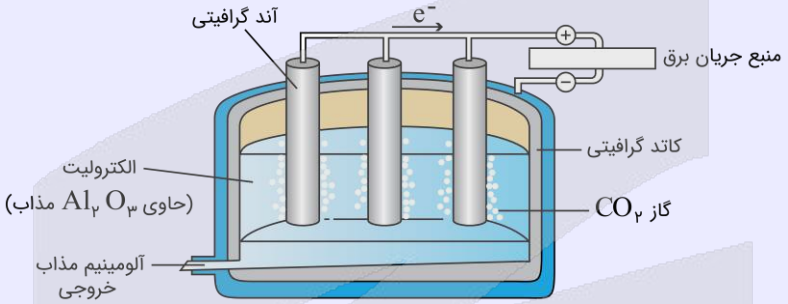
$$?\,g\,Al = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۵}\,e^- \times \frac{۱mol\,e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۱mol\,Al}{۳\,mol\,e^-} \times \frac{۲۷\,g\,Al}{۱\,mol\,Al} \times \frac{۱۰۰g\,Al\ \text{ناخالص}}{۹۶\,g\,Al} = ۱۸۷/۵\,g$$

در قدم بعد، تعداد **تیغه ۱۵ گرمی گرافیت مصرف شده** را محاسبه می‌کنیم:

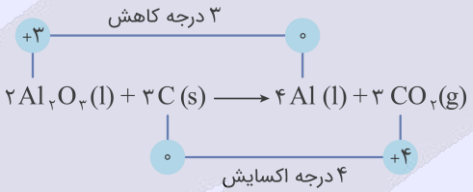
$$?\ \text{تیغه گرافیتی} = ۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۵}\,e^- \times \frac{۱\,mol\,e^-}{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}e^-} \times \frac{۱\,mol\,C}{۴\,mol\,e^-} \times \frac{۱۲\,g\,C}{۱\,mol\,C} \times \frac{۱\ \text{تیغه گرافیتی}}{۱۵\,g\,C} = ۴\ \text{تیغه}$$

فرایند هال

آلومینیم، همانند سدیم و منیزیم در دسته فلزهای فعال قرار داشته و به همین خاطر، در طبیعت به حالت آزاد وجود ندارد و به شکل ترکیب با سایر عناصر یافت می‌شود. علت واکنش‌پذیری زیاد آلومینیم را می‌توان به کم (منفی) بودن پتانسیل کاهشی استاندارد نیم‌واکنش کاهش این عنصر نسبت داد. به خاطر واکنش‌پذیری زیاد آلومینیم، این فلز را تنها از برقکافت نمک‌های آن می‌توان به دست آورد. رایج‌ترین روش برقکافت نمک‌های آلومینیم، به فرایند هال معروف است که در سلول زیر انجام می‌شود:



همان‌طور که مشخص است، جنس آند (تیغه‌های موجود در محلول) و کاتد (دیواره و بدنه ظرف) این سلول الکترولیتی از گرافیت است و الکترولیت به‌کاررفته در این سلول نیز آلومینیم اکسید مذاب می‌باشد. معادله واکنش کلی انجام شده در این سلول به‌صورت زیر خواهد بود:



WWW.ArefOnline.ir

برای مطالعهٔ بیشتر، این چند تا تست اضافه رو هم براتون گذاشتیم که علاوه‌بر آزمون، یک محک دوباره برای خودتون باشه!

