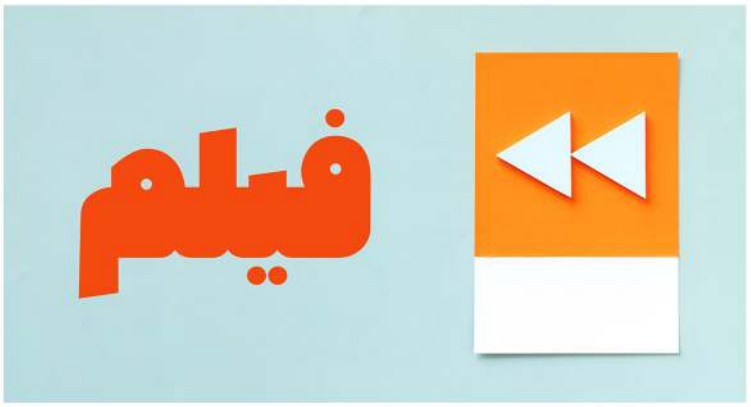

آزمون


کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰


جزوه


فیلم


مشاوره


www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

مرکز مشاوره عارف

آزمون آزمایشی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	آزمون هدیه
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۷/اسفند/۱۴۰۴

دفترچه شماره یک

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۴ و ۵ صفحهٔ ۷۱ تا ۱۴۴	–	–
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۲ (درس۳) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۷ تا ۸۶	–	–
ریاضیات گسسته	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۲ (درس ۲) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۳ تا ۸۴	–	–
مجموع	۴۰ سؤال			۷۰ دقیقه		–	

آزمون هدیه

این آزمون هدیه، برای این طراحی شده که بتونی مباحث نوبت دوم دوازدهم رو که تا این‌جا طبق برنامهٔ راهبردی جلو بردی، جمع‌بندی کنی. این آزمون آنلاینه و مثل همهٔ آزمون‌هامون، یک کارنامهٔ تحلیلی دقیق هم داره تا بتونی ارزیابی خوبی از دروس پایه تا به این‌جای مسیر، داشته باشی.

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

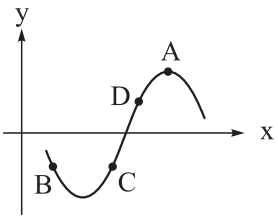
دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۱- اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، در کدام نقطه از نقاط مشخص‌شده، حاصل $\frac{f(x)}{f'(x)}$ عددی منفی است؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

۲- اگر $f(x)=\frac{1+\sqrt{2x}}{3+4x}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to 0/5}\frac{f(x)-f(0/5)}{x-0/5}$ کدام است؟

۱) $-0/12$
۲) $0/12$
۳) $0/52$
۴) $-0/52$

۳- یکی از خط‌های مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x-1)^2$ با نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم دستگاه مختصات موازی است. این خط مماس از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(\frac{1}{4},\frac{3}{4})$
۲) $(-\frac{1}{4},\frac{5}{4})$
۳) $(\frac{1}{4},\frac{1}{2})$
۴) $(-\frac{1}{4},\frac{3}{2})$

۴- اگر $f(x)=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}x+1}{x+1}}$ و $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۲
۴) $\sqrt{2}$

۵- تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2 & ; \quad x\geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x+b & ; \quad x<\frac{1}{2} \end{cases}$ در $x=\frac{1}{2}$ مشتق‌پذیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۴
۲) -4
۳) ۳
۴) -3

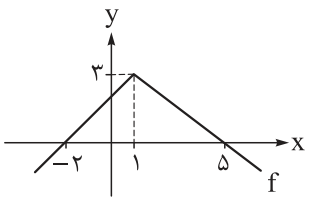
۶- تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|2x|+x+a}$ که $a>0$، در نقطهٔ $x=b$ مشتق ندارد. اگر $f'_-(b)\times f'_+(b)=-3$ باشد، مقدار a کدام است؟

۱) ۴
۲) $\frac{1}{2}$
۳) ۲
۴) $\frac{1}{4}$

محل انجام محاسبات

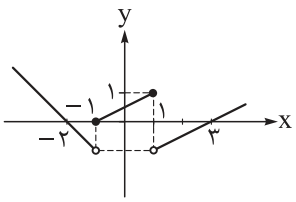
WWW.ArefOnline.ir

۷- نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{2h^2-h}$ کدام است؟



۱) $-0/75$
۲) $-0/5$
۳) $0/75$
۴) $0/5$

۸- نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. تابع $g(x)=f(x)+|f(x)|$ در چند نقطه از بازهٔ $(-2,3)$ مشتق‌پذیر نیست؟

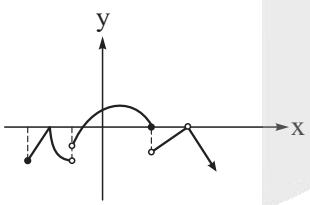


۱) ۴
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۱

۹- اگر $f(x)=g(\sin x)$ و $g'(x)=\frac{x}{1-x^2}$ باشد، حاصل $f''(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) ۳
۴) ۴

۱۰- با توجه به شکل، تابعی که نمودار آن رسم شده است، به ترتیب چند نقطهٔ بحرانی و چند اکسترمم نسبی دارد؟



۱) ۵ـ۳
۲) ۵ـ۲
۳) ۴ـ۳
۴) ۴ـ۲

۱۱- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^2}{x-1}$، روی بازهٔ $(1,k)$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{5}{3}$
۲) ۲
۳) $\frac{5}{2}$
۴) ۳

۱۲- تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax}{x^2+b}$ در نقطهٔ $(-1,2)$ اکسترمم دارد. مقدار ab و نوع اکسترمم دیگر آن کدام است؟

۱) ۲−، ماکزیمم
۲) ۴−، ماکزیمم
۳) ۲−، مینیمم
۴) ۴−، مینیمم

۱۳- مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x)=|x-4|\sqrt[3]{x}$ روی بازهٔ $[0,8]$ کدام است؟

۱) ۷
۲) ۸
۳) ۹
۴) ۱۱

محل انجام محاسبات

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

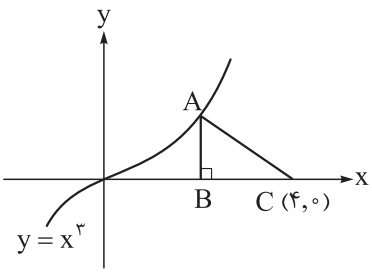
۱۴- اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{۱}{x} & ; \ x<-۱ \\ |x|-x & ; \ x>-۱\end{cases}$ و $g(x)=x^۳-۳x$، آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $(-۲,۲)$ ۲) $(-۲,۲]$ ۳) $[-۲,۲)$ ۴) $[-۲,۲]$

۱۵- در یک استوانه با حجم ۲π، حداقل مقدار سطح کل کدام است؟

۱) ۹π ۲) ۴π ۳) ۸π ۴) ۶π

۱۶- با توجه به شکل روبه‌رو، ماکزیمم مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC کدام است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۳

۳) ۱۳/۵

۴) ۱۲/۵

۱۷- نقطه‌ای با کدام طول برای تابع $f(x)=\cos^۲ x+\sin x$ یک نقطهٔ بحرانی است، ولی یک نقطهٔ اکسترمم مطلق نیست؟

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

۱۸- جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^۴-۲x^۳+۲x-۱$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

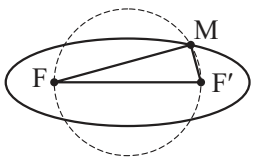
۱۹- در یک بیضی، طول کوچک‌ترین قطر، چهار برابر فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۴ ۲) ۰/۶ ۳) ۰/۸ ۴) ۰/۵

۲۰- دو نقطهٔ $(11,1)$ و $(-5,1)$ دو سر کوچک‌ترین قطر یک بیضی هستند که طول بزرگ‌ترین قطر آن ۲۰ است. اگر از نقطهٔ $(-5,3)$ یک پرتوی نورانی به بدنهٔ این بیضی بتابد، بازتاب آن از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(3,7)$ ۲) $(5,1)$ ۳) $(3,1)$ ۴) $(5,7)$

۲۱- در شکل رسم‌شده، $FF' = 4\sqrt{5}$ پاره‌خط واصل دو کانون بیضی است که قطر دایره هم می‌باشد. اگر مساحت مثلث MFF' برابر با ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟



۱) $\sqrt{0/5}$
۲) $\sqrt{0/6}$
۳) $\sqrt{0/75}$
۴) $\sqrt{0/8}$

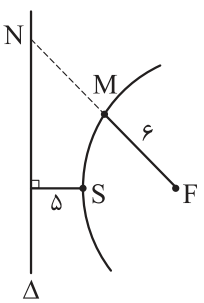
۲۲- در سهمی به معادلهٔ $(x+1)^2 = 4y$ فاصلهٔ کانون از خط هادی کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۰/۵ ۴) ۴

۲۳- کانون سهمی به معادلهٔ $x^2 + 6y = ax + 3$ بر محور xها واقع است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از محور تقارن این سهمی کدام است؟

۱) $\sqrt{6}$ ۲) $2\sqrt{6}$ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۴- در شکل رسم‌شده، دو نقطهٔ S و F به ترتیب رأس و کانون سهمی و Δ خط هادی آن است. از نقطهٔ M واقع بر سهمی به F وصل کرده‌ایم، اگر امتداد MF، خط Δ را در N قطع کند، طول MN کدام است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۸

۲۵- مساحت قسمتی از نمودار رابطهٔ $R = \{(x,y) \mid \sqrt{x-y} \le 1, y \le 1\}$ که در ناحیهٔ اول مختصات قرار دارد، کدام است؟

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $\frac{1}{2}$

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۲۶- اگر m عددی طبیعی باشد، به طوری که نقطهٔ $A(m-۴,۴-m,m^۲-۵m)$ در ناحیهٔ ششم و نقطهٔ $B(m-۲,m^۲-۴m,۲-m)$ در ناحیهٔ هشتم دستگاه مختصات واقع باشد، فاصلهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات، به کدام عدد صحیح نزدیک‌تر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۲۷- سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب با طول‌های ۲، ۳ و ۴ در تساوی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ صدق می‌کنند، حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ کدام است؟

۱) $۳/۵$ ۲) $۱/۵$ ۳) $-۵/۵$ ۴) $-۱۱/۵$

۲۸- زاویهٔ بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ به ترتیب با طول‌های ۴ و ۵ منفرجه و مساحت مثلث بناشده روی آن‌ها ۸ است. طول بردار $\vec{u}-\vec{v}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۷}$ ۲) $\sqrt{۶۵}$ ۳) $۲\sqrt{۱۵}$ ۴) $۲\sqrt{۱۷}$

۲۹- دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب با طول‌های ۵ و ۲، با هم زاویهٔ منفرجه می‌سازند. اگر اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار ۸ باشد، حاصل $|\vec{a}.(\vec{a}-\frac{۱}{۲}\vec{b})|+|\vec{a}\times(\vec{a}-\frac{۱}{۲}\vec{b})|$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

۳۰- اگر $\vec{a}=(۰,۳,۱)$ و $\vec{b}=(-۲,۱,۰)$، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

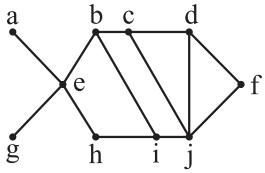
محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۳۱- در گراف ۷رأسی با $\Delta = 3$، عدد احاطه‌گری چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟

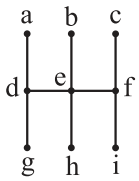
۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۲- کدام مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G است؟



۱) $\{a,g,b,c,f\}$
۲) $\{a,g,i,c,f\}$
۳) $\{a,e,c,i,d\}$
۴) $\{e,b,h,j,i\}$

۳۳- گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم دارد؟



۱) ۳
۲) ۷
۳) ۱۱
۴) ۱۵

۳۴- چند عدد ۷رقمی مضرب ۵ با ارقام $1,5,3,2,0,0,0$ می‌توان ساخت؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۲۴۰ ۳) ۳۰۰ ۴) ۳۶۰

۳۵- به چند طریق می‌توان از بین ۳ نوع گل مریم، لاله و شقایق، ۸ شاخه گل انتخاب کرد، به طوری که از گل مریم لااقل ۲ شاخه و از بقیهٔ گل‌ها حداقل یک شاخه انتخاب کرده باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵ ۳) ۱۸ ۴) ۲۱

۳۶- معادلهٔ $x_1 + x_2 + \frac{6}{\sqrt{x_3}} = 10$ چند جواب طبیعی دارد؟

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۳۷- دو مربع لاتین 3×3 به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این دو مربع لاتین متعامدند؟

۱) $\frac{1}{4}$ ۲) $\frac{1}{6}$ ۳) $\frac{5}{11}$ ۴) $\frac{6}{11}$

۳۸- چند عدد طبیعی n کوچک‌تر یا مساوی ۳۰۰ وجود دارد، به طوری که $(n,12)\neq1$ و $(n,25)=1$؟

۱) ۱۲۰ ۲) ۱۴۰ ۳) ۱۶۰ ۴) ۱۸۰

۳۹- ۱۲۰ تابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ nعضوی A به مجموعهٔ ۶عضوی B وجود دارد. چند تابع پوشا از B به A وجود دارد؟

۱) ۱۵۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۱۰

۴۰- حداکثر چند عدد از مجموعهٔ $\{10,11,12,\ldots,31\}$ می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر ۱۵ نشود؟

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

محل انجام محاسبات

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.

azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

آزمون آزمایشی خیلی سبز

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	آزمون هدیه
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۷/اسفند/۱۴۰۴

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۳ تا ۶ صفحهٔ ۶۱ تا ۱۵۶	–	–
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۳ و ۴ صفحهٔ ۶۷ تا ۱۲۳	–	–
مجموع			۶۵ سؤال	۷۵ دقیقه		–	

آزمون هدیه

این آزمون هدیه، برای این طراحی شده که بتونی مباحث نوبت دوم دوازدهم رو که تا این‌جا طبق برنامهٔ راهبردی جلو بردی، جمع‌بندی کنی. این آزمون آنلاینه و مثل همهٔ آزمون‌هامون، یک کارنامهٔ تحلیلی دقیق هم داره تا بتونی ارزیابی خوبی از دروس پایه تا به این‌جای مسیر، داشته باشی.

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

Azmoon.kheilisabz.com

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۴۱- نوسانگر هماهنگ ساده‌ای روی محور x و حول مبدأ در حال نوسان است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این نوسانگر درست است؟

الف) در لحظه‌ای که جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر تغییر می‌کند، اندازهٔ تکانهٔ آن بیشینه است.

ب) در بازهٔ زمانی‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر در حال افزایش است، اندازهٔ شتاب آن کاهش می‌یابد.

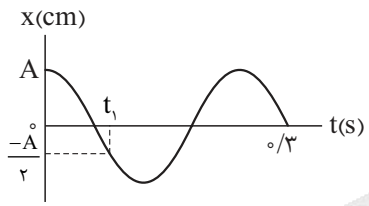
پ) هنگامی که نوسانگر در حال دورشدن از نقطهٔ تعادل است، انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد.

ت) در لحظه‌ای که اندازهٔ تکانهٔ نوسانگر بیشینه است، جهت حرکت نوسانگر تغییر می‌کند.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ

۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

۴۲- نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل زیر است. لحظهٔ t_1 برحسب ثانیه کدام است؟



۱) ۰/۰۴

۲) ۰/۰۸

۳) ۰/۰۶

۴) ۰/۱۲

۴۳- نوسانگری روی محور x و حول مبدأ با دامنهٔ ۵ cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. این نوسانگر در هر دقیقه ۳۰ بار پاره‌خط نوسان را طی می‌کند. در لحظهٔ t_1 نوسانگر از مکان $x_1 = +۳\ cm$ عبور کرده و انرژی پتانسیل کشسانی آن در حال افزایش است. در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + ۲$ (برحسب ثانیه) به ترتیب بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه هستند؟

۱) صفر ـ ۵

۲) صفر ـ ۱۰

۳) ۵ ـ ۳

۴) ۱۰ ـ ۳

۴۴- دامنهٔ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برابر A است. نوسانگر در لحظهٔ t_1 به صورت کندشونده از مکان $x_1 = \frac{A}{۲}$ و پس از یک بار عبور از مبدأ، در لحظهٔ t_2 به صورت تندشونده از مکان $x_2 = -\frac{A}{۲}$ عبور می‌کند. تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 چند برابر تندی بیشینهٔ آن در این مدت است؟ (نوسانگر بر روی محور x و حول مبدأ نوسان می‌کند.)

۱) $\frac{۹}{۵\pi}$

۲) $\frac{۹}{۴\pi}$

۳) $\frac{۲}{\pi}$

۴) $\frac{۳}{\pi}$

محل انجام محاسبات

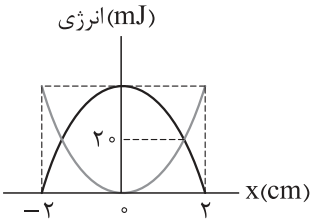
WWW.ArefOnline.ir

۴۵- در شکل زیر، نوسانگر ساده‌ای روی محور x حول نقطهٔ O حرکت می‌کند. در جابه‌جایی نوسانگر از نقطهٔ M تا نقطهٔ N، انرژی پتانسیل نوسانگر ۸۰ درصد کاهش و انرژی جنبشی آن ۴۰ درصد افزایش می‌یابد. تندی نوسانگر در نقطهٔ M چند برابر تندی بیشینهٔ آن است؟



۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۳}$ ۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

۴۶- نمودار تغییرات انرژی نوسانگر ساده‌ای برحسب مکان به شکل زیر است. اگر در لحظه‌ای که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر هستند، تندی نوسانگر $۴\pi\sqrt{۲}\ cm/s$ باشد، حداقل زمان لازم برای آن‌که انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به ۴۰ mJ برسد، چند ثانیه است؟

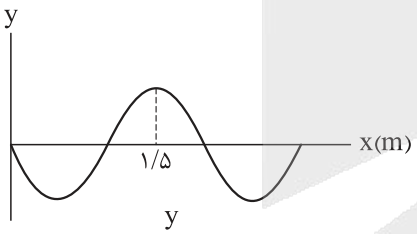


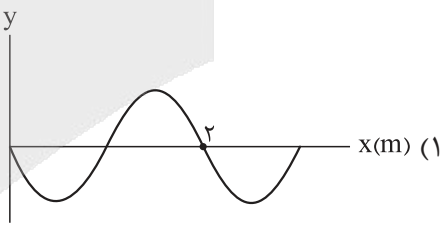
۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۴}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) ۱

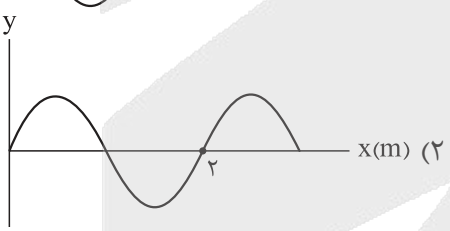
۴۷- جرم دو طناب A و B برابر و طول طناب A، ۲۸ درصد کم‌تر از طول طناب B است. اگر نیروی کشش طناب A، ۲ برابر نیروی کشش طناب B باشد، مدتی که طول می‌کشد تا موج عرضی طول طناب A را طی کند، چند برابر مدتی است که موج عرضی طول طناب B را طی می‌کند؟

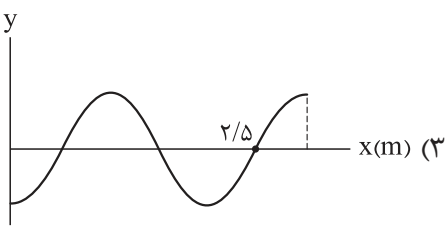
۱) $\frac{۱۰}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۱۰}$ ۳) $\frac{۵}{۳}$ ۴) $\frac{۳}{۵}$

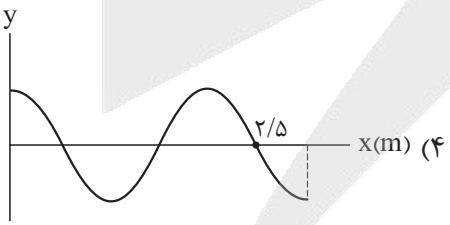
۴۸- شکل روبه‌رو تصویر لحظه‌ای موج سینوسی را در لحظهٔ $t_۱$ نشان می‌دهد. اگر سرعت انتشار موج $(-۲/۵\ m/s)\vec{i}$ باشد، تصویر موج در لحظهٔ $t_۲ = t_۱ + ۰/۶\ s$ به کدام شکل است؟



۱)


۲)


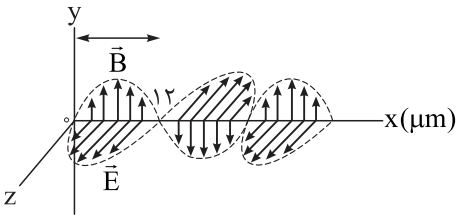
۳)


۴)


محل انجام محاسبات

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۴۹- تصویر یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود در لحظه‌ای معین به شکل زیر است. بسامد این موج چند هرتز و جهت انتشار آن کدام است؟ (تندی انتشار موج الکترومغناطیسی در خلأ $۳\times۱۰^{۸}\ m/s$ است.)



۱) $۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$، در جهت محور x

۲) $۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$، در خلاف جهت محور x

۳) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$، در جهت محور x

۴) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$، در خلاف جهت محور x

۵۰- شنونده‌ای در فاصلهٔ ۵متری از چشمهٔ صوتی قرار دارد. اگر دامنهٔ ارتعاش چشمهٔ صوت نصف شود، تراز شدت صوت دریافتی توسط شنونده ۲۵ درصد کاهش می‌یابد. اگر چشمهٔ صوت به شرایط اولیهٔ خود بازگردانده شود، شنونده در چه فاصله‌ای از چشمهٔ صوت قرار گیرد تا شدت صوت دریافتی آن به $۶۴\times۱۰^{-۱۲}\ W/m^{۲}$ برسد؟ (از جذب انرژی توسط محیط صرف نظر کنید، $I_{۰}=۱۰^{-۱۲}\ W/m^{۲}$ و $\log ۲=۰/۳$)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۵۱- اگر بسامد یک چشمهٔ صوت ۴۰ درصد افزایش و فاصلهٔ شنونده تا چشمهٔ صوت ۳۰ درصد کاهش یابد، تراز شدت صوت چگونه تغییر می‌کند؟ (از جذب انرژی توسط محیط صرف نظر شود و $\log ۲=۰/۳$)

۱) ۶ برابر می‌شود.

۲) ۰/۶ برابر می‌شود.

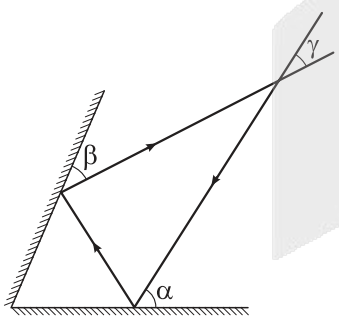
۳) ۰/۶ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

۴) ۶ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

۵۲- در بازتاب پرتو نور از سطح یک آینه، اگر زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب، ۶۰ درجه بیشتر از زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه باشد، زاویهٔ تابش چند درجه است؟

۱) ۳۰ ۲) ۴۰ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

۵۳- شکل زیر، مسیر پرتو نوری را در بازتاب از دو آینهٔ تخت متقاطع نشان می‌دهد. اگر زاویهٔ α، ۱۰ درجه افزایش یابد، به ترتیب زاویه‌های β و γ چگونه تغییر می‌کنند؟



۱) ۱۰° افزایش می‌یابد، ۲۰° افزایش می‌یابد

۲) ۱۰° افزایش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

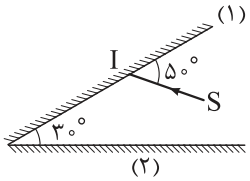
۳) ۱۰° کاهش می‌یابد، ۲۰° افزایش می‌یابد

۴) ۱۰° کاهش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۵۴- در شکل زیر پرتو SI به آینهٔ (۱) می‌تابد. این پرتو مجموعاً پس از چند بازتابش، آینه‌ها را ترک می‌کند؟ (سطح آینه‌های تخت را به اندازهٔ کافی بزرگ فرض کنید.)



۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۷

۵۵- شخصی بین دو مانع بلند و روبه‌روی هم ایستاده است. در لحظه‌ای شخص فریاد می‌زند. اول بدون آن‌که پژواک صدای خود از مانع نزدیک‌تر را از صدای اصلی تمیز دهد، پس از ۱/۲ s فقط پژواک صدای خود را از مانع دورتر می‌شنود. فاصلهٔ بین دو مانع حداکثر چند متر است؟ (تندی صوت در هوا ۳۴۰ m / s است و صوت از هر مانع فقط یک بار بازتاب می‌شود.)

۱) ۲۲۱ ۲) ۲۳۱ ۳) ۲۳۸ ۴) ۲۴۸

۵۶- پرتو نورتک‌رنگی با زاویهٔ تابش ۵۳° از هوا به محیط شفافی به ضریب شکست ۱/۶ می‌تابد. راستای انتشار این پرتو پس از ورود به محیط شفاف چند درجه تغییر می‌کند؟ $(\sin 53^\circ = 0/8)$

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۱۶ ۴) ۲۳

۵۷- انرژی هر کوانتوم یک موج الکترومغناطیسی ۸ eV است. این موج در کدام ناحیه از طیف الکترومغناطیسی قرار دارد؟ $(hc = 1240\ eV.nm)$

۱) فروسرخ ۲) نور مرئی ۳) فرابنفش ۴) رادیویی

۵۸- در پدیدهٔ فوتوالکتریک، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های جداشده از سطح فلز به کدام‌یک از عوامل زیر بستگی دارد؟

الف) بسامد نور فرودی ب) تعداد فوتون‌های فرودی

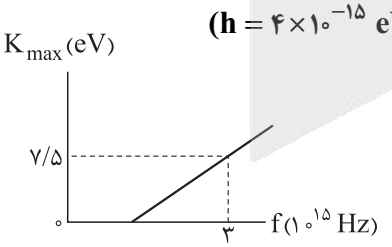
پ) شدت نور فرودی ت) جنس فلز

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ پ ۴) ب ـ ت

۵۹- اگر در یک آزمایش فوتوالکتریک، طول موج نور فرودی بر فلز معین را $\frac{1}{2}$ برابر کنیم، تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های خارج‌شده از سطح فلز n برابر می‌شود. کدام رابطه درست است؟

۱) $n = \sqrt{2}$ ۲) $n = 2$ ۳) $n > \sqrt{2}$ ۴) $n > 2$

۶۰- در یک آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های جداشده از سطح یک فلز مطابق شکل است. تابع کار این فلز چند الکترون‌ولت است؟ $(h = 4\times10^{-15}\ eV.s\ ,\ e = 1/6\times10^{-19}\ C)$



۱) ۱۲
۲) ۷/۵
۳) ۹
۴) ۴/۵

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۶۱- شدت تابشی خورشید در سطح زمین $300\ W/m^2$ است. اگر طول موج نور خورشید به طور متوسط $600\ nm$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به سطحی به مساحت $5\ m^2$ می‌رسد؟ ($c = 3\times10^8\ m/s$ و $h = 6\times10^{-34}\ J.s$)

۱) 3×10^{22} ۲) 3×10^{23} ۳) 6×10^{22} ۴) 6×10^{23}

۶۲- در طیف اتمی هیدروژن، گسترهٔ طول موج‌های رشتهٔ لیمان ($n' = 1$) چند میکرومتر است؟ ($R = 0/01\ (nm)^{-1}$)

۱) $\frac{1}{30}$ ۲) $\frac{1}{3}$ ۳) $\frac{2}{15}$ ۴) $\frac{4}{3}$

۶۳- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = 5$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این اتم به حالت پایه برود، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴ ۴) ۱۶

۶۴- کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) واپاشی α در هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد.

۲) یکی از کاربردهای واپاشی α در آشکارسازهای دود است.

۳) واپاشی β، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.

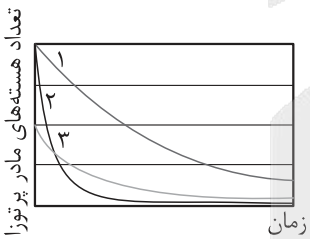
۴) اغلب هسته‌ها بلافاصله پس از واپاشی α یا β، به حالت پایه می‌رسند.

۶۵- در فرایندهای واپاشی «الف» و «ب»، تعداد نوترون‌های هستهٔ مادر به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

الف) ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{207}_{82}Pb + \alpha$ ب) ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{207}_{82}Pb + \beta^-$

۱) ۱۲۴ ـ ۱۲۶ ۲) ۱۲۳ ـ ۱۲۷ ۳) ۱۲۳ ـ ۱۲۴ ۴) ۱۲۶ ـ ۱۲۷

۶۶- نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونهٔ (۱)، (۲) و (۳) برحسب زمان به شکل زیر است. کدام مقایسه دربارهٔ نیمه‌عمر این سه نمونه (T) درست است؟



۱) $T_2 > T_1 > T_3$

۲) $T_1 > T_2 > T_3$

۳) $T_2 > T_3 > T_1$

۴) $T_1 > T_3 > T_2$

۶۷- اختلاف بسامد دومین و سومین خط طیف اتم هیدروژن در یک رشتهٔ معین $6/5\ THz$ است. این رشته کدام است؟ ($R = \frac{1}{100}\ (nm)^{-1}$, $c = 3\times10^8\ m/s$)

۱) بالمر ($n' = 2$) ۲) پاشن ($n' = 3$) ۳) براکت ($n' = 4$) ۴) لیمان ($n' = 1$)

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۶۸- در اتم هیدروژن وقتی الکترون از kامین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیخته جهش می‌کند، فوتونی با بسامد ۷۱۴ THz گسیل می‌شود. k کدام است؟ $(h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s \text{ و } E_R = ۱۳/۶\ eV)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۶۹- در اتم هیدروژن، الکترونی که در سومین حالت برانگیخته قرار دارد، یک فوتون در ناحیهٔ مرئی گسیل می‌کند. انرژی این فوتون چند ریدبرگ است؟

۱) $\frac{۸}{۹}$ ۲) $\frac{۷}{۱۴۴}$ ۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$ ۴) $\frac{۳}{۱۶}$

۷۰- بسامد سومین خط رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$ چند برابر کم‌ترین بسامد رشتهٔ براکت $(n' = ۴)$ است؟

۱) $\frac{۲۷}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

۷۱- بسامد هماهنگ چهارم تاری به طول ۵۰ cm برابر ۲۰۰ Hz و نیروی کشش آن ۶۰ N است. اگر چگالی تار $۸\ g/cm^۳$ باشد، قطر مقطع آن چند میلی‌متر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

۷۲- در فرایند واپاشی زیر، حاصل $N - N'$ کدام است؟

$$^{A}_{Z}X_N \rightarrow \alpha + ۳\beta^- + {}^{A'}_{Z'}Y_{N'}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

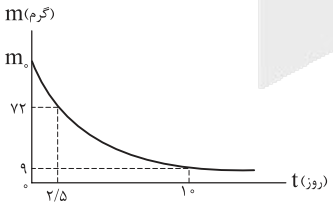
۷۳- در راکتور شکافت هسته‌ای، از کدام ماده به عنوان کندساز نوترون‌ها استفاده نمی‌شود؟

۱) آب $(H_۲O)$ ۲) آب سنگین $(D_۲O)$ ۳) گرافیت ۴) بور

۷۴- نسبت تعداد نوترون به تعداد پروتون، برای ایزوتوپ‌های پایدار سبک و ایزوتوپ‌های پایدار سنگین به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟

۱) کوچک‌تر از یک، تقریباً برابر با یک
۲) کوچک‌تر از یک، بزرگ‌تر از یک
۳) تقریباً برابر با یک، کوچک‌تر از یک
۴) تقریباً برابر با یک، بزرگ‌تر از یک

۷۵- نمودار جرم نمونه‌ای از یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان، به شکل زیر است. جرم اولیهٔ این نمونه $(m_۰)$ چند گرم است؟



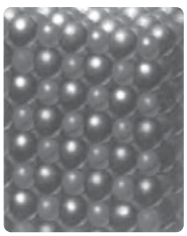
۱) ۲۸۸ ۲) ۱۴۴ ۳) ۲۱۶ ۴) ۱۰۸

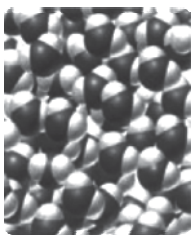
محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۷۶- در حالت خالص و جامد، ساختار ذره‌ای چند درصد از مواد داده‌شده با الگوی «الف» و ساختار ذره‌ای چند درصد از آن‌ها با الگوی «ب» همخوانی دارد؟


(الف)


(ب)

- **پتاس سوزآور**
- **فورمیک اسید**
- **جوش‌شیرین**
- **آهک**
- **آلومینیم اکسید**
- **هیدروژن کلرید**

۱) ۳۳ / ۳ ـ ۶۶ / ۷ ۲) ۳۳ / ۳ ـ ۵۰ ۳) ۱۶ / ۷ ـ ۶۶ / ۷ ۴) ۱۶ / ۷ ـ ۸۳ / ۳

۷۷- مخلوطی شامل ترکیب A، ۵ درصد جرمی آب و مقداری ناخالصی است. اگر پس از مدتی بر اثر جذب رطوبت، درصد جرمی آب و A به ترتیب به ۱۵ و ۶۸ برسد، درصد جرمی ناخالصی در نمونهٔ اولیه کدام است؟

۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

۷۸- اگر در شکل زیر، گلوله‌ها نشان‌دهندهٔ اتم کربن باشند، کدام مطلب دربارهٔ این ماده درست است؟



۱) یک جامد کووالانسی شفاف است و مقاومت کششی آن ۵ برابر فولاد است.
۲) برخلاف گرافیت، بین همهٔ اتم‌های آن پیوند اشتراکی وجود دارد و یک جامد کووالانسی انعطاف‌پذیر است.
۳) تک‌لایه‌ای از گرافیت به ضخامت ۱ مول اتم کربن است.
۴) برخلاف گرافیت، جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی‌دهد.

۷۹- کدام مطلب دربارهٔ الماس (A)، سیلیسیم کربید (X) و سیلیسیم (D) نادرست است؟

۱) آنتالپی پیوند موجود در ساختار D از A کم‌تر است.
۲) سختی، نقطهٔ ذوب و پایداری X از A کم‌تر و از D بیشتر است.
۳) هر سه، جامد کووالانسی بوده و ساختار بلوری آن‌ها مشابه و سه‌بعدی است.
۴) در ساختار این ۳ ماده، در مجموع ۴ نوع پیوند اشتراکی (از نظر نوع اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ پیوند) وجود دارد.

۸۰- کدام مطلب دربارهٔ یخ درست است؟

۱) شمار پیوندهای هیدروژنی در هر حلقهٔ موجود در ساختار آن، ۱/۵ برابر شمار پیوندهای هیدروژنی اطراف هر مولکول سازندهٔ آن است.
۲) جامدی دیرگداز با چینش سه‌بعدی و منظم است که موجب استحکام ویژهٔ آن شده است.
۳) اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های هشت‌ضلعی آن قرار داشته و با دو پیوند اشتراکی و دو پیوند هیدروژنی به ۴ اتم هیدروژن متصل هستند.
۴) در حالت خالص و تراش‌خورده، شفاف، زیبا و سخت است و در ساختار آن فضای خالی مشاهده نمی‌شود.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۸۱- کدام مطلب درست است؟

۱) در ساختار مواد کووالانسی، میان شمار معینی از اتم‌ها پیوند اشتراکی وجود دارد؛ به همین دلیل این مواد دیرگداز هستند.

۲) آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش یک مادهٔ مولکولی، به طور عمده به جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی موجود در ساختار آن وابسته است.

۳) برای توصیف اغلب ترکیب‌های آلی، می‌توان از واژه‌های شیمیایی رایجی مانند فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

۴) پایدارترین دگرشکل ششمین عنصر جدول تناوبی، ساختار مشابهی با چهاردهمین عنصر جدول تناوبی دارد.

۸۲- با توجه به نقشه‌های پتانسیل الکتروستاتیکی داده‌شده، کدام مطلب درست است؟



(II) (I)

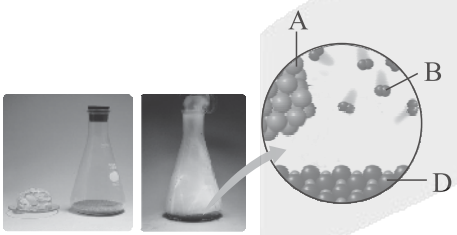
۱) گشتاور دوقطبی مولکول (II) برابر صفر است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

۲) مولکول (I) می‌تواند C_2H_4 باشد که توزیع بار الکتریکی پیرامون اتم‌های مرکزی در آن، متقارن است.

۳) هر اتم کناری در مولکول (II) دارای بار جزئی $+\delta$ و اتم مرکزی در آن دارای بار جزئی -3δ است.

۴) مولکول (II) می‌تواند ترکیب هیدروژن‌دار نخستین عنصر گروه ۱۳ جدول دوره‌ای باشد.

۸۳- با توجه به شکل زیر که مربوط به تشکیل سدیم کلرید است، کدام گزینه نادرست است؟



۱) مادهٔ D نسبت به مادهٔ B در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع است.

۲) بر خلاف D، مادهٔ A در حالت جامد نیز رسانای جریان برق است.

۳) در شبکهٔ بلور فراوردهٔ حاصل، یون‌های همنام به دو صورت، یکی در رأس‌ها و مرکز مکعب و دیگری در مرکز ضلع‌ها و مرکز وجه‌ها قرار گرفته‌اند.

۴) نیروهای میان یون‌های ناهمنام در هنگام تشکیل جامد D بر نیروهای میان یون‌های همنام غلبه کرده و این دو نوع نیرو، در تمام جهت‌ها به همهٔ یون‌ها وارد می‌شوند.

۸۴- با توجه به جدول زیر که مربوط به دو عنصر در دورهٔ سوم جدول تناوبی است، فرمول ترکیب حاصل از این دو عنصر کدام است؟

عنصر	شعاع اتم (pm)	شعاع یون (pm)	نسبت مقدار بار به شعاع یون
A	۱۰۲	۱۸۴	$۱/۰۹\times۱۰^{-۲}$
B	۱۴۳	۵۶	$۵/۳۶\times۱۰^{-۲}$

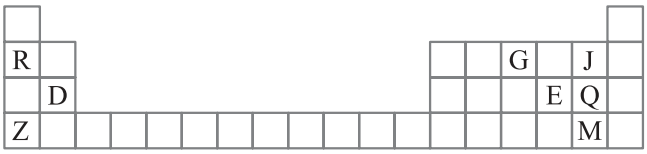
۱) A_2B_3 ۲) AB ۳) B_2A_3 ۴) BA_2

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۸۵- با توجه به عنصرهای مشخص‌شده در جدول داده‌شده، کدام مطلب درست است؟



۱) کم‌ترین آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب حاصل از واکنش این عنصرها، مربوط به دو عنصر D و G است.

۲) نیروی جاذبه بین یون‌ها در ترکیب حاصل از G و Z کم‌تر از ترکیب حاصل از D و J است.

۳) نقطهٔ ذوب ترکیب حاصل از واکنش عنصرهای Z و M بیشتر از ترکیب حاصل از واکنش عنصرهای D و E است.

۴) تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های RJ و RQ، بیشتر از این تفاوت در ترکیب‌های RQ و RM است.

۸۶- درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- **در ساختار فلزها، الکترون‌ها و کاتیون‌ها در دریای الکترونی، آزادانه در حال حرکت هستند.**
- **دریای الکترونی، عامل حفظ‌کنندهٔ چیدمان کاتیون‌ها در شبکهٔ بلوری فلز است.**
- **مطابق مدل دریای الکترونی، فلزها با سست‌ترین الکترون‌های خود یک دریای الکترونی می‌سازند.**
- **الکترون‌های موجود در دریای الکترونی فلزها را نمی‌توان تنها متعلق به یک اتم معین دانست.**

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۳) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۴) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

۸۷- کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) تیتانیم فلزی از دستهٔ d است که در ویژگی‌هایی مانند سختی و تنوع اعداد اکسایش، با فلزهای دستهٔ s و p تفاوت دارد.

ب) مهم‌ترین دلیل استفاده از تیتانیم در پوشش بیرونی موزهٔ گوگنهایم، سبک‌بودن و درخشندگی آن است.

پ) چگالی تیتانیم از فولاد کم‌تر و مقاومت آن در برابر سایش، از فولاد، بیشتر است.

ت) نقطهٔ ذوب و مقاومت گرمایی بالای تیتانیم، می‌تواند یکی از دلایل استفاده از این فلز در ساخت موتور جت باشد.

ث) نیتینول، آلیاژی هوشمند از تیتانیم و نیکل است که از آن در ساخت قاب عینک و سازه‌های ارتودنسی استفاده می‌شود.

۱) الف ـ پ ـ ت
۲) ب ـ پ ـ ث
۳) الف ـ ت ـ ث
۴) ت ـ ث

۸۸- یون سیلیکات از نظر شمار اتم‌های اکسیژن در فرمول شیمیایی، عدد اکسایش اتم مرکزی و نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی، به ترتیب مشابه کدام یون‌ها است؟

۱) فسفات ـ سولفات ـ کربنات
۲) سولفات ـ کربنات ـ فسفات
۳) سولفات ـ نیترات ـ فسفات
۴) فسفات ـ کربنات ـ نیترات

۸۹- مادهٔ خالصی در حالت مایع رسانای جریان برق است. کدام مطلب دربارهٔ این ماده به یقین درست است؟

۱) در حالت جامد شکننده است.

۲) برای توصیف آن می‌توان از واژهٔ شیمیایی نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

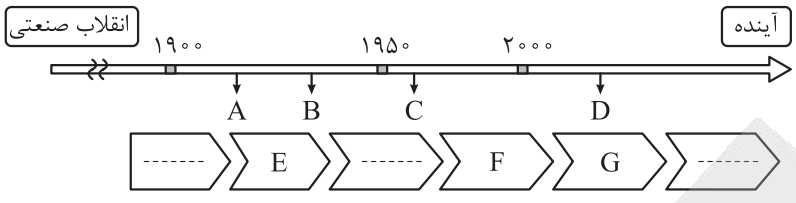
۳) اگر در اثر ضربهٔ چکش خرد نشود، در حالت جامد نیز رسانای جریان برق است.