۱- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) سوسپانسیون‌ها، نمونه‌ای از مخلوط‌های ناهمگن بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن‌ها مشخص است.
۲) برای تهیه صابون مراغه، روغن‌های گیاهی مثل روغن زیتون را به همراه $NaOH$، در دیگ‌هایی می‌جوشانند.
۳) یون فسفات با کاتیون‌های موجود در آب سخت واکنش داده و از ایجاد لکه توسط صابون‌ها جلوگیری می‌کند.
۴) گاز حاصل از واکنش مخلوط پودر آلومینیم و سود با آب، در انواعی از سلول‌های نورالکتروشیمیایی نیز تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۶۵ ـ ۱۲۰۱)

صابون طبیعی، معروف به **صابون مراغه**، با بیش از ۱۵۰ سال قدمت، **معروف‌ترین** صابون سنتی ایران است. برای تهیه این صابون، **پیه گوسفند** (نوعی از چربی‌های **جامد**) و **سود سوزآور** (**سدیم هیدروکسید**) را در دیگ‌های بزرگ با **آب** برای **چندین ساعت** می‌جوشانند و پس از **قالب‌گیری**، آن‌ها را در **آفتاب خشک** می‌کنند. این صابون **افزودنی شیمیایی نداشته** و به دلیل خاصیت **بازی** مناسب، از آن برای **شستن موهای چرب** استفاده می‌شود. توجه داریم که صابون تولید شده، حاوی کاتیون **سدیم** بوده و حالت **جامد** دارد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) سوسپانسیون‌ها، نوعی از مخلوط چند ماده هستند. در ساختار این مخلوط‌ها، **ذرات ریز ماده** در میان ذرات یک حلال مثل آب قرار گرفته‌اند. جدول زیر، ویژگی‌های محلول‌ها، کلوئیدها و سوسپانسیون‌ها را نشان می‌دهد:

ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
همگن بودن	ناهمگن است.	ناهمگن است.	همگن است.
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا ـ ذرات ریز ماده	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها
مثال‌ها	سالاد ـ مخلوط آب و روغن ـ شربت معده	مخلوط آب و صابون و روغن ـ سرامیک‌ها ـ انواع رنگ‌ها ـ چسب‌ها ـ شیر ـ ژله ـ مایونز	محلول آب‌نمک ـ محلول مس (II) سولفات در آب

با توجه به این جدول، می‌توان گفت سوسپانسیون‌ها نوعی مخلوط **ناهمگن** و **ناپایدار** هستند و چون **اندازه ذرات** سازنده آن‌ها **بزرگ** است، هنگام عبور نور نیز **نور را پخش** می‌کنند.

۳) **افزودن نمک‌های فسفات** به مواد **شوینده**، موجب **افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن‌ها** در آب‌های سخت می‌شود. یون فسفات موجود در این دسته از شوینده‌ها، با یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} براساس معادله‌های زیر واکنش می‌دهد:

$$2PO_4^{3-}(aq) + 3Ca^{2+}(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) \quad , \quad 2PO_4^{3-}(aq) + 3Mg^{2+}(aq) \rightarrow Mg_3(PO_4)_2(s)$$

طی این واکنش‌ها، یون‌های Mg^{2+} و Ca^{2+} به شکل رسوب درآمده و از محلول خارج می‌شوند. با **خارج** شدن این کاتیون‌ها، دیگر اختلالی در کار مولکول‌های صابون ایجاد نمی‌شود و صابون به خوبی کف می‌کند.

افزودنی‌های صابون

برخی از انواع صابون‌ها، فاقد مواد افزودنی بوده و برخی از آن‌ها، حاوی برخی افزودنی‌های شیمیایی هستند. هر افزودنی، تأثیر ویژه‌ای روی صابون خواهد داشت. تأثیر افزودنی‌های مختلف صابون‌ها به شرح زیر است:

- افزودنی‌های صابون
  - مواد گوگرددار ← از بین بردن جوش صورت و قارچ‌های پوستی
  - مواد کلردار ← افزایش خاصیت ضدعفونی کنندگی و میکروب‌کشی
  - نمک‌های فسفات ← افزایش قدرت پاک‌کنندگی صابون در آب‌های سخت

هر چند که اضافه کردن مواد افزودنی خواص ویژه‌ای را به شوینده‌ها می‌دهد، اما باید توجه داشت که هر چه شوینده‌ای مواد شیمیایی بیشتری به همراه خود داشته باشد، احتمال ایجاد عوارض جانبی توسط آن بیشتر می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

۴) معادلهٔ انجام شده به‌صورت زیر است:

$$۲Al + ۲NaOH + ۶H_۲O \rightarrow ۲NaAl(OH)_۴ + ۳H_۲$$

در این واکنش شیمیایی گاز **هیدروژن** به‌عنوان **فراورده** تولید می‌شود. در نوع خاصی از سلول **نورالکتروشیمیایی** نیز با استفاده از **انرژی نور**، می‌توان **آب** را تجزیه کرده و گاز **هیدروژن** تولید کرد.