۴) واحدهای سازندهٔ آن، یون‌هایی با بار مثبت و منفی هستند.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۹۰- با توجه به نمودار زیر که چند نمونه فراوردهٔ حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان را نشان می‌دهد، کدام موارد به درستی معرفی شده‌اند؟



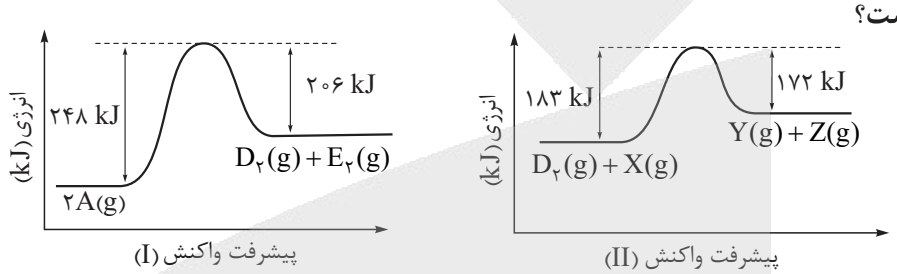
۱) A: اوره، B: آمونیاک، G: مراقبت‌های بهداشتی

۲) E: پوشش‌های دوستدار محیط زیست، C: ویتامین آ، D: مواد عایق گرما

۳) B: اوره، C: ویتامین آ، G: پوشش‌های دوستدار محیط زیست

۴) A: ویتامین آ، C: مواد عایق گرما، F: مراقبت‌های بهداشتی

۹۱- اگر واکنش‌های زیر در شرایط یکسان انجام شوند، با توجه به نمودارهای داده‌شده، درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب، کدام است؟



- **سرعت تشکیل گاز D_2 (در واکنش I) از سرعت مصرف آن (در واکنش II) کم‌تر است.**
- **تفاوت کم‌ترین انرژی مورد نیاز برای انجام دو واکنش، برابر ۵۶ کیلوژول است.**
- **به ازای مصرف ۱ مول گاز A در واکنش I، ۲۱ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.**
- **تفاوت آنتالپی دو واکنش برابر ۳۱ کیلوژول است.**

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۲) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

۹۲- کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟

الف) با استفاده از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان به شناسایی گروه‌های عاملی، آلاینده‌هایی مانند CO و NO_x و مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای پرداخت.

ب) برای شناسایی مواد، تنها می‌توان از برهم‌کنش امواج فروسرخ با آن‌ها بهره برد.

پ) دستگاه MRI، نمونه‌ای از کاربرد طیف‌سنجی در علم پزشکی است.

ت) جسمی که به رنگ سبز دیده می‌شود، تمام طول موج‌های مربوط به نور سبز را جذب می‌کند و سایر طول موج‌ها را عبور می‌دهد یا بازتاب می‌کند.

۱) الف ـ ب
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) پ ـ ت

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۹۳- با توجه به جدول زیر که مربوط به واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن است، کدام گزینه نادرست است؟

ردیف	شرایط آزمایش	دما ($^\circ C$)	سرعت واکنش
الف	بدون حضور کاتالیزگر	۲۵	ناچیز
ب	ایجاد جرقه در مخلوط	۲۵	؟
پ	در حضور پودر روی	۲۵	سریع
ت	در حضور تور پلاتینی	۲۵	انفجاری

۱) به ازای مصرف جرم یکسان واکنش‌دهنده‌ها، مقدار گرمای آزادشده در آزمایش (پ) با گرمای آزادشده در آزمایش (ت) تفاوتی ندارد.

۲) تأثیر پودر روی در کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش، کم‌تر از تأثیر توری پلاتینی است.

۳) سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها در آزمایش (پ)، بالاتر از سطح انرژی آن‌ها در آزمایش (الف) است.

۴) سرعت واکنش در آزمایش (ب) مشابه سرعت واکنش در آزمایش (ت) است.

۹۴- کدام گزینه در رابطه با مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، نادرست است؟

۱) همهٔ واکنش‌های حذف آلاینده‌ها در این مبدل‌ها، گرماده هستند.

۲) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ میلی‌متر وجود دارد.

۳) کارایی این مبدل‌ها به هنگام روشن و گرم شدن خودرو به‌ویژه در روزهای سرد زمستان، کاهش می‌یابد.

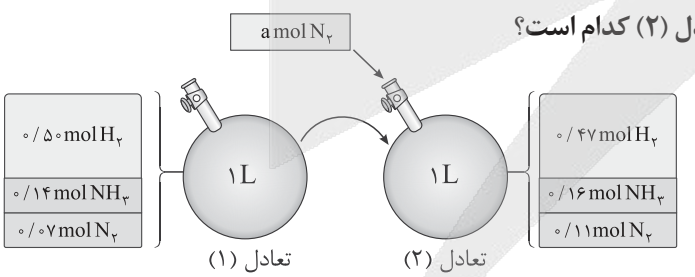
۴) فلزهای رودیم، پالادیم و پلاتین، کاتالیزگرهای مناسبی برای کاهش یا حذف آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها، در این مبدل‌ها هستند.

۹۵- در یک ظرف دربسته، مقداری از گازهای هیدروژن و کربن دی‌سولفید وارد شده است تا تعادل زیر برقرار شود. اگر در لحظهٔ تعادل، ۰/۱ مول از هر واکنش‌دهنده، ۰/۵ مول گاز متان و ۱ مول گاز هیدروژن سولفید در مخلوط تعادلی وجود داشته باشد، حجم ظرف واکنش چند لیتر است؟ $K = 1/25 \times 10^6$

$$CS_2(g) + 4H_2(g) \rightleftharpoons CH_4(g) + 2H_2S(g)$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

۹۶- در محفظه‌ای به حجم یک لیتر، تعادل $2NH_3(g) \rightleftharpoons N_2(g) + 3H_2(g)$ **در دمای** $200^\circ C$ **برقرار است. شکل زیر، افزودن مقداری نیتروژن را به این سامانه در دمای ثابت نشان می‌دهد. با توجه به شکل، مقدار نیتروژن افزوده‌شده به سامانه در شرایط STP، چند لیتر حجم دارد و مقدار ثابت تعادل (۲) کدام است؟**



۱) ۱/۱۲ _ ۲/۰۵

۲) ۰/۸۹۶ _ ۲/۰۵

۳) ۱/۱۲ _ ۲/۲۴

۴) ۰/۸۹۶ _ ۲/۲۴

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۹۷- در فرایند تولید آمونیاک به روش هابر، کدام عامل درصد مولی فراورده در مخلوط تعادلی را افزایش می‌دهد، اما بر مقدار ثابت تعادل واکنش بی‌تأثیر است؟

۱) افزایش فشار
۲) کاهش دما
۳) افزایش دما
۴) کاهش فشار

۹۸- کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ سامانه‌های تعادلی داده‌شده درست است؟

I) $N_2O_4(g) + Q \rightleftharpoons 2NO_2(g)$ II) $NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq) + Q'$

الف) با افزایش دمای سامانهٔ تعادلی (II)، pH محلول کاهش می‌یابد.

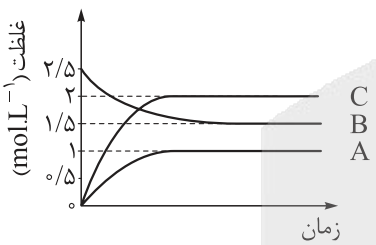
ب) با کاهش حجم ظرف واکنش (I)، غلظت تعادلی گاز قهوه‌ای‌رنگ نسبت به تعادل اولیه، کاهش می‌یابد.

پ) افزودن یک باز به محلول تعادل (II)، سامانه را به سمت چپ جابه‌جا می‌کند.

ت) با کاهش دمای سامانهٔ تعادلی (I)، شمار مولکول‌های موجود در ظرف افزایش می‌یابد.

۱) الف ـ پ
۲) ب ـ ت
۳) الف ـ ب
۴) پ ـ ت

۹۹- با توجه به نمودار زیر که مربوط به یک تعادل گازی بوده و در آن درصد مولی C با کاهش دما، کاهش می‌یابد، کدام موارد درست‌اند؟ (حجم ظرف واکنش، ۲ لیتر است.)



الف) واکنش با افزایش فشار در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

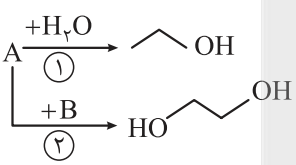
ب) مجموع شمار مول‌های تعادلی مواد در ظرف واکنش، برابر با ۴/۵ مول است.

پ) روند تغییر ثابت تعادل آن با دما، مشابه این روند در واکنش تعادلی تجزیهٔ گاز SO_3 به گاز SO_2 است.

ت) با کاهش حجم ظرف، غلظت مولی A و B افزایش می‌یابد.

۱) الف ـ ب
۲) پ ـ ت
۳) الف ـ پ
۴) ب ـ ت

۱۰۰- با توجه به شکل زیر که تبدیل برخی مواد آلی به یکدیگر را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



۱) A هیدروکربنی است که مجموع شمار اتم‌ها در آن با شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر است.

۲) B می‌تواند ماده‌ای باشد که در تبدیل پارازیلن به ترفتالیک اسید نیز از آن استفاده می‌شود.

۳) با انجام واکنش (۲) همانند واکنش (۱)، عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در مادهٔ A افزایش می‌یابد.

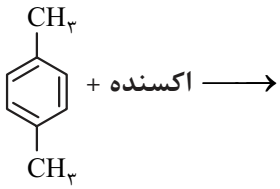
۴) با کاهش pH محیط، می‌توان سرعت واکنش (۱) را افزایش داد.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۱۰۱- کدام مطلب دربارهٔ واکنش داده‌شده که مربوط به تهیهٔ یکی از مونومرهای پلیمر سازندهٔ بطری آب می‌باشد، درست است؟



۱) عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در این واکنش تغییر کرده و از ۳− به ۳+ می‌رسد.

۲) در ساختار فراوردهٔ واکنش، ۲۲ پیوند اشتراکی و ۱۶ الکترون ناپیوندی وجود دارد.

۳) تنها با استفاده از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات به عنوان اکسنده، شرایط تبدیل واکنش‌دهنده به فراورده تأمین می‌شود.

۴) فراوردهٔ واکنش برخلاف واکنش‌دهنده، می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

۱۰۲- کدام مطلب نادرست است؟

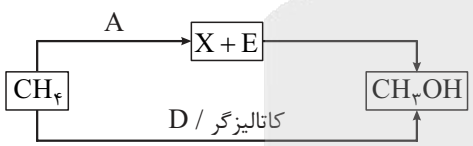
۱) از ویژگی‌های پلاستیک‌ها، می‌توان به چگالی کم، قیمت کم و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.

۲) در ساختار واحد تکرارشوندهٔ پلیمر سازندهٔ بطری آب، شمار پیوندهای دوگانه نصف شمار اتم‌های کربن است.

۳) در ساختار همهٔ ترکیبات آلی، شمار پیوندهای $C-H$ با شمار اتم‌های هیدروژن برابر است.

۴) ترفتالیک اسید را برخلاف پارازایلن، اتن و بنزن، نمی‌توان از تقطیر نفت خام به دست آورد.

۱۰۳- با توجه به شکل زیر که تولید متانول از گاز متان را به دو روش نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟



۱) مادهٔ D، یکی از فراورده‌های واکنش سوختن ناقص هیدروکربن‌ها است.

۲) مجموع ضرایب استوکیومتری X و E در معادلهٔ واکنش تولید آن‌ها، با مجموع ضرایب استوکیومتری این مواد در معادلهٔ واکنش مصرف آن‌ها، با هم برابر است.

۳) مادهٔ A در روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان، نقش کاهنده را ایفا می‌کند.

۴) در هر دو مرحلهٔ روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان، نیاز به کاتالیزگر است و دمای مورد نیاز در مرحلهٔ دوم، کم‌تر از مرحلهٔ اول می‌باشد.

۱۰۴- کدام مطلب دربارهٔ دی‌استر حاصل از واکنش اتانول و ترفتالیک اسید، درست است؟

۱) فرمول مولکولی آن، $C_{۱۲}H_{۱۲}O_۴$ است.

۲) شمار پیوندهای $C-H$ در ساختار آن، ۳/۵ برابر شمار پیوندهای $C-O$ است.

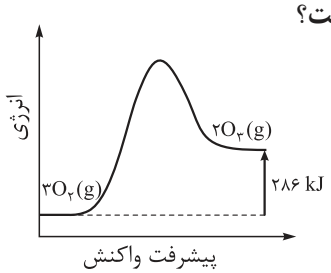
۳) ۵ نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت، در این ترکیب وجود دارد.

۴) به ازای تولید ۱ مول از این ترکیب، ۱ مول آب نیز در طول انجام واکنش، تولید می‌شود.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۵- با توجه به نمودار داده‌شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب کدام است؟



- **انرژی فعال‌سازی از آنتالپی واکنش بزرگ‌تر است.**
- **آنتالپی (محتوای انرژی) فراورده‌ها از واکنش دهنده‌ها کم‌تر است.**
- **مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده‌ها بزرگ‌تر از فراورده‌ها است.**
- **اگر این واکنش درون سیلندر با پیستون روان به تعادل برسد، با کاهش فشار در دمای ثابت، شمار مول‌های اوزون افزایش می‌یابد.**

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۲) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۴) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

پاسخ‌نامهٔ تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحهٔ شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.
azmoon.kheilisabz.com

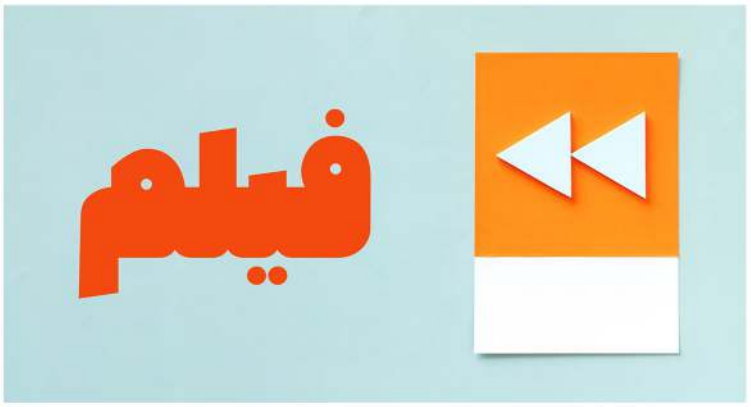
اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی Kheilisabz_edit@ در همهٔ پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات


آزمون


کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰


جزوه


فیلم


مشاوره


www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

آزمون‌های تشریحی خیلی‌سبز

۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخبرگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحّح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحّح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحّح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

پاسخ‌نامه آزمون ریاضی خیلی سبز

رشته ریاضی

پایه دوازدهم	آزمون هدیه
سال تحصیلی ۰۵-۱۴۰۴	۲۷/اسفند/۱۴۰۴

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	پایه		
					دوازدهم	یازدهم	دهم
حسابان و ریاضیات پایه	۱۸	۱	۱۸	۷۰ دقیقه	فصل ۴ و ۵ صفحهٔ ۷۱ تا ۱۴۴	–	–
هندسه	۱۲	۱۹	۳۰		فصل ۲ (درس۳) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۷ تا ۸۶	–	–
ریاضیات‌گسسته	۱۰	۳۱	۴۰		فصل ۲ (درس ۲) و فصل ۳ صفحهٔ ۴۳ تا ۸۴	–	–
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۳ تا ۶ صفحهٔ ۶۱ تا ۱۵۶	–	–
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۳ و ۴ صفحهٔ ۶۷ تا ۱۲۳	–	–
مجموع			۱۰۵ سؤال	۱۴۵ دقیقه		–	

آزمون هدیه

این آزمون هدیه، برای این طراحی شده که بتونی مباحث نوبت دوم دوازدهم رو که تا این‌جا طبق برنامهٔ راهبردی جلو بردی، جمع‌بندی کنی. این آزمون آنلاینه و مثل همهٔ آزمون‌هامون، یک کارنامهٔ تحلیلی دقیق هم داره تا بتونی ارزیابی خوبی از دروس پایه تا به این‌جای مسیر، داشته باشی.

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

این آزمون نمره منفی دارد.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.

ویژه کنکوری‌های ۱۴۰۵

Azmoon.kheilisabz.com

آزمون آزمایشی خیلی سبز

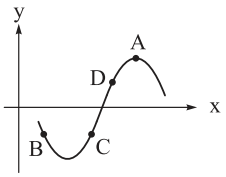
تیم اجرایی و تألیف آزمون	بیتا ابراهیمی ـ علیرضا جعفری ـ عادل حسینی

سرپرست تولید	الناز علی‌یاری‌زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی ـ نیوشا پیمان ـ هدیه خسروی زهرا صفری ـ الهه صفری ـ فاطمه علی‌اکبری محیا غنی‌فرد ـ زهرا فرهادی‌مهر ـ نادره نازآوری ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام ـ مریم حسین‌زاده سپیده سخائی ـ الهام سهرابی ـ طاهره صادق‌نژاد مائده صبری ـ نیلوفر فرخجسته ـ فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور ـ دریا لطفی

Azmoon.kheilisabz.com

WWW.ArefOnline.ir

۱ اگر نمودار تابع f به صورت زیر باشد، در کدام نقطه از نقاط مشخص‌شده، حاصل $\frac{f(x)}{f'(x)}$ عددی منفی است؟



۱) A
۲) B
۳) C
۴) D

مشاوره این تست برگرفته از تمرین کتاب درسی‌تان است؛ پس هیچ‌وقت از کتاب درسی غافل نشوید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

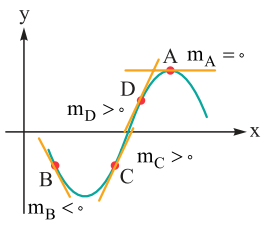
Hint علامت f همان علامت عرض نقطه و علامت f' همان علامت شیب خط مماس بر f است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: علامت f با توجه به بالای محور xها یا پایین محور xها بودن نقطه مشخص می‌شود.

علامت f' با توجه به علامت شیب خط مماس در نقطهٔ مورد نظر به دست می‌آید.

گام دوم: در هر چهار نقطه، علامت f و f' و در نتیجه علامت $\frac{f}{f'}$ را معلوم می‌کنیم:



نقطه	علامت f	علامت f'	علامت $\frac{f}{f'}$
A	+	صفر	تعریف‌نشده!
B	−	−	+
C	−	+	−
D	+	+	+

پس $\frac{f}{f'}$ فقط در نقطهٔ C، عددی منفی می‌شود.

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۲ اگر $f(x)=\frac{۱+\sqrt{۲x}}{۳+۴x}$، آن‌گاه حاصل $\lim\limits_{x\to ۰/۵}\frac{f(x)-f(۰/۵)}{x-۰/۵}$ کدام است؟ ← $f'(۰/۵)$

۱) $-۰/۱۲$
۲) $۰/۱۲$
۳) $۰/۵۲$
۴) $-۰/۵۲$

مشاوره خیلی وقت‌ها از شما $f'(a)$ را می‌خواهند، ولی آن را به صورت تعریف حدی‌اش می‌دهند که مثلاً سؤال خفن‌تر باشه!

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint برای به دست آوردن $f'(۰/۵)$ از قواعد مشتق‌گیری که در درس‌باکس ۳ اشاره کردیم، استفاده کنید.

درس Box

۱) تعریف مشتق و نوشتن معادلهٔ خط مماس

مشتق تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ برابر با شیب خط مماس بر تابع $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$ است و با نماد $f'(a)$ نشان داده می‌شود و مقدار آن را به کمک یکی از حدهای زیر می‌توانیم به دست آوریم:

۱) $f'(a)=\lim\limits_{x\to a}\frac{f(x)-f(a)}{x-a}$

۲) $f'(a)=\lim\limits_{h\to ۰}\frac{f(a+h)-f(a)}{h}$

۲) مشتق توابع مهم

مثال	مشتق	عبارت
$۵\longrightarrow ۰$	صفر	عدد
$x^۵\longrightarrow ۵x^۴$	$nx^{n-۱}$	x^n
$(x^۳-x^۲)^۶\longrightarrow ۶(x^۳-x^۲)^۵\times(۳x^۲-۲x)$	$n.\square^{n-۱}.\square'$	$\square^n$
$\sqrt{۳x+۵}\longrightarrow\frac{۳}{۲\sqrt{۳x+۵}}$	$\frac{۱}{۲\sqrt{x}}$	$\sqrt{x}$
	$\frac{\square'}{۲\sqrt{\square}}$	$\sqrt{\square}$
$\sqrt[۳]{x^۲+x}\longrightarrow\frac{۲x+۱}{۳\sqrt[۳]{(x^۲+x)^۲}}$	$\frac{۱}{۳\sqrt[۳]{x^۲}}$	$\sqrt[۳]{x}$
	$\frac{\square'}{۳\sqrt[۳]{\square^۲}}$	$\sqrt[۳]{\square}$
$\sin ۴x\longrightarrow ۴\cos ۴x$	$\cos x$	$\sin x$
	$\square'.\cos\square$	$\sin\square$
$\cos(x^۲)\longrightarrow -۲x.\sin(x^۲)$	$-\sin x$	$\cos x$
	$-\square'.\sin\square$	$\cos\square$
$\tan ۳x\longrightarrow ۳(۱+\tan^۲ ۳x)$	$۱+\tan^۲ x$	$\tan x$
	$\square'(۱+\tan^۲\square)$	$\tan\square$

WWW.ArefOnline.ir

مثال	مشتق	عبارت
$\cot(2x+1) \longrightarrow -2(1+\cot^2(2x+1))$	$-(1+\cot^2 x)$	$\cot x$
	$-\square'(1+\cot^2\square)$	$\cot\square$
$\frac{2x-3}{5x+1} \longrightarrow \frac{(2)(1)-(-3)(5)}{(5x+1)^2}=\frac{17}{(5x+1)^2}$	$\frac{ad-bc}{(cx+d)^2}$	$\frac{ax+b}{cx+d}$
$\frac{2x^3-3}{5x^3+1} \longrightarrow \frac{17}{(5x^3+1)^2}\times 3x^2$	$\frac{ad-bc}{(c\square+d)^2}\times\square'$	$\frac{a\square+b}{c\square+d}$

۳) قضایای مشتق‌گیری

	رابطه	مثال
ضریب عددی	$a.\square \longrightarrow a.\square'$	$5x^3 \longrightarrow 5(3x^2)=15x^2$
جمع و تفریق	$f\pm g \longrightarrow f'\pm g'$	$4x^7-\sqrt[3]{x} \longrightarrow 28x^6-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
ضرب	$f.g \longrightarrow f'.g+f.g'$	$x^2(\sqrt{x}+1) \longrightarrow 2x(\sqrt{x}+1)+x^2(\frac{1}{2\sqrt{x}})$
تقسیم	$\frac{f}{g} \longrightarrow \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$	$\frac{x+4}{2x^3-1} \longrightarrow \frac{1(2x^3-1)-6x^2(x+4)}{(2x^3-1)^2}$
ترکیب	$f(\square) \longrightarrow \square'.f'(\square)$	$f(x^2+2x-3) \longrightarrow (2x+2).f'(x^2+2x-3)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: حد $\lim\limits_{x\to 0/5}\frac{f(x)-f(0/5)}{x-0/5}$ همان $f'(0/5)$ است.

گام دوم: مشتق تابع $f(x)=\frac{1+\sqrt{2x}}{3+4x}$ را با استفاده از مشتق تقسیم و همچنین رابطهٔ $(\sqrt{u})'=\frac{u'}{2\sqrt{u}}$ حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{(1+\sqrt{2x})'(3+4x)-(1+\sqrt{2x})(3+4x)'}{(3+4x)^2}=\frac{(0+\frac{2}{2\sqrt{2x}})(3+4x)-(1+\sqrt{2x})(0+4)}{(3+4x)^2}$$

گام سوم: $x=0/5$ را جای‌گذاری می‌کنیم:

$$f'(0/5)=\frac{(\frac{2}{2})(3+2)-(1+1)(4)}{(3+2)^2}=\frac{5-8}{25}=\frac{-3}{25}=\frac{-3\times 4}{25\times 4}=-0/12$$

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۳ یکی از خط‌های مماس بر نمودار تابع $f(x)=(x-1)^۲$ با نیمساز ناحیه‌های دوم و چهارم دستگاه مختصات موازی است. این خط مماس از کدام نقطه می‌گذرد؟

۱) $(\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۴})$ ۲) $(-\frac{۱}{۴},\frac{۵}{۴})$

۳) $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ ۴) $(-\frac{۱}{۴},\frac{۳}{۲})$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint وقتی خط مماس با $y=-x$ موازی است، یعنی $f'(x)$ برابر -۱ است.

درس Box **معادلهٔ خط مماس بر $f(x)$ در نقطهٔ $x=a$**

نقطه	شیب خط مماس	معادلهٔ خط مماس
$(a,f(a))$	$f'(a)$	$y-f(a)=f'(a)(x-a)$

مثال معادلهٔ خط مماس بر منحنی $f(x)=x^۳-x^۲$ در $x=۲$:

- $f(۲)=۸-۴=۴ \xrightarrow{\text{نقطه}} (۲,۴)$
- $f'(x)=۳x^۲-۲x \Rightarrow f'(۲)=۱۲-۴=۸ \Rightarrow m_{\text{مماس}}=۸$
- معادلهٔ خط مماس: $y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-۴=۸(x-۲) \Rightarrow y=۸x-۱۲$

نکته اگر دو خط با هم موازی باشند، شیب‌هایشان یکسان است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** مشتق تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=(x-1)^۲ \xrightarrow{(u^۲)'=۲uu'} f'(x)=۲(x-۱)\underbrace{(x-۱)'}_{۱}=۲x-۲$$

گام دوم: معادلهٔ نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم $y=-x$ است که شیبش -۱ است.

خطی که بخواهد با نیمساز ناحیهٔ دوم و چهارم موازی باشد، باید شیبش -۱ باشد؛ پس f' را باید مساوی -۱ قرار دهیم:

$$f'(x)=-۱ \Rightarrow ۲x-۲=-۱ \Rightarrow x=\frac{۱}{۲}$$

گام سوم: مختصات نقطه‌ای به طول $\frac{۱}{۲}$ روی f را حساب می‌کنیم:

$$f(\frac{۱}{۲})=(\frac{۱}{۲}-۱)^۲=\frac{۱}{۴} \xrightarrow{\text{نقطه}} (\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴})$$

گام چهارم: معادلهٔ خط با شیب -۱ و گذرنده از نقطهٔ $(\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۴})$ را می‌نویسیم:

$$y-y_۰=m(x-x_۰) \Rightarrow y-\frac{۱}{۴}=-۱(x-\frac{۱}{۲}) \Rightarrow y=-x+\frac{۳}{۴}$$

گام پنجم: در بین گزینه‌ها فقط نقطهٔ $(\frac{۱}{۴},\frac{۱}{۲})$ روی خط فوق قرار دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۴ اگر $f(x)=\sqrt{\frac{\frac{1}{2}x+1}{x+1}}$ و $g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}$ باشد، آن‌گاه حاصل $\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}$ کدام است؟

۱) $\frac{\sqrt{2}}{2}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) 2 ۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint در عبارت $\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}$ مخرج مشترک بگیرید، صورتش ساده می‌شود.

درس Box

قواعد مشتق‌گیری

(در جدول زیر، منظور از $'$ روی فلش، همان مشتق است.)

	رابطه	مثال
ضریب عددی	$a.\square \longrightarrow a.\square'$	$5x^3 \longrightarrow 5(3x^2)=15x^2$
جمع و تفریق	$f\pm g \longrightarrow f'\pm g'$	$4x^7-\sqrt[3]{x} \longrightarrow 28x^6-\frac{1}{3\sqrt[3]{x^2}}$
ضرب	$f.g \longrightarrow f'.g+f.g'$	$x^2(\sqrt{x}+1) \longrightarrow 2x(\sqrt{x}+1)+x^2(\frac{1}{2\sqrt{x}})$
تقسیم	$\frac{f}{g} \longrightarrow \frac{f'.g-f.g'}{g^2}$	$\frac{x+4}{2x^3-1} \longrightarrow \frac{1(2x^3-1)-6x^2(x+4)}{(2x^3-1)^2}$
ترکیب	$f(\square) \longrightarrow \square' .f'(\square)$	$f(x^2+2x-3) \longrightarrow (2x+2).f'(x^2+2x-3)$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در عبارت خواسته‌شده، با مخرج‌مشترک‌گیری، جای صورت می‌توانیم عبارت ساده‌تری قرار دهیم:

$$\frac{f'(0)}{f(0)}+\frac{g'(0)}{g(0)}=\frac{\overbrace{f'(0)g(0)+g'(0)f(0)}^{\text{همان مشتق ضرب است.}}}{f(0)g(0)}=\frac{(f.g)'(0)}{f(0)g(0)}$$

گام دوم: $f.g$ را حساب می‌کنیم و بعد مشتق می‌گیریم:

$$(f.g)(x)=f(x).g(x)=\sqrt{\frac{\frac{x}{2}+1}{x+1}}\times\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}=\sqrt{\frac{x+2}{2(x+1)}}\times\frac{x+1}{\sqrt{x+2}}=\frac{x+1}{\sqrt{2(x+1)}}=\frac{\sqrt{x+1}\times\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}\times\sqrt{x+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{x+1}{2}}$$

گام سوم: مشتق $f.g(x)$ را می‌گیریم:

$$(f.g)(x)=\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}} \Rightarrow (f.g)'(x)=\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{x}{2}+\frac{1}{2}}}$$

حالا $x=0$ را در آن قرار می‌دهیم:

$$(f.g)'(0)=\frac{\frac{1}{2}}{2\sqrt{\frac{1}{2}}}=\frac{\frac{1}{2}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\times\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{4}$$

گام چهارم: مقادیر $f(0)$ و $g(0)$ را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\sqrt{\frac{\frac{x}{2}+1}{x+1}} \Rightarrow f(0)=1 \qquad g(x)=\frac{x+1}{\sqrt{x+2}} \Rightarrow g(0)=\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

WWW.ArefOnline.ir

گام پنجم: سه مقدار به‌دست‌آمده را در عبارت انتهایی گام اول قرار می‌دهیم:

$$\frac{(f.g)'(0)}{f(0)g(0)} = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}}{1\times\frac{\sqrt{2}}{2}} = \frac{1}{2}$$

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۵ تابع $f(x)=\begin{cases} ax^2 & ; \quad x \geq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2}x+b & ; \quad x < \frac{1}{2} \end{cases}$ در $x=\frac{1}{2}$ مشتق‌پذیر است. حاصل $\frac{a}{b}$ کدام است؟

۱) ۴ ۲) -۴

۳) ۳ ۴) -۳

مشاوره سؤال بررسی مشتق‌پذیری توابع دوضابطه‌ای به فرم $\begin{cases} g(x) & x \geq x_0 \\ h(x) & x < x_0 \end{cases}$ از سؤالات بسیار پرتکرار کنکور است. دو تا شرط را باید در آن‌ها چک کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint شرط پیوستگی و برابری مشتق چپ و راست در $x=\frac{1}{2}$ را بررسی کنید.

درس Box

مشتق‌پذیری در مرز توابع چندضابطه‌ای

اگر تابع $f(x)=\begin{cases} g(x) & x \geq a \\ h(x) & x < a \end{cases}$ در $x=a$ مشتق‌پذیر باشد، باید دو شرط زیر را داشته باشد:

۱	در $x=a$ پیوسته باشد.	$g(a)=h(a)$
۲	مشتق راست و چپ در $x=a$ برابر باشد.	$g'(a)=h'(a)$

مثال اگر $f(x)=\begin{cases} ax+۴ & x \geq ۲ \\ x^۳+b & x < ۲ \end{cases}$ در $x=۲$ مشتق‌پذیر باشد، مقادیر a و b را به دست آورید.

۱) باید f در $x=۲$ پیوسته باشد:

$$\underbrace{۲a+۴}_{\text{حد راست و مقدار}} = \underbrace{۲^۳+b}_{\text{حد چپ}} \Rightarrow ۲a-b=۴$$

۲) باید مشتق راست و چپ در $x=۲$ برابر باشند:

$$\underbrace{a}_{\text{مشتق راست}} = \underbrace{۳x^۲}_{\text{مشتق چپ}} \xrightarrow{x=۲} a=۱۲$$

پس $a=۱۲$ و $b=۲۰$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: باید f در $x=\frac{1}{2}$ پیوسته باشد؛ پس:

$$\left.\begin{array}{l} x=\frac{1}{2}\text{ مقدار و حد راست در }: ax^۲ \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{4}a \\ x=\frac{1}{2}\text{ حد چپ در }: \frac{1}{2}x+b \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} \frac{1}{4}+b \end{array}\right\} \Rightarrow \frac{1}{4}a=\frac{1}{4}+b \xrightarrow{\times ۴} a=۱+۴b$$

گام دوم: باید مشتق‌های چپ و راست f در $x=\frac{1}{2}$ برابر باشند:

$$\left.\begin{array}{l} \text{مشتق راست}: (ax^۲)'=۲ax \xrightarrow{x=\frac{1}{2}} a \\ \text{مشتق چپ}: (\frac{1}{2}x+b)'=\frac{1}{2} \end{array}\right\} \Rightarrow a=\frac{1}{2}$$

گام سوم: با جای‌گذاری $a=\frac{1}{2}$ در $a=۱+۴b$، داریم:

$$\frac{1}{2}=۱+۴b \Rightarrow ۴b=\frac{-۱}{2} \Rightarrow b=\frac{-۱}{۸}$$

گام چهارم:

$$\frac{a}{b}=\frac{\frac{1}{2}}{-\frac{1}{۸}}=-۴$$

WWW.ArefOnline.ir

۶ تابع f با ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|2x|+x+a}$ که $a>0$، در نقطهٔ $x=b$ مشتق ندارد. اگر $f'_-(b)\times f'_+(b)=-3$ باشد، مقدار a کدام است؟

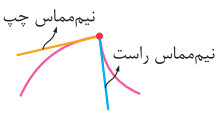
۱) ۴ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{1}{4}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint b همان ریشهٔ داخل قدرمطلق است.

درس Box

۱) نقاط مشتق‌ناپذیری

اسم نقطه	توضیح	کجا می‌تواند رخ دهد؟	مثال نموداری
نقاط ناپیوستگی	هر نقطه‌ای که تابع در آن ناپیوسته باشد، قطعاً مشتق‌ناپذیر هم است.	ریشه‌های مخرج نقاط صحیح داخل براکت مرز توابع چندضابطه‌ای	
گوشه	اولاً تابع در آن پیوسته است. ثانیاً «مشتق‌های چپ و راست، دو عدد نابرابرند.» یا «مشتق یک طرف، عدد و طرف دیگری بی‌نهایت است.»	ریشه‌های سادهٔ قدرمطلق مرز توابع چندضابطه‌ای	
عطف قائم	مشتق‌های دو طرف، بی‌نهایت‌های هم‌علامت‌هستند.	عامل صفرکنندهٔ داخل رادیکال	
بازگشتی	مشتق‌های دوطرف بی‌نهایت‌های ناهم‌علامت‌هستند.		

۲) مشتق توابع قدرمطلقی و براکتی

قدرمطلقی	عبارت داخل قدرمطلق را با توجه به علامتش از قدرمطلق خارج می‌کنیم، بعد مشتق می‌گیریم. **مثال:** اگر $f(x)=\lvert x^2-9\rvert$ باشد، حاصل $f'_-(3)$؟ ضابطهٔ f بدون قدرمطلق در 3^-: $-x^2+9 \xrightarrow{'} -2x \xrightarrow{x=3} -6$
براکتی	مقدار عددی عبارت براکتی را به جایش قرار می‌دهیم و بعد مشتق می‌گیریم. البته در براکتی‌ها حواستان باید به پیوستگی باشد. **مثال ۱:** اگر $f(x)=[2x]x^2$ باشد، حاصل $f'_+(3)$؟ ضابطهٔ f بدون براکت در 3^+: $6x^2 \xrightarrow{'} 12x \xrightarrow{x=3} 36$ **مثال ۲:** اگر $f(x)=[2x]x^2$ باشد، حاصل $f'_-(3)$؟ چون f در $x=3$ پیوستگی چپ ندارد، پس مشتق چپ ندارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ریشهٔ داخل قدرمطلق همان نقطه‌ای است که f در آن مشتق‌پذیر نیست:

$$2x=0 \Rightarrow x=0 \Rightarrow b=0$$

تذکر: با توجه به $a>0$، عبارت زیر رادیکال، یعنی $|2x|+x+a$ همواره مثبت است و عبارت زیر رادیکال ریشه ندارد، پس تنها نقطهٔ مشتق‌ناپذیری همان ریشهٔ قدرمطلق است.

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

گام دوم: ضابطهٔ $f(x)=\sqrt{|2x|+x+a}$ را در $x\geq 0$ و $x\leq 0$ بدون قدرمطلق می‌نویسیم و از آن مشتق می‌گیریم:

$$x\geq 0: f(x)=\sqrt{2x+x+a}=\sqrt{3x+a} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{3}{2\sqrt{3x+a}} \xrightarrow{x=0} f'_+(0)=\frac{3}{2\sqrt{a}}$$

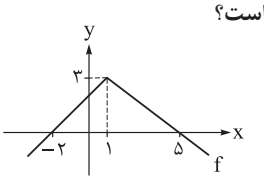
$$x\leq 0: f(x)=\sqrt{-2x+x+a}=\sqrt{-x+a} \xrightarrow{\text{مشتق}} \frac{-1}{2\sqrt{-x+a}} \xrightarrow{x=0} f'_-(0)=\frac{-1}{2\sqrt{a}}$$

گام سوم:

$$f'_-(0)\times f'_+(0)=-3 \Rightarrow \frac{-1}{2\sqrt{a}}\times\frac{3}{2\sqrt{a}}=-3 \Rightarrow \frac{-3}{4a}=-3 \Rightarrow 4a=1 \Rightarrow a=\frac{1}{4}$$

WWW.ArefOnline.ir

۷ نمودار تابع f در شکل زیر رسم شده است. حاصل $\lim\limits_{h\to 0^-}\dfrac{f(1-2h)-f(1+h)}{2h^2-h}$ کدام است؟

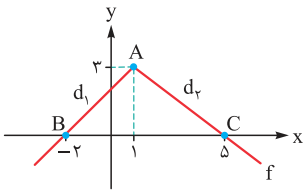


۱) $-0/75$
۲) $-0/5$
۳) $0/75$
۴) $0/5$

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint از هوپیتال استفاده کنید و بعدش به جای hهای صورت، 0^- قرار دهید تا 1^+ و 1^- بودنشان معلوم شود.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به نمودار f، مشتق راست و چپ f در $x=1$ برابر نیستند (مشتق چپ و راست به ترتیب برابر با شیب خط سمت چپی و شیب خط سمت راستی می‌شوند).



هر دو مقدار را حساب می‌کنیم:

$$m_{d_1}=\frac{y_A-y_B}{x_A-x_B}=\frac{3-0}{1-(-2)}=1 \xrightarrow{\text{مشتق چپ}} f'_-(1)=1$$

$$m_{d_2}=\frac{y_A-y_C}{x_A-x_C}=\frac{3-0}{1-5}=\frac{-3}{4} \xrightarrow{\text{مشتق راست}} f'_+(1)=\frac{-3}{4}$$

گام دوم: می‌دانیم مشتق $f(\square)$ برابر با $f'(\square)$ است. به کمک این رابطه و قاعدهٔ هوپیتال، حاصل حد داده‌شده (که $\frac{0}{0}$ است.) را به دست می‌آوریم:

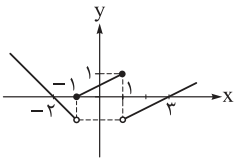
$$\lim_{h\to 0^-}\frac{f(1-2h)-f(1+h)}{2h^2-h}\overset{\text{Hop}}{=}\lim_{h\to 0^-}\frac{-2f'(1-2h)-1f'(1+h)}{4h-1}$$

جای hها داخل پرانتز در صورت باید 0^- قرار دهیم تا جنس ۱ها معلوم شود:

$$\lim_{h\to 0^-}\frac{-2f'(1-2h)-1f'(1+h)}{4h-1}=\frac{-2f'(1-0^-)-f'(1+0^-)}{0-1}=\frac{-2f'(1^+)-f'(1^-)}{-1}=\underbrace{2f'(1^+)}_{\frac{-3}{4}}+\underbrace{f'(1^-)}_{1}=-1/5+1=-0/5$$

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۸ نمودار تابع $y=f(x)$ در شکل زیر رسم شده است. تابع $g(x)=f(x)+|f(x)|$ در چند نقطه از بازهٔ $(-2,3)$ مشتق‌پذیر نیست؟



۱) ۴ ۲) ۲
۳) ۳ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

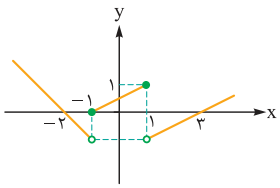
Hint نمودار g را رسم کنید و حواستان به نقاط ناپیوستگی و تیز نمودار باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تابع g را دوضابطه‌ای می‌نویسیم:

$$g(x)=f(x)+|f(x)|=\begin{cases}2f(x) & f(x)\geq 0\\ 0 & f(x)<0\end{cases}$$

گام دوم: برای به دست آوردن جواب $f(x)\geq 0$ باید دنبال محدوده‌هایی باشیم که نمودار f بالا یا روی محور xها قرار دارد و برای به دست آوردن جواب $f(x)<0$ باید دنبال محدوده‌هایی باشیم که نمودار f پایین محور xهاست.



این کار را در محدودهٔ $-2<x<3$ انجام می‌دهیم:

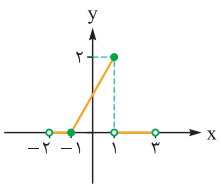
$$f(x)\geq 0 \Rightarrow -1\leq x\leq 1$$

$$f(x)<0 \Rightarrow -2<x<-1 \text{ یا } 1<x<3$$

گام سوم: g را می‌نویسیم:

$$g(x)=\begin{cases}2f(x) & -1\leq x\leq 1\\ 0 & -2<x<-1 \text{ یا } 1<x<3\end{cases}$$

نمودارش را رسم می‌کنیم:



گام چهارم: با توجه به نمودار، طول نقاط مشتق‌ناپذیری g به صورت زیر است:

$$\underbrace{x=-1}_{\text{گوشه}} \ , \ \underbrace{x=1}_{\text{ناپیوستگی}}$$

WWW.ArefOnline.ir

۹ اگر $f(x)=g(\sin x)$ و $g'(x)=\frac{x}{1-x^2}$ باشد، حاصل $f''(\frac{\pi}{3})$ کدام است؟

۱) $\frac{3}{4}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) ۳
۴) ۴

مشاوره به تفاوت $g'(u)$ و $(g(u))'$ دقت کنید. $(g(u))'$ مشتق تابع مرکب است، یعنی $u'g'(u)$، اما $g'(u)$ یعنی در ضابطهٔ تابع مشتق (g') عبارت (یا عدد) u را قرار دهید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint $f'(x)=\cos x g'(\sin x)$ و دوباره مشتق بگیرید.