ماز

۲- در شرایط استاندارد، مخلوطی از گازهای هیدروژن کلرید و گوگرد تری‌اکسید به حجم ۳۳/۶ لیتر را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول را به ۳۰ لیتر می‌رسانیم. مقدار pH محلول حاصل از این فرایند چقدر می‌تواند باشد و ۲ لیتر از این محلول، با چند گرم فلز آهن به‌طور کامل واکنش می‌دهد؟ ($Fe = ۵۶\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۱/۱۵ ـ ۳/۹۲ ۲) ۱/۱۵ ـ ۱/۹۶ ۳) ۱/۷ ـ ۱/۱۲ ۴) ۱/۷ ـ ۰/۵۶

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۲۵ ـ ۱۲۰۱)

هیدروژن کلرید، **یک اسید قوی** با $\alpha = ۱$ بوده و به هنگام انحلال در آب، **به‌طور کامل** یونش پیدا می‌کند. در این حالت، فرایند **یونش** اسید مورد نظر در آب به‌صورت زیر خواهد شد:

$$HCl(g) \xrightarrow{\text{انحلال در آب}} HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$$

گاز گوگرد تری‌اکسید نیز از جمله **اسیدهای آرنیوس** بوده و **سولفوریک اسید** را تولید می‌کند. بر اساس واکنش زیر، از انحلال **یک مول** گوگرد تری‌اکسید، دو **مول یون** H^+ و **یک مول یون** $SO_۴^{۲-}$ تولید می‌شود:

$$SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow ۲H^+(aq) + SO_۴^{۲-}(aq)$$

طبق فرض سؤال، **مجموعاً ۳۳/۶ لیتر** از این اسیدها در آب حل شده است. اگر فرض کنیم **کل مخلوط گازی از هیدروژن کلرید** تشکیل شده است، **غلظت یون هیدروژن** در محلول مورد نظر برابر خواهد شد با:

$$?\,mol\ H^+ = ۳۳/۶\ L\ HCl \times \frac{۱\ mol\ HCl}{۲۲/۴\ L\ HCl} \times \frac{۱\ mol\ H^+}{۱\ mol\ HCl} = ۱/۵\ mol$$

$$[H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۱/۵\ mol\ H^+}{۳۰\ L\ \text{محلول}} = ۰/۰۵\ mol.L^{-۱}$$

در این حالت، **مقدار pH محلول اسیدی** تولید شده برابر با ۱/۳ می‌شود. اگر فرض کنیم **کل مخلوط گازی از $SO_۳$** تشکیل شده است، **غلظت** یون هیدروژن در محلول مورد نظر برابر خواهد شد با:

$$?\,mol\ H^+ = ۳۳/۶\ L\ SO_۳ \times \frac{۱\ mol\ SO_۳}{۲۲/۴\ L\ SO_۳} \times \frac{۲\ mol\ H^+}{۱\ mol\ SO_۳} = ۳\ mol$$

$$[H^+] = \frac{\text{مول } H^+}{\text{لیتر محلول}} = \frac{۳\ mol\ H^+}{۳۰\ L\ \text{محلول}} = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$$