درس Box

تابع	مشتق
$y=\sin x$	$y'=\cos x$
$y=\cos x$	$y'=-\sin x$
$y=\tan x$	$y'=1+\tan^2 x$
$y=\cot x$	$y'=-(1+\cot^2 x)$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از مشتق تابع مرکب، مشتق f را به دست می‌آوریم:

$$f'(x)=(\cos x)g'(\sin x)$$

گام دوم: تابع $g'(x)=\frac{x}{1-x^2}$ داده شده است؛ پس $g'(\sin x)=\frac{\sin x}{1-\sin^2 x}$ (یعنی به جای xها قرار می‌دهیم $\sin x$)

گام سوم:

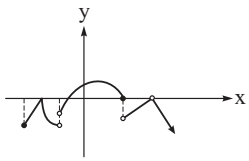
$$f'(x)=\cos x\times\frac{\sin x}{1-\sin^2 x}=\cos x\times\frac{\sin x}{\cos^2 x}=\tan x$$

گام چهارم:

$$f''(x)=1+\tan^2 x \Rightarrow f''(\frac{\pi}{3})=1+\sqrt{3}^2=4$$

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۱۰ با توجه به شکل، تابعی که نمودار آن رسم شده است، به ترتیب چند نقطهٔ بحرانی و چند اکسترمم نسبی دارد؟



۱) ۵ـ۳
۲) ۵ـ۲
۳) ۴ـ۳
۴) ۴ـ۲

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint برای نقاط بحرانی حواستان باشد که فقط باید در دامنهٔ f باشد و f' آن صفر یا ناموجود باشد و نقاط برای اکسترمم نسبی، باید نقطه نسبت به اطرافش بالاتر یا پایین‌تر باشد.

درس Box

۱) نقاط بحرانی روی نمودار f

	نوع نقطه	بعضی حالات ممکن روی شکل	مثال
$f'(a)=0$	نقاط با مماس افقی		چندجمله‌ای، مثلثاتی
$f'(a)$ موجود نیست.	نقاط ناپیوستگی		براکتی، چندضابطه‌ای
	نقاط گوشه		قدرمطلقی، چندضابطه‌ای
	نقاط بازگشتی و عطف قائم		رادیکالی

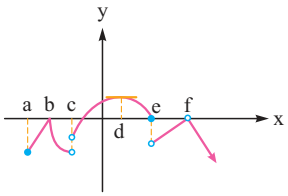
تذکر: نقاط ابتدا و انتهای دامنه، بحرانی‌اند. مثلاً در تابع $y=\sqrt{4-x^2}$، نقاط به طول $x=\pm 2$، بحرانی‌اند.

۲) نقاط اکسترمم نسبی روی نمودار

	تعریف	روی نمودار	
max نسبی	$x=a$ طول نقطهٔ max نسبی تابع f است، اگر نسبت به نقاط یک همسایگی a، پایین‌تر نباشد.	max نسبی max نسبی (min نسبی هم است.)	max نسبی
min نسبی	$x=a$ طول نقطهٔ min نسبی تابع f است، اگر نسبت به نقاط یک همسایگی a، بالاتر نباشد.	min نسبی min نسبی (max نسبی هم است.)	min نسبی

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: روی شکل طول تمام نقاط مشکوک به بحرانی‌بودن را مشخص می‌کنیم و بعد آن‌ها را بررسی می‌کنیم:



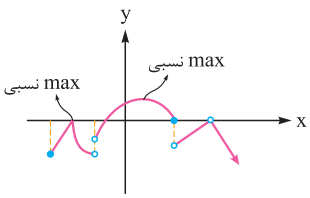
a: ابتدای بازهٔ دامنه ← بحرانی
b: نقطهٔ گوشه (f' موجود نیست.) ← بحرانی
c: در دامنه نیست. ← نمی‌تواند بحرانی باشد.
d: خط مماس افقی دارد. (f' در آن صفر است.) ← بحرانی
e: نقطهٔ ناپیوستگی ← بحرانی

WWW.ArefOnline.ir

f: در دامنه نیست. ← نمی‌تواند بحرانی باشد.

- پس در کل ۴ نقطهٔ بحرانی داشت.

گام دوم: روی شکل نقاط اکسترمم نسبی را مشخص می‌کنیم:



- پس در کل ۲تا اکسترمم نسبی داریم.

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۱۱ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{x^۲}{x-۱}$ روی بازهٔ $(۱,k)$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار k کدام است؟

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) ۲ ۳) $\frac{۵}{۲}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint f' را حساب و تعیین‌علامت کنید. هرجا $(+)$ بود، f صعودی اکید و هرجا $(-)$ بود، f نزولی اکید است.

درس Box

پیداکردن بازه‌های یکنوایی تابع f

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار آن تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، بازه‌های یکنوایی را مشخص می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** f' را حساب می‌کنیم و آن را تعیین علامت می‌کنیم.
		گام دوم: هرجا f' مثبت بود، f صعودی اکید و هر جا f' منفی بود، f نزولی اکید است.

نکته اگر f' در بازهٔ (a,b) مثبت باشد و $x=c$ (که در این بازه است) ریشهٔ مخرج f باشد، می‌توانیم بگوییم f در بازه‌های (a,c) و (c,b) صعودی اکید است، ولی در بازهٔ (a,b) غیریکنوا است. مثلاً تابع $f(x)=x-\frac{۱}{x}$ که مشتق آن $f'(x)=۱+\frac{۱}{x^۲}$ می‌شود، با این‌که f' همواره مثبت است، ولی f در بازه‌های $(-\infty,۰)$ و $(۰,+\infty)$ یا هر بازه‌ای که شامل صفر نباشد، اکیداً صعودی است، ولی در بازه‌های شامل صفر مثل $(-۱,۴)$ غیریکنوا است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: f' را حساب می‌کنیم:

$$f(x)=\frac{x^۲}{x-۱}\Rightarrow f'(x)=\frac{(x^۲)'(x-۱)-(x^۲)(x-۱)'}{(x-۱)^۲}=\frac{۲x(x-۱)-x^۲}{(x-۱)^۲}=\frac{۲x^۲-۲x-x^۲}{(x-۱)^۲}=\frac{x^۲-۲x}{(x-۱)^۲}=\frac{x(x-۲)}{(x-۱)^۲}$$

گام دوم: ریشه‌های صورت ۰ و ۲ و ریشهٔ مخرج ۱ (ازمرتبهٔ زوج) است. جدول تعیین علامت f' را می‌کشیم:

توانش زوج است.

		۰		۱		۲	
f'	+	۰	−	ت ن	−	۰	+
f	↗ صعودی		↘ نزولی	ت ن	↘ نزولی		↗ صعودی

گام سوم: f روی بازهٔ $(۱,۲)$ اکیداً نزولی است، پس حداکثر مقدار k، برابر ۲ است.

WWW.ArefOnline.ir

۱۲ تابع با ضابطهٔ $f(x)=\frac{ax}{x^۲+b}$ در نقطهٔ $(-۱,۲)$ اکسترمم نسبی دارد. مقدار ab و نوع اکسترمم دیگر تابع کدام است؟

۱) -۲، ماکزیمم
۲) -۴، ماکزیمم
۳) -۲، مینیمم
۴) -۴، مینیمم

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint اولاً نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی f است. ثانیاً مشتق f در $x=-۱$ باید صفر شود.

نکته اگر نقطهٔ (p,q) اکسترمم نسبی تابع مشتق‌پذیر f باشد، آن‌گاه دوتا معادله داریم:

۱	این نقطه روی تابع قرار دارد.	$f(p)=q$
۲	شیب خط مماس (مشتق) در آن صفر است.	$f'(p)=۰$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نقطهٔ $(-۱,۲)$ روی نمودار تابع $f(x)=\frac{ax}{x^۲+b}$ است؛ پس:

$$f(-۱)=۲ \Rightarrow \frac{-a}{۱+b}=۲ \Rightarrow ۲+۲b=-a$$

گام دوم: f' را حساب می‌کنیم:

$$f'(x)=\frac{a(x^۲+b)-۲x(ax)}{(x^۲+b)^۲}=\frac{ax^۲+ab-۲ax^۲}{(x^۲+b)^۲}=\frac{a(-x^۲+b)}{(x^۲+b)^۲}$$

گام سوم: باید f' در $x=-۱$، صفر باشد:

$$f'(-۱)=۰ \Rightarrow \frac{a(-۱+b)}{\text{مهم نیست!}}=۰ \Rightarrow a(-۱+b)=۰ \xrightarrow{a\neq ۰} b=۱$$

تذکر: اگر $a=۰$، ضابطهٔ f به صورت $f(x)=۰$ درمی‌آید.

گام چهارم: با جای‌گذاری $b=۱$ در $۲+۲b=-a$، داریم: $a=-۴$

گام پنجم: $a=-۴$ و $b=۱$ را در f' قرار می‌دهیم:

$$f'(x)=\frac{a(-x^۲+b)}{(x^۲+b)^۲} \Rightarrow f'(x)=\frac{-۴(-x^۲+۱)}{(x^۲+۱)^۲}=\frac{۴(x-۱)(x+۱)}{(x^۲+۱)^۲}$$

گام ششم: f' را در اطراف $x=۱$ تعیین علامت می‌کنیم:

	-۱		۱	
f'	$+$	۰	$-$	۰	$+$
f	↗	max	↘	min	↗

گام هفتم: پس نوع اکسترمم نسبی دیگر، min و مقدار ab برابر با -۴ است.

WWW.ArefOnline.ir

۱۳ مجموع مقادیر اکسترمم مطلق تابع $f(x)=|x-۴|\sqrt[۳]{x}$ روی بازهٔ $[۰,۸]$ کدام است؟

۱) ۷ ۲) ۸ ۳) ۹ ۴) ۱۱

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint مقدار f را در سر و ته بازه و جاهایی که f' صفر است یا موجود نیست (ریشهٔ قدرمطلق) حساب کنید.

درس Box **پیداکردن اکسترمم‌های مطلق تابع f در بازهٔ $[a,b]$**

	روش	توضیح
۱	رسم نمودار	اگر رسم نمودار آن تابع را بلد باشیم، رسمش می‌کنیم و از روی شکل، نقاط اکسترمم مطلق را پیدا می‌کنیم.
۲	مشتق	**گام اول:** نقاط بحرانی تابع f در بازهٔ $[a,b]$ را حساب می‌کنیم. **گام دوم:** مقدار f را در نقاط بحرانی آن حساب می‌کنیم. **گام سوم:** از بین مقادیر به‌دست‌آمده از گام دوم، هر کدام از بقیه بیشتر بود می‌شود max مطلق و هر کدام از بقیه کم‌تر بود، می‌شود min مطلق.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ریشهٔ داخل قدرمطلق $(x=۴)$، نقطهٔ بحرانی است.

گام دوم: چون تابع به فرم $A\times|B|$ است، برای پیداکردن نقاط بحرانی، با حذف قدرمطلق، از آن مشتق می‌گیریم:

$$f(x)=|x-۴|\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{حذف قدرمطلق}} y=(x-۴)\sqrt[۳]{x}=x^{\frac{۴}{۳}}-۴x^{\frac{۱}{۳}}$$

مشتق می‌گیریم:

$$y'=\frac{۴}{۳}x^{\frac{۱}{۳}}-\frac{۴}{۳}x^{\frac{-۲}{۳}}=\frac{۴}{۳}(\sqrt[۳]{x}-\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})=\frac{۴}{۳}(\frac{x-۱}{\sqrt[۳]{x^۲}})$$

ریشهٔ y'، یکی دیگر از نقاط بحرانی است: $x=۱$

ریشهٔ مخرج y' که جزو دامنهٔ تابع است، نیز نقطهٔ بحرانی است: $x=۰$

گام سوم: مقدار تابع $f(x)=|x-۴|\sqrt[۳]{x}$ را در نقاط بحرانی که شامل ابتدا و انتهای بازه نیز هستند، حساب می‌کنیم:

- $x=۴ \Rightarrow f(۴)=۰$ (بحرانی، چون $f'(۴)$ موجود نیست.)
- $x=۱ \Rightarrow f(۱)=۳$ ($f'(۱)=۰$ بحرانی، چون)
- $x=۰ \Rightarrow f(۰)=۰$ (بحرانی، هم چون ابتدای بازه است و هم چون $f'(۰)$ وجود ندارد.)
- $x=۸ \Rightarrow f(۸)=۴\times۲=۸$ (بحرانی، چون انتهای بازه است.)

بین مقادیر به‌دست‌آمده، بیشترین و کم‌ترین به ترتیب ۸ و ۰ هستند؛ پس:

$$\begin{cases}\max_{\text{مطلق}}=۸\\ \min_{\text{مطلق}}=۰\end{cases}$$

گام چهارم: مجموع مقادیر اکسترمم‌های مطلق برابر است با:

$$۸+۰=۸$$

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۱۴ اگر $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & ; \ x<-1\\ |x|-x & ; \ x>-1\end{cases}$ و $g(x)=x^3-3x$، آن‌گاه برد تابع gof کدام است؟

۱) $(-2,2)$ ۲) $(-2,2]$ ۳) $[-2,2)$ ۴) $[-2,2]$

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint سؤال را این‌جوری بخوانید: برد تابع g با دامنهٔ R_f کدام است؟

درس Box

پیداکردن برد تابع gof (به کمک اکسترمم مطلق)

گام اول: بُرد تابع داخلی (R_f) را حساب می‌کنیم. این برد نقش دامنه را برای تابع بیرونی یعنی g دارد.

گام دوم: پس الان به جای gof، با تابع $g(x)$ با دامنهٔ R_f طرف هستیم.

گام سوم: نقاط بحرانی تابع g در محدودهٔ R_f را پیدا می‌کنیم.

گام چهارم: مقدار g در این نقاط بحرانی را حساب می‌کنیم. چون تابع g پیوسته است، برد بین min و max مقادیر به‌دست‌آمده، می‌باشد.

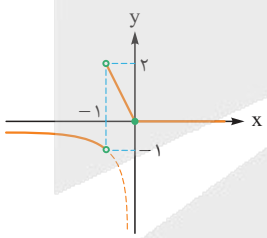
پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برد تابع داخلی یعنی $f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<-1\\ |x|-x & x>-1\end{cases}$ را به کمک رسم نمودارش پیدا می‌کنیم:

ضابطهٔ دوم را در دو بازهٔ $-1<x<0$ و $x\geq 0$ می‌نویسیم:

$$f(x)=\begin{cases}\frac{1}{x} & x<-1\\ -2x & -1<x<0\\ 0 & x\geq 0\end{cases}$$

f را رسم می‌کنیم:



$R_f=(-1,2)$ ← بُرد

گام دوم: برد تابع داخلی، همان دامنهٔ تابع بیرونی یعنی g محسوب می‌شود؛ پس الان تابع $g(x)=x^3-3x$ با دامنهٔ $(-1,2)$ را داریم و بردش را می‌خواهیم.

نقاط بحرانی g در این بازه را حساب می‌کنیم:

$$g'(x)=0 \Rightarrow 3x^2-3=0 \Rightarrow x^2=1 \xrightarrow{-1<x<2} x=1$$

گام سوم: برای به دست آوردن حدود بازهٔ برد، باید مقدار تابع در $\underbrace{x=1}_{\text{نقطهٔ بحرانی}}$ و حد تابع در نقاط ابتدا و انتهای دامنه را حساب کنیم (چون بازهٔ دامنه از دو طرف باز است!):

$$f(1)=1^3-3(1)=-2$$

$$\lim_{x\to(-1)^+} f(x)=(-1)^3-3(-1)=2 \qquad \lim_{x\to 2^-} f(x)=2^3-3(2)=2$$

بین اعداد به‌دست‌آمده کم‌ترین مقدار -2 و بیشترین ۲ است؛ پس برد بین -2 تا ۲ است، ولی دقت کنید که سمت -2 باید کروشه بگذاریم (چون مقدار دقیق در $x=1$ است.)، ولی سمت ۲ باید پرانتز بگذاریم. (چون مقدار حدی است.)

در نتیجه:

$$R_{gof}=[-2,2)$$

WWW.ArefOnline.ir

۱۵ در یک استوانه با حجم ۲π، حداقل مقدار سطح کل کدام است؟

۱) ۹π

۲) ۴π

۳) ۸π

۴) ۶π

مشاوره از بهینه‌سازی حتماً یک تست در کنکورتان می‌آید. (حتی ممکن است ۲ تست!) مدل‌های مختلف سؤالات بهینه‌سازی را بلد باشید. به‌خصوص آن‌هایی که در کتاب درسی‌تان آمده است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint حجم و مساحت کل استوانه به ترتیب $\pi r^۲h$ و $۲\pi r^۲ + ۲\pi rh$ است.

درس Box **بهینه‌سازی**: در سؤالات بهینه‌سازی به دنبال پیداکردن max یا min یک تابع هستیم. فقط سختی کار در این است که سؤال مستقیم تابع را به ما نمی‌دهد و باید خودمان با اطلاعاتی که سؤال داده آن تابع را بنویسیم.

گام‌های حل سؤالات بهینه‌سازی را در زیر می‌بینید:

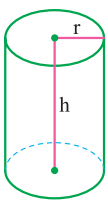
	اسم مختصر گام	توضیح
۱	شکل	رسم شکل مناسب و واردکردن متغیرها روی شکل (در صورتی که نیاز باشد.)
۲	رابطه	رابطهٔ بین دو متغیر را می‌نویسیم.
۳	یکی برحسب دیگری	یکی از متغیرها را برحسب دیگری می‌نویسیم. *(بعضی وقت‌ها مهمه که کدوم رو برحسب اون یکی بنویسیم.)*
۴	تابع‌نویسی	تابع مورد نظر (چیزی که قرار است بهینه شود) را می‌نویسیم.
۵	پیداکردن نقاط بحرانی	ریشه‌های $f'(x) = ۰$ و نقاطی که در آن‌ها مشتق وجود ندارد را پیدا می‌کنیم.
۶	پیداکردن اکسترمم	نقاط بحرانی به‌دست‌آمده از گام ۵ را در تابع قرار می‌دهیم. با مقایسهٔ مقدار تابع در این نقاط، اکسترمم(ها) به دست می‌آیند.

نکته فرمول‌های مهم استوانه‌ای به شعاع قاعدهٔ r و ارتفاع h به صورت زیر است:

مساحت جانبی	مساحت کل	حجم
$۲\pi rh$	$۲\pi r^۲ + ۲\pi rh$	$\pi r^۲h$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: یک شکل برای استوانه می‌کشیم:



گام دوم: حجم استوانه ۲π است:

$$V = ۲\pi \Rightarrow \pi r^۲h = ۲\pi \Rightarrow r^۲h = ۲$$

گام سوم: h را برحسب r می‌نویسیم:

$$h = \frac{۲}{r^۲}$$

تذکر: می‌توانستیم r را برحسب h بنویسیم، ولی در مراحل بعدی، در محاسباتمان عبارات رادیکالی می‌دیدیم. *(یه کوچولو سفت‌تر می‌شد.)*

گام چهارم: دنبال حداقل سطح کل (مساحت کل) هستیم. آن را برحسب یک متغیر (برحسب r) می‌نویسیم:

$$S_{کل} = ۲\pi r^۲ + ۲\pi rh \xrightarrow{h=\frac{۲}{r^۲}} S_{کل} = ۲\pi r^۲ + ۲\pi r(\frac{۲}{r^۲}) = ۲\pi r^۲ + \frac{۴\pi}{r}$$

گام پنجم: ریشه‌های مشتق تابع گام چهارم را حساب می‌کنیم (می‌دانیم مشتق $\frac{عدد}{x}$ می‌شود $\frac{-(عدد)}{x^۲}$):

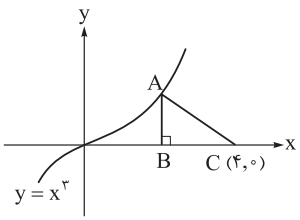
$$S'_{کل} = ۰ \Rightarrow ۲\pi(۲r) + \frac{-۴\pi}{r^۲} = ۰ \Rightarrow ۴\pi r - \frac{۴\pi}{r^۲} = ۰ \xrightarrow{\div ۴\pi} r = \frac{۱}{r^۲} \Rightarrow r^۳ = ۱ \Rightarrow r = ۱$$

گام ششم: $r = ۱$ را در فرمول $S_{کل}$ برحسب r (آخر گام چهارم آمده) قرار می‌دهیم:

$$S_{کل} = ۲\pi r^۲ + \frac{۴\pi}{r} \xrightarrow{r=۱} \max(S_{کل}) = ۲\pi + ۴\pi = ۶\pi$$

WWW.ArefOnline.ir

۱۶ با توجه به شکل روبه‌رو، ماکزیمم مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC کدام است؟



۱) ۱۲
۲) ۱۳
۳) ۱۳ / ۵
۴) ۱۲ / ۵

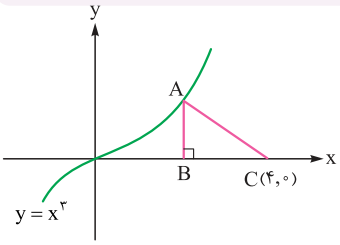
مشاوره در سؤالات بهینه‌سازی که روی دستگاه مختصات قرار است حل کنیم، حتماً باید مختصات یک نقطه روی منحنی را پارامتری بنویسید و بقیهٔ چیزها (ارتفاع، قاعده، طول، عرض و ...) را برحسب آن بنویسید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

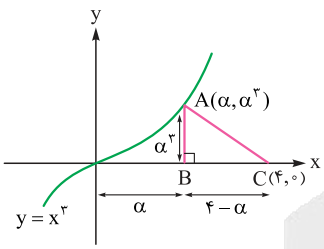
Hint مختصات A را به صورت $(\alpha, \alpha^۳)$ بگیرید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل را سؤال داده است:



گام دوم: نقطهٔ A کلید حل سؤال است، چون روی تابع $y = x^۳$ قرار دارد؛ پس مختصاتش به صورت $A(\alpha, \alpha^۳)$ است:



گام سوم: ارتفاع و قاعدهٔ مثلث ABC را برحسب α می‌نویسیم:

$$\begin{cases} \text{ارتفاع} = AB = \alpha^۳ \\ \text{قاعده} = BC = ۴ - \alpha \end{cases}$$

گام چهارم: مساحت مثلث ABC را برحسب α می‌نویسیم:

$$S = \frac{\alpha^۳(۴-\alpha)}{۲} = ۲\alpha^۳ - \frac{۱}{۲}\alpha^۴$$

گام پنجم: ریشه‌های S' را پیدا می‌کنیم:

$$S' = ۰ \Rightarrow ۶\alpha^۲ - ۲\alpha^۳ = ۰ \Rightarrow ۲\alpha^۲(۳-\alpha) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} \alpha = ۰ \rightarrow \text{مثلث نمی‌شه!} \\ \alpha = ۳ \ \checkmark \end{cases}$$

گام ششم: $\alpha = ۳$ را در $S = \frac{\alpha^۳(۴-\alpha)}{۲}$ قرار می‌دهیم:

$$S_{max} = \frac{۳^۳(۴-۳)}{۲} = ۱۳/۵$$

@Tahlilazemoon / @konkurbanks
WWW.ArefOnline.ir

۱۷ نقطه‌ای با کدام طول برای تابع $f(x)=\cos^۲ x+\sin x$ یک نقطهٔ بحرانی است، ولی یک نقطهٔ اکسترمم مطلق نیست؟

ماکزیمم یا مینیمم

۱) $\frac{\pi}{۲}$ ۲) $\frac{۳\pi}{۲}$ ۳) $\frac{\pi}{۶}$ ۴) $\frac{۵\pi}{۶}$

مشاوره سؤال بسیارمهمی است. دقت کنید که نقاط بحرانی ممکن است، اکسترمم مطلق نباشند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

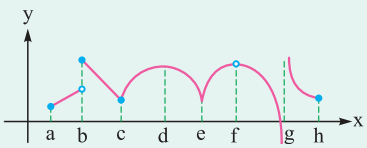
Hint نقاط بحرانی، ریشه‌های مشتق هستند.

درس Box

نقاط بحرانی تابع f

نقاطی از دامنهٔ تابع که $f'(x)=۰$ یا $f'(x)$ وجود ندارد را نقاط بحرانی تابع f می‌گوییم. (دقت دارید اگر c عضو دامنهٔ تابع نباشد، بحرانی به حساب نمی‌آید.)

مثلاً در تابع مقابل داریم:



۱) تابع در نقاط a، b و h ناپیوسته است؛ پس مشتق هم ندارد و این نقاط بحرانی هستند.

۲) تابع در نقطهٔ c مشتق ندارد (مشتق چپ و راست نابرابر است)؛ پس c هم بحرانی است.

۳) $f'(d)=۰$ (مماس افقی)؛ پس d بحرانی است.

۴) $f'(e)=\infty$؛ پس e هم بحرانی است.

۵) تابع در f تعریف‌نشده است؛ پس f نقطهٔ بحرانی نیست.

۶) تابع در g تعریف‌نشده است؛ پس g نقطهٔ بحرانی نیست.

نکته برای به دست آوردن نقاط بحرانی تابع‌های چندجمله‌ای، گویا و مثلثاتی (سینوسی و کسینوسی) کافی است از تابع مشتق گرفته و مساوی صفر قرار دهیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: دورهٔ تناوب تابع $T=۲\pi$ است؛ پس نمودار تابع در بازهٔ $[۰,۲\pi]$، در بقیهٔ دامنه نیز تکرار می‌شود، یعنی کافی است نقاط بحرانی و اکسترمم‌های مطلق را در این بازه بررسی کنیم.

گام دوم:

$$f'(x)=۰ \Rightarrow -۲\cos x\sin x+\cos x=۰ \Rightarrow \cos x(-۲\sin x+۱)=۰$$

$$\begin{cases}\cos x=۰ \Rightarrow x=\frac{\pi}{۲},\frac{۳\pi}{۲}\\ -۲\sin x+۱=۰ \Rightarrow \sin x=\frac{۱}{۲} \Rightarrow x=\frac{\pi}{۶},\frac{۵\pi}{۶}\end{cases}$$

گام سوم: عرض نقاط بحرانی را به دست می‌آوریم.

$f(\frac{۳\pi}{۲})=۰-۱=-۱$ مینیمم مطلق ، $f(\frac{\pi}{۲})=۰+۱=۱$ ، $f(۰)=۱+۰=۱$

$f(\frac{۵\pi}{۶})=(-\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$ ماکزیمم مطلق ، $f(\frac{\pi}{۶})=(\frac{\sqrt{۳}}{۲})^۲+\frac{۱}{۲}=\frac{۵}{۴}$ ماکزیمم مطلق

$f(۲\pi)=۱+۰=۱$

گام چهارم: در بین گزینه‌ها نقطه‌ای با طول $x=\frac{\pi}{۲}$ بحرانی است؛ ولی اکسترمم مطلق نیست.

WWW.ArefOnline.ir

۱۸ جهت تقعر نمودار تابع $f(x)=x^4-2x^3+2x-1$ روی بازهٔ (a,b) رو به پایین است. حداکثر مقدار $b-a$ کدام است؟

(جهت تقعر ← $f''(x)$؛ رو به پایین ← $f''(x)<0$؛ حداکثر مقدار ← طول بزرگ‌ترین بازهٔ ممکن)

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

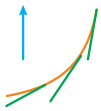
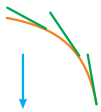
مشاوره از کاربرد مشتق دو سؤال در کنکور مطرح می‌شود که معمولاً یکی مربوط به نقاط اکسترمم و عطف و دیگری رسم نمودار است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

تقعر تابع

اگر تابع f مشتق مرتبهٔ اول و دوم داشته باشد، تقعر تابع به صورت زیر تعریف می‌شود:

تعریف	تقعر (گودی)	مشتق مرتبهٔ اول	مشتق مرتبهٔ دوم	مثال
خطوط مماس زیر منحنی	تقعر رو به بالا	f' صعودی	$f''>0$	
خطوط مماس بالای منحنی	تقعر رو به پایین	f' نزولی	$f''<0$	

روش به دست آوردن تقعر در بازه‌هایی که مشتق مرتبهٔ اول و دوم وجود دارد:

۱) مشتق دوم را محاسبه کرده و مساوی صفر قرار می‌دهیم.

۲) ریشه‌ها را به دست آورده و مشتق دوم را تعیین علامت می‌کنیم.

۳) در بازه‌هایی که $f''(x)>0$، تقعر رو به بالا و در بازه‌هایی که $f''(x)<0$ تقعر رو به پایین است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: مشتق مرتبهٔ دوم را پیدا می‌کنیم:

$$f(x)=x^4-2x^3+2x-1 \Rightarrow f'(x)=4x^3-6x^2+2 \Rightarrow f''(x)=12x^2-12x$$

گام دوم: اگر $f''(x)<0$ باشد تقعر رو به پایین است، پس داریم:

$$12x^2-12x<0 \Rightarrow 12x(x-1)<0$$

x		0		1	
f''	$+$	0	$-$	0	$+$

گام سوم: در بازهٔ $(0,1)$ مشتق مرتبهٔ دوم منفی است، پس بزرگ‌ترین بازه‌ای که در آن تقعر رو به پایین است $(0,1)$ بوده و $b-a=1$ می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

۱۹ در یک بیضی، طول کوچک‌ترین قطر، چهار برابر فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس است. خروج از مرکز این بیضی کدام است؟

۱) ۰/۴

۲) ۰/۶

۳) ۰/۸

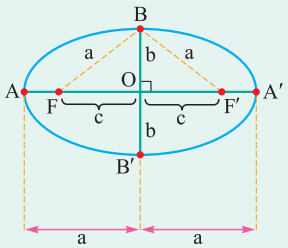
۴) ۰/۵

مشاوره معمولاً مهم‌ترین کاری که در سؤال‌های مبحث بیضی باید بتوانید انجام دهید؛ این است که مفروضات سؤال را برحسب پارامترهای a، b و c بیان کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint شکل را رسم کنید تا فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس را برحسب پارامترهای بیضی به دست آورید.

درس Box



۱) در شکل رسم‌شده، F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن است. نقاط A و A' رأس‌های کانونی و B و B' رأس‌های غیرکانونی نامیده می‌شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه‌ترین قطر بیضی است و طول پاره‌خط‌ها برحسب پارامترهای a، b و c مشخص شده‌اند. هم‌چنین توجه داشته باشید که با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلث BOF می‌توان نتیجه گرفت $a^۲ = b^۲ + c^۲$.

۲) با توجه به شکل، در هر بیضی فاصلهٔ هر کانون تا نزدیک‌ترین رأس برابر با $F'A' = FA = a - c$ است و فاصلهٔ هر کانون تا دورترین رأس هم $FA' = F'A = a + c$ است.

۳) میزان کشیدگی بیضی با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) سنجیده می‌شود و بنا به تعریف داریم $e = \frac{c}{a}$، خروج از مرکز بیضی همیشه عددی بین صفر و یک است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (پیداکردن رابطهٔ بین a، b و c با توجه به فرض سؤال): سؤال می‌گوید طول کوچک‌ترین قطر بیضی، چهار برابر فاصلهٔ کانون تا نزدیک‌ترین رأس است؛ یعنی:

$$BB' = ۴FA \Rightarrow ۲b = ۴(a-c) \Rightarrow b = ۲(a-c)$$

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال با توجه به رابطهٔ به‌دست‌آمده): در گام اول فهمیدیم که در بیضی موردِ نظرِ سؤال، داریم $\underbrace{b = ۲(a-c)}_{(۱)}$، از طرفی در هر بیضی داریم $\underbrace{a^۲ = b^۲ + c^۲}_{(۲)}$ و در نهایت هدف ما پیداکردن $e = \frac{c}{a}$ است. پس سعی می‌کنیم با استفاده از تساوی‌های (۱) و (۲) رابطه‌ای پیدا کنیم که در آن فقط a و c داشته باشیم. اگر طرفین تساوی (۱) را به توان دو برسانیم، داریم:

$$b^۲ = ۴(a-c)^۲ \xrightarrow{a^۲ = b^۲ + c^۲} a^۲ - c^۲ = ۴(a-c)^۲ \Rightarrow (a-c)(a+c) = ۴(a-c)^۲$$

$$\Rightarrow a + c = ۴a - ۴c \Rightarrow ۳a = ۵c \Rightarrow \frac{c}{a} = \frac{۳}{۵} = ۰/۶$$

WWW.ArefOnline.ir

@Tahlilazemoon / @konkurbanks

۲۰ **دو نقطهٔ $(۱۱,۱)$ و $(-۵,۱)$ دو سر کوچک‌ترین قطر یک بیضی هستند که طول بزرگ‌ترین قطر آن ۲۰ است. اگر از نقطهٔ $(۵-,۳)$ یک پرتوی نورانی به بدنهٔ این بیضی بتابد، بازتاب آن از کدام نقطه می‌گذرد؟**

۱) $(۳,۷)$

۲) $(۵,۱)$

۳) $(۳,۱)$

۴) $(۵,۷)$

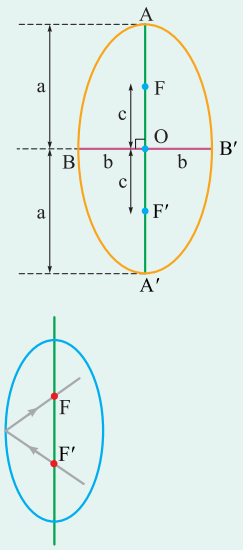
مشاوره تعیین مختصات نقاط مهم بیضی (مرکز، رأس‌ها و کانون‌ها) با استفاده از داده‌های مسأله، از تیپ‌های مهم سؤال‌های بیضی است که در این سؤال با ویژگی بازتابندگی بیضی ترکیب شده و نتیجهٔ آن یک سؤال مهم شده است که می‌تواند کاندید خوبی برای سؤال‌های کنکور آینده باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint بازتاب هر پرتو که از یک کانون بر آینهٔ بیضوی بتابد، از کانون دیگر می‌گذرد.

درس Box

۱) در شکل رسم شده، F و F' کانون‌های بیضی و O مرکز آن است. A و A' رأس‌های کانونی و B و B' رأس‌های غیرکانونی نامیده می‌شوند. AA' بلندترین و BB' کوتاه‌ترین قطر بیضی است و طول پاره‌خط‌ها برحسب پارامترهای a، b و c مشخص شده‌اند. دقت کنید که در هر بیضی وسط هر یک از پاره‌خط‌های AA'، BB' و FF' مرکز بیضی را می‌دهد.



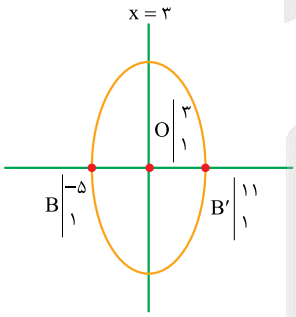
۲) با توجه به شکل بالا، اگر $O\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta\end{vmatrix}$ مرکز یک بیضی **قائم** باشد، مختصات کانون‌ها به صورت $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+c\end{vmatrix}$ و $F'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-c\end{vmatrix}$، مختصات رأس‌های کانونی به صورت $A\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{vmatrix}$ و $A'\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{vmatrix}$ و مختصات رأس‌های غیرکانونی به صورت $B\begin{vmatrix}\alpha-b\\ \beta\end{vmatrix}$ و $B'\begin{vmatrix}\alpha+b\\ \beta\end{vmatrix}$ است.

۳) در هر بیضی بین پارامترهای a، b و c رابطهٔ $a^۲=b^۲+c^۲$ برقرار است.

۴) اگر یک پرتو از کانون یک آینهٔ بیضوی بر آن بتابد، بازتاب آن از کانون دیگر می‌گذرد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم شکل و تعیین مختصات مرکز بیضی): با توجه به شکل از آن‌جا که دو رأس غیرکانونی روی خط $y=۱$ قرار دارند، بیضی قائم است و داریم:



مرکز بیضی: $O=\frac{۱}{۲}(B+B')=(\frac{-۵+۱۱}{۲},\frac{۱+۱}{۲})=(۳,۱)$

گام دوم (تعیین پارامتر c و مختصات کانون‌ها): می‌دانیم $OB'=b$ و از آن‌جا که O و B' هر دو روی خط $y=۱$ واقع‌اند، طول OB' برابر با اختلاف طول‌های O و B' است:

$$OB'=۱۱-۳=۸ \Rightarrow b=۸$$

از طرفی سؤال گفته که طول بلندترین قطر ۲۰ است، یعنی:

$$۲a=۲۰ \Rightarrow a=۱۰$$

و می‌دانیم $a^۲=b^۲+c^۲$، پس:

$$۱۰^۲=۸^۲+c^۲ \Rightarrow c^۲=۱۰۰-۶۴ \Rightarrow c^۲=۳۶ \Rightarrow c=۶$$

با معلوم بودن مرکز $O\begin{vmatrix}\alpha=۳\\ \beta=۱\end{vmatrix}$ و پارامتر c، مختصات کانون‌ها به دست می‌آیند:

$$F\begin{vmatrix}\alpha=۳\\ \beta+c=۱+۶=۷\end{vmatrix} \quad , \quad F'\begin{vmatrix}\alpha=۳\\ \beta-c=۱-۶=-۵\end{vmatrix}$$

پس مختصات کانون‌ها به صورت $F'(۳,-۵)$ و $F(۳,۷)$ است.

گام سوم (پیدا کردن خواستهٔ سؤال): همان‌طور که سؤال گفته، از $F'(۳,-۵)$، یک پرتو به بیضی تابیده است؛ پس همان‌طور که در قسمت (۴) درس‌باکس گفتیم، بازتاب آن از کانون دیگر بیضی، یعنی $F(۳,۷)$ می‌گذرد.

WWW.ArefOnline.ir

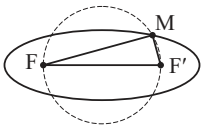
۲۱ در شکل رسم‌شده، $FF' = ۴\sqrt{۵}$ پاره‌خط واصل دو کانون بیضی است که قطر دایره هم می‌باشد. اگر مساحت مثلث MFF' برابر با ۵ باشد، خروج از مرکز بیضی کدام است؟

۱) $\sqrt{۰/۵}$

۲) $\sqrt{۰/۶}$

۳) $\sqrt{۰/۷۵}$

۴) $\sqrt{۰/۸}$



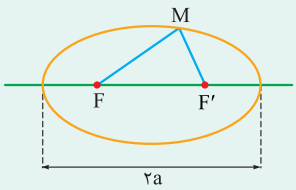
مشاوره این مدل سؤال‌ها در آزمون‌های آزمایشی رایج هستند، روش حل آن را خوب یاد بگیرید که احتمالاً بعد از این هم نمونهٔ آن را خواهید دید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint مثلث MFF' قائم‌الزاویه است.

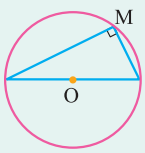
درس Box

۱) اگر نقطه‌ای بر یک بیضی واقع باشد، مجموع فواصل آن از دو کانون بیضی برابر است با $۲a$، مثلاً در شکل رسم‌شده داریم: $MF + MF' = ۲a$.



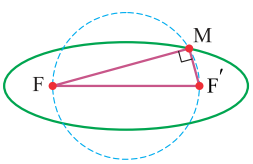
۲) میزان کشیدگی یک بیضی را با پارامتری به نام خروج از مرکز (e) می‌سنجد که این‌طور تعریف می‌شود: $e = \frac{c}{a}$.

۳) زاویهٔ محاطی روبه‌روی قطر هر دایره قائمه است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (تعیین روابط بین MF و MF' با توجه به فرضیات سؤال): با توجه به قسمت (۳) درس‌باکس مثلث MFF' در رأس M، قائم‌الزاویه است. اگر $MF = x$ و $MF' = y$، بنا به قضیهٔ فیثاغورس در این مثلث، داریم:



$$x^۲ + y^۲ = FF'^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = (۴\sqrt{۵})^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ = ۸۰ \quad (۱)$$

سؤال می‌گوید $S(MFF') = ۵$؛ پس:

$$\frac{۱}{۲}xy = ۵ \Rightarrow xy = ۱۰ \quad (۲)$$

گام دوم (محاسبهٔ پارامتر a): در قسمت (۱) درس‌باکس گفتیم $x + y = ۲a$؛ پس:

$$(x+y)^۲ = (۲a)^۲ \Rightarrow x^۲ + y^۲ + ۲xy = ۴a^۲ \xrightarrow{(۱),(۲)} ۸۰ + ۲۰ = ۴a^۲ \Rightarrow a^۲ = ۲۵ \Rightarrow a = ۵$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): سؤال گفته $FF' = ۴\sqrt{۵}$، یعنی $۲c = ۴\sqrt{۵}$، $c = ۲\sqrt{۵}$ و می‌دانیم $e = \frac{c}{a}$؛ پس:

$$e = \frac{۲\sqrt{۵}}{۵} = \frac{۲}{\sqrt{۵}} = \sqrt{\frac{۴}{۵}} = \sqrt{۰/۸}$$

WWW.ArefOnline.ir

۲۲ در سهمی به معادلهٔ $۴y = (x+۱)^۲$ فاصلهٔ کانون از خط هادی کدام است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۰/۵
۴) ۴

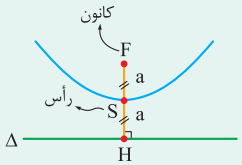
مشاوره سه فاصلهٔ مهم در سهمی وجود دارد: ۱) فاصلهٔ کانون تا رأس ۲) فاصلهٔ کانون تا خط هادی ۳) فاصلهٔ رأس تا خط هادی؛ که باید نحوهٔ محاسبهٔ آن‌ها را از روی معادلهٔ استاندارد و گستردهٔ سهمی بلد باشید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint همه‌چیز به ضریب y در معادلهٔ استاندارد ربط دارد!

درس Box

۱) تعریف سهمی می‌گوید: هر نقطهٔ واقع بر سهمی، از کانون و خط هادی به یک فاصله است؛ پس رأس سهمی که نقطه‌ای واقع بر سهمی است از کانون و خط هادی به یک فاصله است، این فاصله را برابر با a در نظر می‌گیریم و به آن پارامتر سهمی می‌گوییم؛ بنابراین فاصلهٔ کانون تا خط هادی می‌شود $۲a$.