در این حالت نیز مقدار **pH محلول اسیدی** تولید شده برابر با **۱** می‌شود. چون مخلوط گازی از هر دو ماده **$SO_۳$** و **HCl** تشکیل شده است، پس **مقدار pH محلول** تولید شده عددی بین **۱** تا **۱/۳** خواهد شد. از میان اعداد داده شده در گزینه‌ها، عدد **$pH = ۱/۱۵$**، تنها عددی است که در بازه مورد نظر قرار می‌گیرد. در رابطه با این محلول، داریم:

$$pH = ۱/۱۵ \Longrightarrow [H^+] = ۱۰^{-۱/۱۵} = ۰/۰۷\ mol.L^{-۱}$$

یون هیدروژن موجود در محلول مورد نظر، مطابق با معادله زیر با فلز **آهن** وارد واکنش می‌شود:

$$۲H^+(aq) + Fe(s) \rightarrow Fe^{۲+}(aq) + H_۲(g)$$

توجه داریم که طی این فرایند (واکنش فلز آهن با اسیدها)، **هر اتم آهن ۲ الکترون از دست داده** و به یک کاتیون با بار ۲+ تبدیل می‌شود. فراورده چنین واکنشی، گاز **هیدروژن** خواهد بود. با توجه به معادله این واکنش شیمیایی، داریم:

$$?\,g\ Fe = ۲\ L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۰۷\ mol\ H^+}{۱\ L\ \text{محلول}} \times \frac{۱\ mol\ Fe}{۲\ mol\ H^+} \times \frac{۵۶\ g\ Fe}{۱\ mol\ Fe} = ۳/۹۲\ g$$

WWW.ArefOnline.ir

۳- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف ـ رنگ‌های پوششی و شربت معده، هر دو کلوئید بوده و برخلاف محلول ید در هگزان، نور را پخش می‌کنند.

ب ـ اگر گروه SO_3^- پاک‌کننده‌های غیر صابونی را با اتم H جایگزین کنیم، این مواد در آب حل نخواهند شد.

ج ـ یک نمونه شیر، حاوی توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت بوده و در طول زمان، ذرات آن ته‌نشین نمی‌شوند.

د ـ جوهر نمک، سدیم هیدروکسید و سفیدکننده‌ها از نظر شیمیایی فعال بوده و خاصیت خورندگی دارند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

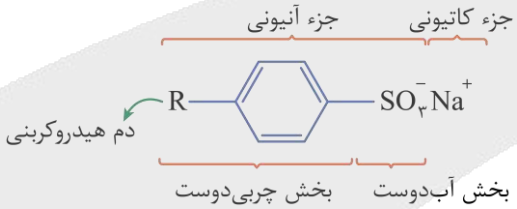
پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مفهومی و حفظی ـ استاندارد ـ صفحهٔ ۱۲ ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های (ج) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) **رنگ‌های پوششی**، نوعی **کلوئید** بوده و **شربت معده** نیز نوعی **سوسپانسیون** است و هر دوی آن‌ها **برخلاف** محلول ید در هگزان نور را **پخش** می‌کنند. توجه داریم که سوسپانسیون‌ها، نوعی از مخلوط‌های **ناهمگن** به شمار می‌روند.

ب) در ساختار پاک‌کننده‌های **غیر صابونی** یک **حلقه بنزنی** وجود دارد که از یک طرف به زنجیر **آلکیلی** و از یک طرف به گروه $-SO_3^-$ متصل است. توجه داریم که در ساختار این مواد، **۳ اتم اکسیژن** وجود دارد. ساختار کلی این مواد به‌صورت زیر است:

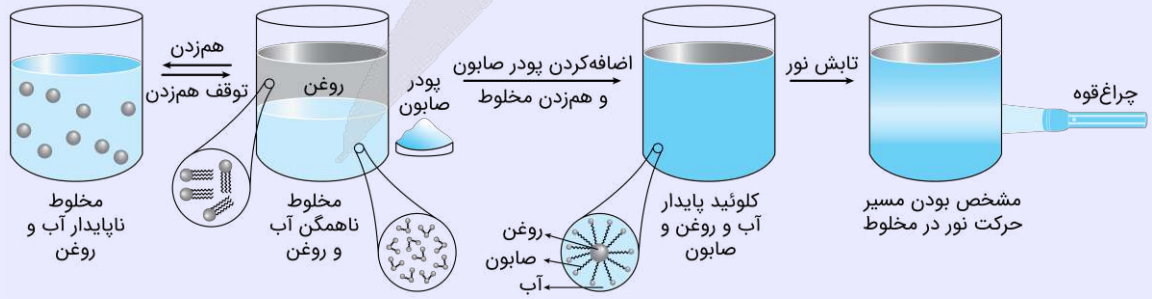


اگر گروه SO_3^- موجود در این مواد را با **اتم** H جایگزین کنیم، نوعی **هیدروکربن کاملاً ناقطبی** به‌دست می‌آید و بر این اساس، ماده ایجاد شده **در آب حل نخواهد شد.**

ج) شیر نوعی کلوئید است که از **توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت** ساخته شده است. **مسیر حرکت نور** در کلوئیدها **مشخص** است. کلوئیدها، **پایدار** بوده و در طول زمان، ذرات سازنده آن‌ها **ته‌نشین نمی‌شوند.**

کلوئیدها

در سال ۱۸۶۰ میلادی، دانشمندی به نام توماس گراهام برای توصیف ویژگی‌های برخی از مواد مثل چسب‌ها، ژلاتین و نشاسته، از واژه «کلوئید» استفاده کرد. کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به‌صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. چون اندازه ذرات موجود در کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است. توجه داریم که توده‌های مولکولی موجود در کلوئیدها اندازه‌های متفاوتی دارند. مخلوط آب، صابون و روغن نیز نوعی کلوئید است. تصویر زیر، خاصیت پخش نور در این کلوئید را نشان می‌دهد:



بدون حضور صابون، این مخلوط پایدار باقی نمانده و اجزای سازندهٔ آن از هم تفکیک می‌شوند.

د) موادی مانند هیدروکلریک اسید (جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید (سود) و سفیدکننده‌ها از جمله **پاک‌کننده‌های خورنده** هستند که از نظر شیمیایی فعال بوده و خاصیت **خورندگی** دارند.

WWW.ArefOnline.ir

۴- در واکنش موازنه نشدهٔ زیر، با مصرف نیمی از کلسیم فسفات موجود در ظرف، اختلاف جرم مواد جامد تولید شده به ۵۷/۲ گرم رسیده است. تا به اینجای کار، چند مول الکترون در این واکنش مبادله شده و با ادامه واکنش، چند لیتر گاز CO دیگر در شرایط STP تولید خواهد شد؟ $(Ca = ۴۰ , P = ۳۱ , Si = ۲۸ , O = ۱۶ , C = ۱۲ : g.mol^{-۱})$

$$Ca_۳(PO_۴)_۲(s) + SiO_۲(s) + C(s) \rightarrow CaSiO_۳(s) + CO(g) + P(s)$$

۱) ۴۴/۸ - ۲ ۲) ۴۴/۸ - ۴ ۳) ۲۲/۴ - ۲ ۴) ۲۲/۴ - ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ محاسباتی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۴۳ ـ ۱۲۰۲)

معادله موازنه‌شده واکنش به‌صورت زیر است:

$$Ca_۳(PO_۴)_۲ + ۳SiO_۲ + ۵C \rightarrow ۳CaSiO_۳ + ۵CO + ۲P$$

فراورده‌های جامد واکنش، دو ماده **فسفر** و $CaSiO_۳$ هستند. با توجه به معادله موازنه‌شده، به ازای هر بار انجام واکنش، **۲ مول فسفر** (معادل با ۶۲ گرم) و ۳ مول $CaSiO_۳$ (معادل با **۳۴۸ گرم**) تولید می‌شود. پس طبق معادله موازنه‌شده، با هر بار انجام شدن این واکنش، **تفاوت جرم فراورده‌های جامد** حاصل از آن به **۲۸۶ گرم** می‌رسد. از طرفی، با هر بار انجام شدن این واکنش، **۵ مول کربن با عدد اکسایش صفر**، به **۵ مول کربن با عدد اکسایش** ۲+ در ساختار CO تبدیل می‌شود. بر این اساس، معادله موازنه شده واکنش به‌صورت زیر خواهد بود:

$$Ca_۳(PO_۴)_۲ + ۳SiO_۲ + ۵C \xrightarrow{۱۰e^-} ۳CaSiO_۳ + ۵CO + ۲P$$

با توجه به توضیحات داده شده، با **هر بار انجام شدن** واکنش، **۱۰ مول الکترون** بین گونه‌ها مبادله شده و تفاوت جرم فراورده‌های جامد برابر با ۲۸۶ **گرم** می‌شود. بر این اساس، باید **تعداد الکترون مبادله شده در واکنش مورد نظر** را محاسبه کنیم:

$$?\,mol\,e^- = ۵۷/۲\,g \text{ تفاوت جرم} \times \frac{۱۰\,mol\,e^-}{۲۸۶\,g \text{ تفاوت جرم}} = ۲\,mol$$

با مصرف **نیمی از کلسیم فسفات** موجود در ظرف، تفاوت جرم فراورده‌ها برابر با **۵۷/۲ گرم** شده است. اگر **نیم دیگر** این ماده نیز مصرف شود، **۵۷/۲ گرم** دیگر به تفاوت جرم فراورده‌های جامد اضافه می‌شود. اکنون حجم گاز کربن **مونوکسید** تولیدشده به ازای وقتی که تفاوت جرم مواد جامد تولید شده برابر با **۵۷/۲ گرم** باشد را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$?\,L\,CO = ۵۷/۲\,g \text{ تفاوت جرم} \times \frac{۵\,mol\,CO}{۲۸۶\,g \text{ تفاوت جرم}} \times \frac{۲۲/۴\,L\,CO}{۱\,mol\,CO} = ۲۲/۴\,L$$

با توجه به محاسبات انجام‌شده، در **نیمه دوم** این واکنش، **۲۲/۴ لیتر گاز کربن مونوکسید** در شرایط استاندارد تولید خواهد شد.

۵- پس از موازنه معادله واکنش زیر، کدام مورد در رابطه با این فرایند درست است؟

$(Cu = ۶۴ , S = ۳۲ , O = ۱۶ , H = ۱ : g.mol^{-۱})$

$$Cu_۲O(s) + H_۲SO_۴(aq) \rightarrow CuSO_۴(aq) + SO_۲(g) + H_۲O(l)$$

۱) ضریب ترکیب اسیدی مصرف شده در این فرایند، ۲ برابر ضریب نمک محلول در آب تولید شده است.

۲) تغییر عدد اکسایش هر ذره مس در این واکنش، برابر با تغییر عدد اکسایش برخی از اتم‌های گوگرد است.

۳) با مصرف ۲۹/۴ گرم اسید در واکنش، تفاوت مقدار مول دو مورد از فراورده‌های تولید شده برابر ۰/۲ مول می‌شود.

۴) اگر مجموعاً ۱/۵ مول فراورده غیرگازی در این واکنش تولید شود، ۰/۹ مول واکنش‌دهنده حاوی اتم کاهنده مصرف می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی و مفهومی ـ زمان‌بر ـ صفحهٔ ۵۳ ـ ۱۲۰۲)

این مسئله، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور سراسری ۱۴۰۴ طراحی شده است. معادله موازنه شده واکنش به این صورت نوشته می‌شود:

$$Cu_۲O(s) + ۳H_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۲CuSO_۴(aq) + SO_۲(g) + ۳H_۲O(l)$$