$FS = SH = a$

۲) با معلوم‌بودن پارامتر a و با فرض این‌که مختصات رأس سهمی به صورت $S(\alpha, \beta)$ باشد، بسته به این‌که سهمی افقی یا قائم است و دهانهٔ آن به چه سمتی باز می‌شود، معادلهٔ استاندارد آن به دست می‌آید:

نوع سهمی	دهانه	شکل	معادله
افقی	به سمت راست		$(y-\beta)^۲ = ۴a(x-\alpha)$
	به سمت چپ		$(y-\beta)^۲ = -۴a(x-\alpha)$
قائم	به بالا		$۴a(y-\beta) = (x-\alpha)^۲$
	به پایین		$-۴a(y-\beta) = (x-\alpha)^۲$

پاسخ خیلی تشریحی خوشبختانه معادله به صورت استاندارد به ما داده شده و نیازی به استانداردکردن نداریم، فقط اگر $۴y = (x+۱)^۲$ را با یک تغییر جزئی به صورت $۴\times۱(y-۰) = (x+۱)^۲$ بنویسیم، از مقایسه با حالت سوم در جدول درس‌باکس داریم $a = ۱$، پس:

$FH = ۲a = ۲(۱) = ۲$

WWW.ArefOnline.ir

۲۳ کانون سهمی به معادلهٔ $x^۲ + ۶y = ax + ۳$ بر محور xها واقع است. فاصلهٔ مبدأ مختصات از محور تقارن این سهمی کدام است؟

۱) $\sqrt{۶}$

۲) $۲\sqrt{۶}$

۳) ۳

۴) ۶

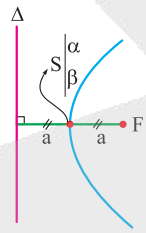
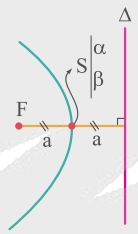
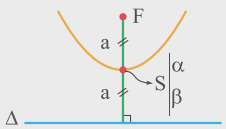
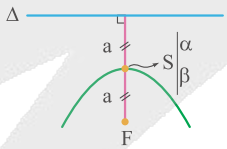
مشاوره رایج‌ترین تیپ سؤالات سهمی در کنکور شبیه این سؤال است، یعنی معادلهٔ گستردهٔ سهمی را به شما می‌دهند و اطلاعاتی در مورد آن از شما می‌خواهند که در اکثریت قریب به اتفاق سؤال‌ها، باید برای حل، معادلهٔ گسترده را به معادلهٔ استاندارد تبدیل کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint معادلهٔ گسترده را به استاندارد تبدیل کنید.

درس Box

۱) در درس‌باکس سؤال قبل، نحوهٔ نوشتن معادلهٔ سهمی با معلوم‌بودن پارامتر a (یعنی فاصلهٔ کانون تا رأس یا همان فاصلهٔ رأس تا خط هادی) و مختصات رأس گفته شد. حالا در این‌جا می‌خواهیم مختصات کانون و معادلهٔ خط هادی را در هر حالت به دست آوریم:

سهمی افقی با دهانهٔ به سمت راست		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha+a\\ \beta\end{vmatrix}$ (a تا به راست می‌رویم) $\Delta: x=\alpha-a$ (a تا به چپ می‌رویم)
سهمی افقی با دهانهٔ به سمت چپ		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha-a\\ \beta\end{vmatrix}$ (a تا به چپ می‌رویم) $\Delta: x=\alpha+a$ (a تا به راست می‌رویم)
سهمی قائم با دهانهٔ به سمت بالا		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta+a\end{vmatrix}$ (a تا به بالا می‌رویم) $\Delta: y=\beta-a$ (a تا به پایین می‌رویم)
سهمی قائم با دهانهٔ به سمت پایین		از رأس: $F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta-a\end{vmatrix}$ (a تا به پایین می‌رویم) $\Delta: y=\beta+a$ (a تا به بالا می‌رویم)

پس برای پیداکردن مختصات F و معادلهٔ Δ باید معادلهٔ گسترده را به استاندارد تبدیل کنیم تا α، β و a به دست آیند، سپس بسته به این‌که کدام‌یک از حالت‌های بالا را داریم، F و Δ معلوم می‌شوند.

۲) معادلهٔ محور تقارن در سهمی‌های افقی به صورت $y=\beta$ و در سهمی‌های قائم به صورت $x=\alpha$ است.

۳) برای تبدیل معادلهٔ گسترده به معادلهٔ استاندارد، از اتحادهای $\begin{cases} x^۲ \pm ax = (x \pm \frac{a}{۲})^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ \\ y^۲ \pm by = (y \pm \frac{b}{۲})^۲ - (\frac{b}{۲})^۲ \end{cases}$ استفاده می‌کنیم و در یک سمت معادله، یک مربع کامل ایجاد می‌کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

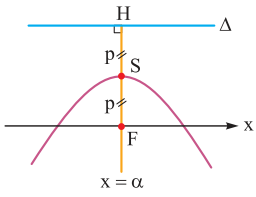
گام اول (تبدیل معادلهٔ گسترده به معادلهٔ استاندارد): تمام عبارت‌های شامل x را به سمت چپ معادله برده و مربع کامل ایجاد می‌کنیم:

$$x^۲ + ۶y = ax + ۳ \Rightarrow x^۲ - ax = -۶y + ۳ \Rightarrow (x - \frac{a}{۲})^۲ - (\frac{a}{۲})^۲ = -۶y + ۳ \Rightarrow (x - \frac{a}{۲})^۲ = -۶y + ۳ + \frac{a^۲}{۴}$$

$$\Rightarrow (x - \frac{a}{۲})^۲ = -۶(y - \frac{۱}{۲} - \frac{a^۲}{۲۴})$$

WWW.ArefOnline.ir

گام دوم (به دست آوردن مختصات کانون): با توجه به معادلهٔ استاندارد سهمی، یک سهمی قائم با دهانهٔ رو به پایین داریم. از آن‌جا که کانون آن روی محور xهاست، نمودار آن به صورت شکلِ رسم‌شده است؛ در این سهمی داریم:



$$۴p = ۶ \Rightarrow p = \frac{۳}{۲}\ ,\ \begin{cases}\alpha = \frac{a}{۲}\\ \beta = \frac{۱}{۲} + \frac{a^۲}{۲۴}\end{cases}$$

(دقت کنید که پارامتر سهمی، یعنی همان فاصلهٔ $FS = SH$ را با p نمایش دادیم تا با متغیر a در صورت سؤال اشتباه نشود.)

از طرفی داریم:

$$F\begin{vmatrix}\alpha\\ \beta - P\end{vmatrix} \Rightarrow F\begin{vmatrix}\frac{a}{۲}\\ \frac{۱}{۲} + \frac{a^۲}{۲۴} - \frac{۳}{۲} = \frac{a^۲}{۲۴} - ۱\end{vmatrix}$$

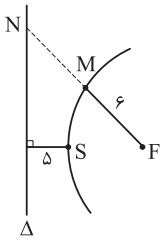
گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): نقطهٔ F روی محور xها واقع است؛ پس $y_F = ۰$، یعنی:

$$\frac{a^۲}{۲۴} - ۱ = ۰ \Rightarrow a^۲ = ۲۴ \Rightarrow a = \pm ۲\sqrt{۶}$$

اگر $a = \pm ۲\sqrt{۶}$ آن‌گاه $\alpha = \pm\sqrt{۶}$، یعنی معادلهٔ محور تقارن سهمی به صورت $x = \pm\sqrt{۶}$ که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات $\sqrt{۶}$ است.

WWW.ArefOnline.ir

۲۴ در شکل رسم‌شده، دو نقطهٔ S و F به ترتیب رأس و کانون سهمی و Δ خط هادی آن است. از نقطهٔ M واقع بر سهمی به F وصل کرده‌ایم، اگر امتداد MF، خط Δ را در N قطع کند، طول MN کدام است؟



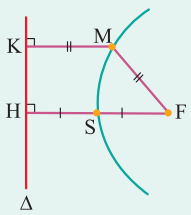
۱) ۵
۲) ۶
۳) ۹
۴) ۸

مشاوره برای حل این سؤال فقط نیاز به دانستن تعریف سهمی و استفاده از قضیهٔ تالس دارید؛ یعنی با یک سؤال ترکیبی از هندسهٔ ۱ و هندسهٔ ۳ مواجهیم. ضمن آن‌که این سؤال، مشابه یکی از تمرین‌های کتاب درسی هندسهٔ ۳ است، پس احتمال طرح مشابه این سؤال در کنکور بسیار زیاد است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

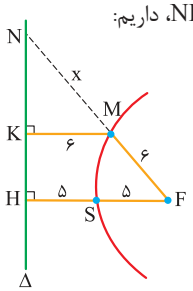
Hint
از M به خط هادی عمود کنید.

درس Box
طبق تعریف، سهمی مکان هندسی نقاطی از صفحه است که از یک خط ثابت و یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله هستند. به آن خط ثابت، خط هادی سهمی و به آن نقطهٔ ثابت، کانون سهمی می‌گویند. مثلاً در شکل رسم‌شده که M نقطه‌ای واقع بر سهمی است، داریم $MF = MK$. از تعریف سهمی نتیجه می‌شود که رأس سهمی وسط پاره‌خطی است که از کانون بر خط هادی عمود می‌شود، بنابراین در شکل رسم‌شده داریم: $SH = SF$.



پاسخ خیلی تشریحی
گام اول (افزودن پاره‌خط‌های مناسب به شکل): برای آن‌که بتوانیم از تعریف سهمی استفاده کنیم، از M به Δ عمود و از S به F وصل می‌کنیم. طبق تعریف سهمی داریم، $SF = SH = ۵$ و $MK = MF = ۶$.

گام دوم (یافتن خواستهٔ سؤال): از آن‌جا که $MK \parallel FH$، با استفاده از تعمیم قضیهٔ تالس در مثلث NHF، داریم:



$$\frac{NM}{NF} = \frac{MK}{FH} \Rightarrow \frac{x}{x+۶} = \frac{۶}{۱۰} \Rightarrow ۱۰x = ۶x + ۳۶ \Rightarrow x = ۹$$

WWW.ArefOnline.ir

۲۵ مساحت قسمتی از نمودار رابطهٔ $R = \{(x,y) \mid \sqrt{x-y} \le ۱, y \le ۱\}$ که در ناحیهٔ اول مختصات قرار دارد، کدام است؟

۱) ۱

۲) ۲

۳) $\frac{۳}{۲}$

۴) $\frac{۱}{۲}$

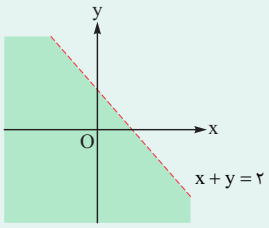
مشاوره در ابتدای فصل سوم کتاب هندسهٔ ۳، رسم نمودار رابطه‌های این‌چنینی در صفحهٔ مختصات مورد بحث قرار گرفته که می‌توان گفت از مباحثی است که در نظام جدید به این کتاب اضافه شده است، پس اگر در کنکور هم سؤالی از خود این موضوع یا در ترکیب با مباحث دیگر دیدیم، نباید تعجب کنیم.

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint حواستان به شرط نامنفی‌بودن عدد زیر رادیکال باشد.

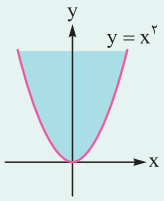
درس Box

۱) فرض کنید می‌خواهیم نمودار $x+y<۲$ را در دستگاه مختصات رسم کنیم، ابتدا خط $x+y=۲$ را رسم می‌کنیم.



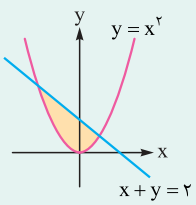
همان‌طور که می‌بینید، این خط دستگاه مختصات را به سه قسمت تقسیم می‌کند:

الف) نقاط بالای خط ب) نقاط واقع بر خط پ) نقاط زیر خط؛ تکلیف قسمت (ب) مشخص است، برای پیداکردن رابطهٔ متناظر به قسمت‌های (الف) و (پ)، یک نقطهٔ دلخواه غیرواقع بر خط $x+y=۲$ را در نظر بگیرید، مثلاً $O(۰,۰)$، داریم $\underbrace{x_O + y_O}_{۰} < ۲$، پس ناحیه‌ای که O در آن قرار دارد، ناحیهٔ متناظر به $x+y<۲$ است. طبیعتاً ناحیهٔ دیگر متناظر به رابطهٔ $x+y>۲$ است.



دقت کنید که اگر رابطه به صورت $x+y \le ۲$ بود، خط $x+y=۲$ را به صورت خط کامل (نه به صورت خط‌چین) رسم می‌کردیم. از همین روش، برای رسم سایر نمودارهایی که رابطهٔ آن به صورت نامساوی داده شده است استفاده می‌کنیم؛ مثلاً در شکل روبه‌رو، نمودار متناظر به رابطهٔ $y \ge x^۲$ رسم شده است.

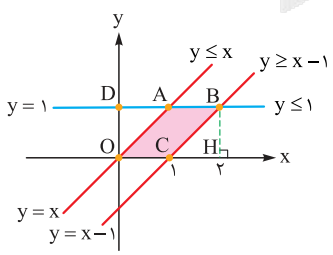
حالا اگر رابطه با دو نامعادله داده شده باشد، هر یک را به صورت جداگانه رسم کرده، بین آن‌ها اشتراک می‌گیریم؛ مثلاً در شکل زیر، نمودار متناظر به $x+y \le ۲$ و $y \ge x^۲$ رسم شده است.



۲) عدد زیر رادیکال با فرجهٔ زوج باید نامنفی باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (رسم نمودار رابطه): اگر طرفین نامعادلهٔ $\sqrt{x-y} \le ۱$ را به توان دو برسانیم، داریم $x-y \le ۱$ یا به عبارت دیگر $y \ge x-۱$، اما از آن‌جا که $x-y$ زیر رادیکال با فرجهٔ دو قرار دارد، باید $x-y \ge ۰$ یا به عبارت دیگر $y \le x$؛ پس رابطهٔ مورد نظر، از سه شرط $\begin{cases} y \ge x-۱ \\ y \le x \\ y \le ۱ \end{cases}$ تشکیل شده است که ما قسمتی از آن را می‌خواهیم که در ناحیهٔ اول است.



گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): همان‌طور که می‌بینید، ناحیهٔ مورد نظر خواسته سؤال، مساحت متوازی‌الاضلاع OABC است که داریم:

$$S(OABC) = OC.BH \Rightarrow S(OABC) = ۱ \times ۱ = ۱$$

WWW.ArefOnline.ir

گول نخوری اگر حواستان به شرط مثبت‌بودن زیر رادیکال نباشد، مساحت ذوزنقهٔ OCBD را حساب می‌کنید که می‌شود $\frac{۳}{۲}$ و گزینهٔ (۳) را انتخاب می‌کنید!

WWW.ArefOnline.ir

۲۶ اگر m عددی طبیعی باشد، به طوری که نقطهٔ $A(m-۴,۴-m,m^۲-۵m)$ در ناحیهٔ ششم و نقطهٔ $B(m-۲,m^۲-۴m,۲-m)$ در ناحیهٔ هشتم دستگاه مختصات واقع باشد، فاصلهٔ نقطهٔ وسط پاره‌خط AB از مبدأ مختصات، به کدام عدد صحیح نزدیک‌تر است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

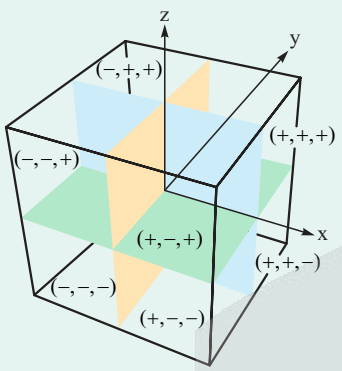
مشاوره ناحیه‌بندی دستگاه مختصات دوبعدی را حتماً بلدید، ناحیه‌بندی دستگاه سه‌بعدی هم شبیه همان است؛ اگر آن را بلد نیستید، درس‌باکس را حتماً بخوانید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint شرط علامت x، y و z در ناحیه‌های ششم و هشتم را روی A و B اعمال کنید.

درس Box

۱) صفحه‌های $z=۰$، $y=۰$ و $x=۰$ که به ترتیب آن‌ها را صفحه‌های xy، xz و yz می‌نامیم، فضای مختصات را مطابق شکل به هشت ناحیه تقسیم می‌کنند که علامت طول، عرض و ارتفاع نقاط واقع بر این هشت ناحیه را در جدول زیر می‌بینید.



شمارهٔ ناحیه	علامت محورها		
	x	y	z
۱	+	+	+
۲	−	+	+
۳	−	−	+
۴	+	−	+
۵	+	+	−
۶	−	+	−
۷	−	−	−
۸	+	−	−

۲) اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، طول پاره‌خط AB برابر است با:

$$AB=\sqrt{(x_۲-x_۱)^۲+(y_۲-y_۱)^۲+(z_۲-z_۱)^۲}$$

۳) اگر $A(x_۱,y_۱,z_۱)$ و $B(x_۲,y_۲,z_۲)$ دو نقطه در فضا باشند، مختصات نقطهٔ وسط پاره‌خط AB می‌شود:

$$M\left(\frac{x_۱+x_۲}{۲},\frac{y_۱+y_۲}{۲},\frac{z_۱+z_۲}{۲}\right)$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول (اعمال شرط قرارگیری در ناحیه‌های ششم و هشتم برای A و B):** با توجه به جدول درس‌باکس، داریم:

$$A(m-۴,۴-m,m^۲-۵m)\xrightarrow{\text{ناحیهٔ ششم}}\begin{cases}x_A<۰ \Rightarrow m-۴<۰ \Rightarrow m<۴\\ y_A>۰ \Rightarrow ۴-m>۰ \Rightarrow m<۴\\ z_A<۰ \Rightarrow \underbrace{m^۲-۵m}_{m(m-۵)}<۰ \Rightarrow ۰<m<۵\end{cases}$$

از اشتراک سه نامعادلهٔ به‌دست‌آمده، داریم $\underbrace{۰<m<۴}_{(*)}$، یعنی با شرط $۰<m<۴$ نقطهٔ A در ناحیهٔ ششم مختصات قرار می‌گیرد.

$$B(m-۲,m^۲-۴m,۲-m)\xrightarrow{\text{ناحیهٔ هشتم}}\begin{cases}x_B>۰ \Rightarrow m-۲>۰ \Rightarrow m>۲\\ y_B<۰ \Rightarrow \underbrace{m^۲-۴m}_{m(m-۴)}<۰ \Rightarrow ۰<m<۴\\ z_B<۰ \Rightarrow ۲-m<۰ \Rightarrow m>۲\end{cases}$$

از اشتراک سه نامعادلهٔ به‌دست‌آمده داریم $\underbrace{۲<m<۴}_{(**)}$، یعنی با شرط $۲<m<۴$ نقطهٔ B در ناحیهٔ هشتم مختصات قرار می‌گیرد.

WWW.ArefOnline.ir

گام دوم (محاسبهٔ m): برای آن‌که A در ناحیهٔ ششم و B در ناحیهٔ هشتم باشد، باید هر دو نامعادله‌های (*) و (**) هم‌زمان برقرار باشند؛ پس باید بین آن‌ها اشتراک بگیریم که نتیجه می‌دهد $۲ < m < ۴$. حالا سؤال گفته که m عددی طبیعی است؛ پس تنها عدد قابل قبول $m = ۳$ است.

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از آن‌جا که $m = ۳$، داریم:

$$A(m-۴, ۴-m, m^۲-۵m) = (-۱, ۱, -۶) \qquad B(m-۲, m^۲-۴m, ۲-m) = (۱, -۳, -۱)$$

پس نقطهٔ وسط پاره‌خط AB می‌شود $m(۰, -۱, -\frac{۷}{۲})$ که فاصلهٔ آن از مبدأ مختصات، یعنی $O(۰,۰,۰)$ برابر است با:

$$OM = \sqrt{(۰-۰)^۲ + (۰+۱)^۲ + (۰+\frac{۷}{۲})^۲} = \sqrt{۱+\frac{۴۹}{۴}} = \sqrt{\frac{۵۳}{۴}} = \sqrt{۱۳/۲۵} \simeq ۴$$

دقت کنید که $۱۶ > ۱۳/۲۵ > ۹$، پس $\sqrt{۱۶} > \sqrt{۱۳/۲۵} > \sqrt{۹}$ و از آن‌جا که ۱۳/۲۵ به ۱۶ نزدیک‌تر است تا به ۹، مقدار $\sqrt{۱۳/۲۵}$ هم به ۴ نزدیک‌تر است تا به ۳.

WWW.ArefOnline.ir

۲۷ سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ به ترتیب با طول‌های ۲، ۳ و ۴ در تساوی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ صدق می‌کنند، حاصل $\vec{a}.\vec{b}$ کدام است؟

۱) ۳/۵ ۲) ۱/۵ ۳) −۵/۵ ۴) −۱۱/۵

مشاوره سؤال مهمی است که هم در تمرین‌های کتاب مشابه آن را داریم و هم در کنکورهای گذشته آمده است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint

در تساوی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$، $\vec{c}$ را به سمت راست منتقل کنید.

درس Box

۱) اگر $\vec{u}$ برداری دلخواه باشد، آن‌گاه $\vec{u}.\vec{u}=|\vec{u}|^2$.

۲) اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار دلخواه باشند، آن‌گاه $\vec{u}.\vec{v}=\vec{v}.\vec{u}$.

۳) اگر $\vec{u}$ و $\vec{v}$ دو بردار و r و s دو عدد حقیقی دلخواه باشند، آن‌گاه $(r\vec{u}).(s\vec{v})=(rs)\vec{u}.\vec{v}$.

۴) اگر $\vec{u}$، $\vec{v}$ و $\vec{w}$ سه بردار دلخواه باشند، آن‌گاه $\vec{u}.(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}.\vec{v}+\vec{u}.\vec{w}$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (نوشتن تساوی به صورت مناسب): تساوی $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}=\vec{0}$ را به صورت $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ می‌نویسیم تا در یک سمت تساوی، فقط دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ را داشته باشیم.

گام دوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): از تساوی $\vec{a}+\vec{b}=-\vec{c}$ می‌توان نتیجه گرفت:

$$(\vec{a}+\vec{b}).(\vec{a}+\vec{b})=(-\vec{c}).(-\vec{c}) \Rightarrow \underbrace{\vec{a}.\vec{a}}_{|\vec{a}|^2}+\underbrace{\vec{a}.\vec{b}+\vec{b}.\vec{a}}_{2\vec{a}.\vec{b}}+\underbrace{\vec{b}.\vec{b}}_{|\vec{b}|^2}=\underbrace{\vec{c}.\vec{c}}_{|\vec{c}|^2}$$

پس:

$$|\vec{a}|^2+2\vec{a}.\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{c}|^2 \quad (*)$$

سؤال گفته $|\vec{a}|=2$، $|\vec{b}|=3$ و $|\vec{c}|=4$؛ با جای‌گذاری این مقادیر در تساوی (*) داریم:

$$4+2\vec{a}.\vec{b}+9=16 \Rightarrow 2\vec{a}.\vec{b}=3 \Rightarrow \vec{a}.\vec{b}=\frac{3}{2}=1/5$$

WWW.ArefOnline.ir

۲۸ زاویهٔ بین دو بردار $\vec{u}$ و $\vec{v}$ به ترتیب با طول‌های ۴ و ۵ منفرجه و مساحت مثلث بناشده روی آن‌ها ۸ است. طول بردار $\vec{u}-\vec{v}$ کدام است؟

۱) $\sqrt{۵۷}$
۲) $\sqrt{۶۵}$
۳) $۲\sqrt{۱۵}$
۴) $۲\sqrt{۱۷}$

مشاوره در اکثر مواقع اندازهٔ بردار $\vec{a}\times\vec{b}$ با مباحث دیگر به صورت ترکیبی مطرح می‌شود. در این موارد معمولاً رد پای مساحت مثلث یا متوازی‌الاضلاع و اتحادهای برداری وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint برای محاسبهٔ $|\vec{u}-\vec{v}|$ از اتحادهای برداری استفاده کنید.

درس Box

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار غیرصفر و θ زاویهٔ بین آن‌ها باشد، در این صورت:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta \quad \text{و} \quad \vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$$

۲) مساحت مثلث بناشده روی بردارهای $\vec{a}$ و $\vec{b}$ برابر است با:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{a}\times\vec{b}|$$

۳) اتحادهای توان دوم جبری در بردارها نیز برقرار است، با این تفاوت که در بردارها باید ضرب‌ها را به ضرب داخلی تبدیل کنیم:

الف) $|\vec{a}\pm\vec{b}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲\pm ۲\vec{a}.\vec{b}$

ب) $|\vec{a}+\vec{b}||\vec{a}-\vec{b}|=|\vec{a}|^۲-|\vec{b}|^۲$

پ) $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^۲=|\vec{a}|^۲+|\vec{b}|^۲+|\vec{c}|^۲+۲\vec{a}.\vec{b}+۲\vec{a}.\vec{c}+۲\vec{b}.\vec{c}$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول (محاسبهٔ کسینوس زاویهٔ بین $\vec{u}$ و $\vec{v}$): با توجه به این‌که مساحت مثلث بناشده بر بردارهای u و v برابر ۸ است، پس اگر زاویهٔ بین دو بردار را θ فرض کنیم، داریم:

$$S=\frac{۱}{۲}|\vec{u}\times\vec{v}| \Rightarrow ۸=\frac{۱}{۲}|\vec{u}||\vec{v}|\sin\theta \xrightarrow[|\vec{v}|=۵]{|\vec{u}|=۴} ۸=\frac{۱}{۲}\times۴\times۵\times\sin\theta \Rightarrow ۸=۱۰\sin\theta$$

$$\Rightarrow \sin\theta=\frac{۸}{۱۰}=\frac{۴}{۵} \xrightarrow{\cos^۲\theta=۱-\sin^۲\theta} \cos^۲\theta=۱-(\frac{۴}{۵})^۲=\frac{۹}{۲۵} \xrightarrow[\cos\theta<۰]{\theta\text{ منفرجه است}} \cos\theta=-\frac{۳}{۵}$$

گام دوم (محاسبهٔ $\vec{u}.\vec{v}$):

$$\vec{u}.\vec{v}=|\vec{u}||\vec{v}|\cos\theta=۴\times۵\times(-\frac{۳}{۵})=-۱۲$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال):

$$|\vec{u}-\vec{v}|^۲=|u|^۲+|\vec{v}|^۲-۲\vec{u}.\vec{v}=۴^۲+۵^۲-۲(-۱۲)=۱۶+۲۵+۲۴=۶۵ \Rightarrow |\vec{u}-\vec{v}|=\sqrt{۶۵}$$

WWW.ArefOnline.ir

۲۹ دو بردار $\vec{a}$ و $\vec{b}$ به ترتیب با طول‌های ۵ و ۲، با هم زاویهٔ منفرجه می‌سازند. اگر اندازهٔ حاصل‌ضرب خارجی این دو بردار ۸ باشد، حاصل $|\vec{a}\times(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})|+|\vec{a}.(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})|$ کدام است؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۰ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint سینوس و کسینوس زاویهٔ بین دو بردار را به دست آورید.

درس Box

۱) اگر $\vec{a}$ و $\vec{b}$ دو بردار باشند که با هم زاویهٔ θ می‌سازند، آن‌گاه:

الف) $\begin{cases}\vec{a}.\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta\\ |\vec{a}\times\vec{b}|=|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta\end{cases}$

ب) $\vec{a}.\vec{a}=|\vec{a}|^2\ ,\ \vec{a}\times\vec{a}=\vec{o}$

۲) اگر $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ سه بردار و r و s دو عدد حقیقی باشند، داریم:

$$\begin{cases}\vec{a}\times(r\vec{b}+s\vec{c})=r\vec{a}\times\vec{b}+s\vec{a}\times\vec{c}\\ \vec{a}.(r\vec{b}+s\vec{c})=r\vec{a}.\vec{b}+s\vec{a}.\vec{c}\end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (ساده‌کردن خواستهٔ سؤال): بنا به آن‌چه که در درس‌باکس گفتیم اگر زاویهٔ بین دو بردار را θ در نظر بگیریم، داریم:

$$A=|\underbrace{\vec{a}\times(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})}_{\vec{a}\times\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}}|+|\underbrace{\vec{a}.(\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{b})}_{\vec{a}.\vec{a}-\frac{1}{2}\vec{a}.\vec{b}}|=|-\frac{1}{2}\vec{a}\times\vec{b}|+|۲۵-\frac{1}{2}\vec{a}.\vec{b}|$$

$$=\frac{1}{2}|\vec{a}\times\vec{b}|+|۲۵-\frac{1}{2}|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta|=\frac{1}{2}\times۸+|۲۵-\frac{1}{2}\times۵\times۲\cos\theta|\Rightarrow A=۴+|۲۵-۵\cos\theta|$$

گام دوم (محاسبهٔ کسینوس زاویهٔ بین $\vec{a}$ و $\vec{b}$): با توجه به گام اول، برای محاسبهٔ عبارت مورد نظر سؤال، کافی است کسینوس زاویهٔ بین دو بردار را محاسبه کنیم. داریم:

$$|\vec{a}\times\vec{b}|=۸\Rightarrow|\vec{a}||\vec{b}|\sin\theta=۸\Rightarrow۵\times۲\sin\theta=۸\Rightarrow\sin\theta=\frac{۴}{۵}$$

$$\xrightarrow{\sin^2\theta+\cos^2\theta=1}\cos\theta=\pm\frac{۳}{۵}\xrightarrow{\theta\text{ منفرجه}}\cos\theta=\frac{-۳}{۵}$$

گام سوم (محاسبهٔ خواستهٔ سؤال): با توجه به دو گام قبل، داریم:

$$A=۴+|۲۵-۵\times(\frac{-۳}{۵})|=۴+۲۸=۳۲$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۰ اگر $\vec{a}=(0,3,1)$ و $\vec{b}=(-2,1,0)$، آن‌گاه حجم متوازی‌السطوحی که روی سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$ ساخته می‌شود، کدام است؟

۱) ۳۱ ۲) ۳۲ ۳) ۴۱ ۴) ۴۲

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا بردار $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$ را به دست آورید و سپس به کمک ضرب مختلط، حجم متوازی‌السطوح را محاسبه کنید.

درس Box

۱) حاصل‌ضرب خارجی هر بردار دلخواه در خودش، بردار صفر است.

$$\vec{a}\times\vec{a}=\vec{0}$$

۲) برای سه بردار $\vec{a}$، $\vec{b}$ و $\vec{c}$ داریم:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{c}=\vec{a}\times\vec{c}+\vec{b}\times c \quad \text{و} \quad \vec{a}\times(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}\times\vec{b}+\vec{a}\times\vec{c}$$

۳) حجم متوازی‌السطوحی که روی بردارهای $\vec{a}=(a_1,a_2,a_3)$، $\vec{b}=(b_1,b_2,b_3)$ و $\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)$ ساخته می‌شود برابر است با:

$$v=|\vec{a}.(\vec{b}\times\vec{c})|=\left|\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3\\ b_1 & b_2 & b_3\\ c_1 & c_2 & c_3\end{vmatrix}\right|$$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول (ساده‌کردن عبارت $(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}$): به کمک ویژگی‌های ضرب خارج داریم:

$$(\vec{a}+\vec{b})\times\vec{b}=\vec{a}\times\vec{b}+\underbrace{\vec{b}\times\vec{b}}_{\vec{0}}=\vec{a}\times\vec{b}$$

گام دوم (به‌دست‌آوردن بردار $\vec{a}\times\vec{b}$): با توجه به این‌که $\vec{a}=(0,3,1)$ و $\vec{b}=(-2,1,0)$ می‌باشد، داریم:

$$\vec{a}\times\vec{b}=\left(\begin{vmatrix}3&1\\1&0\end{vmatrix},-\begin{vmatrix}0&1\\-2&0\end{vmatrix},\begin{vmatrix}0&3\\-2&1\end{vmatrix}\right)=(-1,-2,6)$$

گام سوم (محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح): حجم متوازی‌السطوح بناشده، روی بردارهای $\vec{a}=(0,3,1)$ و $\vec{b}=(-2,1,0)$ و $\vec{a}\times\vec{b}=(-1,-2,6)$ برابر است با:

$$v=\left|\begin{vmatrix}0&3&1\\-2&1&0\\-1&-2&6\end{vmatrix}\right|=|-3\begin{vmatrix}-2&0\\-1&6\end{vmatrix}+1\begin{vmatrix}-2&1\\-1&-2\end{vmatrix}|=|-3(-12)+5|=41$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۱ در گراف ۷رأسی با $\Delta = ۳$، عدد احاطه‌گری چند مقدار مختلف می‌تواند داشته باشد؟ ← γ

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

مشاوره درست است که کتاب فقط به کران پایین γ اشاره کرده است، اما کران بالای γ نیز به راحتی ثابت می‌شود.

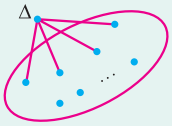
پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint به کران بالا و پایین γ توجه کنید.

درس Box

کران بالای عدد احاطه‌گری در گراف nرأسی:

در هر گراف، رأس درجهٔ Δ به همراه همهٔ رأس‌های دیگر یک مجموعهٔ احاطه‌گر است. گراف به غیر از رأس (Δ) و Δ همسایهٔ آن (یعنی $\Delta+۱$ رأس) تعداد $n-(\Delta+۱)$ رأس دیگر دارد؛ پس رأس Δ به همراه $n-(\Delta+۱)$ رأس دیگر تعداد $n-\Delta$ رأسی هستند که حتماً گراف توسط آن‌ها احاطه می‌شود؛ پس $\gamma(G) \le n-\Delta$. به یاد داشته باشید که:



$$\left\lceil \frac{n}{\Delta+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le n-\Delta$$

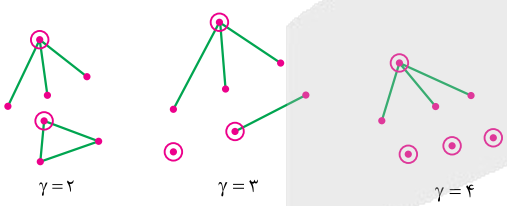
پاسخ خیلی تشریحی ✔

طبق نکتهٔ درس‌باکس:

$$۲ = \left\lceil \frac{۷}{۴} \right\rceil = \left\lceil \frac{۷}{۳+۱} \right\rceil \le \gamma(G) \le ۷-۳ = ۴$$

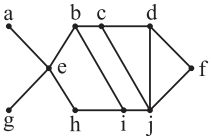
پس γ برابر ۲ یا ۳ یا ۴ می‌تواند باشد؛ یعنی سه مقدار مختلف دارد.

حواستان باشد: به گراف‌های ۷رأسی با $\Delta = ۳$ دقت کنید که چگونه γ ممکن است برابر ۲، ۳ یا ۴ باشد.



WWW.ArefOnline.ir

۳۲ کدام مجموعه، یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال برای گراف G است؟



۱) $\{a,g,b,c,f\}$

۲) $\{a,g,i,c,f\}$

۳) $\{a,e,c,i,d\}$

۴) $\{e,b,h,j,i\}$

احاطه‌گری که هیچ رأسی از آن قابل حذف‌کردن نیست.

مشاوره به تعریف مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم و مینیمال دقت کرده و آن‌ها را با هم اشتباه نگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۲

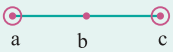
Hint احاطه‌گر مینیمال، مجموعهٔ احاطه‌گری است که با حذف هر رأس، از احاطه‌گربودن می‌افتد.

درس Box

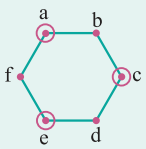
مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال:

مجموعهٔ احاطه‌گری که هیچ رأس آن قابل حذف‌کردن نباشد (هر رأس که حذف کنیم، مجموعه دیگر احاطه‌گر نباشد) را مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال می‌گوییم.

مثلاً در گراف زیر، مجموعهٔ $\{a,c\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است (اگر a را حذف کنیم خودش احاطه نمی‌شود و اگر c را حذف کنیم نیز همین‌طور):



دقت کنید که مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم در این گراف $\{b\}$ بوده و $\gamma=1$ است یا در گراف زیر مجموعهٔ $\{a,c,e\}$ یک مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال است با این‌که عدد احاطه‌گری گراف $\gamma=2$ است.



نکته هر مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم، مینیمال است، ولی عکس آن درست نیست. (مانند دو مثال درس‌باکس)

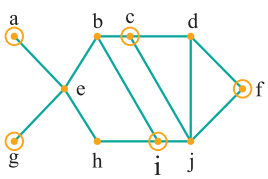
برای بررسی احاطه‌گربودن مینیمال به دو مطلب دقت می‌کنیم:

۱) مجموعه احاطه‌گر باشد.

۲) با حذف هر رأس، مجموعه باید از احاطه‌گربودن خارج شود.

پاسخ خیلی تشریحی گزینه‌ها را یکی‌یکی بررسی می‌کنیم:

گزینهٔ (۱): هیچ‌کدام از رأس‌های $\{a,g,b,c,f\}$ به h وصل نیستند؛ پس این مجموعه احاطه‌گر نیست.



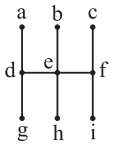
گزینهٔ (۲): با توجه به شکل، واضح است که مجموعه احاطه‌گر است، اما با حذف رأس a خودش احاطه نمی‌شود (شبیه همین g یا i یا c یا f)؛ پس هر رأسی که حذف کنیم مجموعه دیگر احاطه‌گر نیست و این مجموعه احاطه‌گر مینیمال است.

حواستان باشد: در گزینهٔ (۳)، مجموعه احاطه‌گر است، ولی با حذف رأس a مجموعهٔ به‌دست‌آمده هنوز احاطه‌گر است، پس این مجموعه مینیمال نیست.

در گزینهٔ (۴) نیز با حذف رأس h مجموعه هنوز احاطه‌گر است.

WWW.ArefOnline.ir

۳۳ گراف مقابل چند مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم دارد؟



۱) ۳

۲) ۷

۳) ۱۱

۴) ۱۵

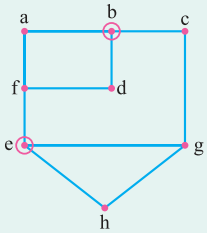
مشاوره به تفاوت تعریف‌های احاطه‌گر مینیمال و مینیمم دقت کنید. هر احاطه‌گر مینیمم، حتماً مینیمال هست، ولی برعکس آن درست نیست.

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم:

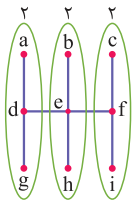
- مجموعهٔ احاطه‌گری که کم‌ترین تعداد رأس را در بین همهٔ مجموعه‌های احاطه‌گر دارد، مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم می‌گوییم؛ مثلاً در گراف مقابل رأسی وجود ندارد که به همه رأس‌های دیگر متصل باشد؛ پس مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم حداقل دو عضو دارد، اما مجموعهٔ $\{e,b\}$ کل رأس‌ها را احاطه می‌کند؛ پس این مجموعه احاطه‌گر مینیمم است.



- **عدد احاطه‌گری گراف:** تعداد عضوهای مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمم را عدد احاطه‌گری گراف گفته و با نماد $\gamma(G)$ نمایش می‌دهیم؛ مثلاً در گراف بالا $\gamma(G)=2$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که رأس‌های a,g احاطه شوند یا باید رأس d را انتخاب کنیم یا این‌که هر دوی a,g را در مجموعهٔ احاطه‌گر انتخاب کنیم؛ پس هرکدام از دایره‌ها ۲ حالت دارند که در مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال انتخاب شوند: یا رأس میانی یا دو رأس درجه‌یک.



گام دوم: $۲\times۲\times۲=۸$ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال وجود دارد، اما مجموعهٔ $\{d,e,f\}$ احاطه‌گر مینیمم است. پس ۷ مجموعهٔ احاطه‌گر مینیمال غیرمینیمم داریم.

حواستان باشد: مثلاً مجموعهٔ $\{a,g,f,b,h\}$ احاطه‌گر مینیمال است، چون هیچ رأسی از آن قابل حذف‌کردن نیست و با حذف هر رأس، مجموعه دیگر احاطه‌گر نیست. دقت دارید که این مجموعه مینیمم نیست.

WWW.ArefOnline.ir

۳۴ چند عدد ۷رقمی مضرب ۵ با ارقام ۱,۵,۳,۲,۰,۰,۰ می‌توان ساخت؟

عدد ۷رقمی فقط با همین ۷ رقم و با همین تعداد تکرار

۱) ۱۲۰
۲) ۲۴۰
۳) ۳۰۰
۴) ۳۶۰

مشاوره از فصل سوم درس گسسته، ۳ سؤال در کنکور مطرح می‌شود. هر چند احتمال طرح سؤال از بحث جایگشت باتکرار، کم‌تر از بقیهٔ مباحث است، ولی سؤالی مشابه این به صورت مستقیم یا در قالب احتمال ممکن است مطرح شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint رقم یکان باید صفر یا ۵ باشد.

درس Box

جایگشت با اشیای دارای تکرار:

قضیهٔ جایگشت باتکرار: اگر n شیء داشته باشیم، به طوری که n_1 تای آن‌ها از نوع اول و یکسان و n_2 تای آن‌ها از نوع دوم و یکسان و ... و n_k تای آن‌ها از نوع kام و یکسان باشند، در این صورت تعداد کل جایگشت‌های این اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \cdots \times n_k!}$$

مثلاً تعداد اعداد ۹رقمی با ارقام ۵، ۴، ۴، ۲، ۳، ۲، ۲، ۱ و ۱ برابر است با:

$$\frac{9!}{2! \times 3! \times 2!}$$

(تعداد چهارها) (تعداد دوها) (تعداد یک‌ها)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: عددی مضرب ۵ است که رقم یکان آن صفر یا ۵ باشد؛ پس دو حالت در نظر می‌گیریم:

گام دوم: رقم یکان ۵ باشد:

$$A = \{1,2,3\} \times _ \times _ \times _ \times _ \times \underbrace{1}_{\{5\}}$$

$_ \times _ \times _ \times _$ → جایگشت ۰,۰,۰,و دو رقم از A $= \frac{5!}{3!} = 20$ (سه رقم صفر)

پس تعداد اعداد در این حالت برابر $20 \times 3 = 60$ می‌شود.

گام سوم: رقم یکان صفر باشد:

$$A = \{1,5,3,2\} \times _ \times _ \times _ \times _ \times \underbrace{1}_{\{0\}}$$

$_ \times _ \times _ \times _$ → جایگشت ۰,و سه رقم از A $= \frac{5!}{2!} = 60$

پس تعداد اعداد در این حالت برابر $60 \times 4 = 240$ می‌شود.

گام چهارم: طبق اصل جمع تعداد اعداد مطلوب برابر $240 + 60 = 300$ تا می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

۳۵ به چند طریق می‌توان از بین ۳ نوع گل مریم، لاله و شقایق، ۸ شاخه گل انتخاب کرد، به طوری که از گل مریم لااقل ۲ شاخه و از بقیهٔ گل‌ها حداقل یک شاخه انتخاب کرده باشیم؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۵

۳) ۱۸ ۴) ۲۱

مشاوره کتاب درسی چند تعبیر از معادلهٔ سیالهٔ خطی (مثل توزیع اشیای یکسان بین n نفر و انتخاب n شاخه از k نوع گل) مطرح کرده است که خیلی مهم است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۸$ را با شرایط $x_۱\geq ۲$ و $x_۲\geq ۱$ و $x_۳\geq ۱$ حل کنید.

درس Box

تعداد جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ سیالهٔ خطی:

معادله	تعداد جواب‌های صحیح نامنفی	تعبیر
$\underbrace{x_۱+x_۲+\cdots+x_k}_{k\text{ تا متغیر}}=n$	$\binom{n+k-۱}{k-۱}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع
$\begin{cases}x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n\\x_۱\geq a\end{cases}$	$\binom{n+k-۱-a}{k-۱}$	اگر متغیری شرط بزرگ‌تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد آن را از n کم می‌کنیم.
$\begin{