WWW.ArefOnline.ir

با انجام واکنش موازنه شده برای **یک بار**، **تفاوت مقدار مول** H_2O و SO_2 تولید شده برابر با ۲ مول است. اگر در این واکنش **۲۹/۴ گرم** **اسید** (سولفوریک اسید) مصرف شود، **تفاوت مول** این دو ماده برابر است با:

$$?\,mol\ \text{تفاوت} = ۲۹/۴\ g\ H_2SO_4 \times \frac{۱\ mol\ H_2SO_4}{۹۸\ g\ H_2SO_4} \times \frac{۲\ mol\ \text{تفاوت}}{۳\ mol\ H_2SO_4} = ۰/۲\ mol$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ضریب **ترکیب اسیدی** (H_2SO_4) **و نمک محلول در آب تولید شده** ($CuSO_4$) به‌ترتیب **۳** و **۲** است. نسبت خواسته شده برابر است با:

$$\frac{H_2SO_4\ \text{ضریب}}{CuSO_4\ \text{ضریب}} = \frac{۳}{۲} = ۱/۵$$

۲) عدد اکسایش عنصر **مس** از $+۱$ در Cu_2O به $+۲$ در $CuSO_4$ رسیده است. در حالی که عدد اکسایش برخی از اتم‌های گوگرد، از $+۶$ در H_2SO_4 به $+۴$ در SO_2 رسیده است. پس تغییر عدد اکسایش این دو عنصر با هم **برابر نیست**.

۴) در معادله موازنه شده واکنش، **۵ مول فراورده غیر گازی** (**آب و مس (II) سولفات**) تولید شده است و **یک مول واکنش‌دهنده حاوی اتم کاهنده** (اتم Cu) یعنی Cu_2O مصرف شده است. بر این اساس، به ازای تولید **۱/۵ مول فراورده غیر گازی**، داریم:

$$?\,mol\ Cu_2O = ۱/۵\ mol\ \text{فراورده غیرگازی} \times \frac{۱\ mol\ Cu_2O}{۵\ mol\ \text{فراورده غیرگازی}} = ۰/۳\ mol$$

WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

بسته شبیه‌ساز کنکور
مارکوپولو منتشر شد!

- **۱۷ دوره کنکور سراسری** از ۹۸ تا ۱۴۰۴؛ آپدیت شده و منطبق با تغییرات کنکور ۱۴۰۵
- **پاسخنامه به سبک ماز:** شامل بررسی دقیق گزینه‌ها، نکته‌ها، جداول و کادرهای جمع‌بندی
- **قابلیت تخمین رتبه و تراز کنکور سراسری:** براساس نمرات نهایی و درصدهای کنکور
- **آزمون پیش‌بینی** کنکور سراسری ۱۴۰۵ از نگاه طراحان ماز
- **تحلیل پاسخنامهٔ ویدیویی سؤالات کنکور** توسط اساتید ماز
- **بستهٔ جامع آمادگی امتحانات نهایی** خرداد ۱۴۰۵
- بانک کنکور به تفکیک درس به درس و مبحث به مبحث مناسب دوران جمع‌بندی
- بانک کامل سؤالات شیمی و فیزیک کنکور تجربی مشترک با رشتهٔ ریاضی

ثبت سفارش
از سایت مازمارکت
mazemarket.ir

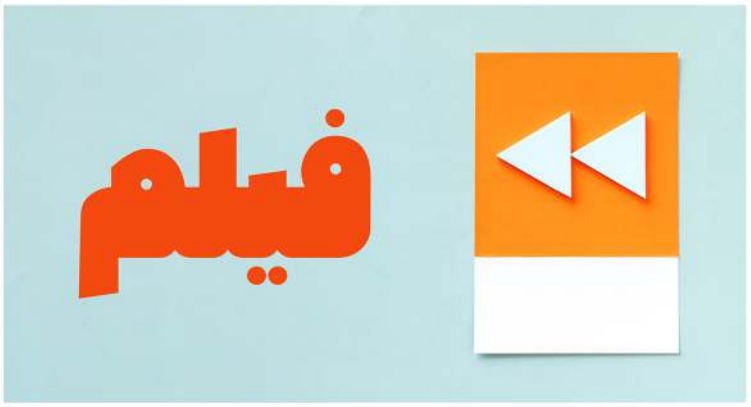
اسکن کن!

WWW.ArefOnline.ir

آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف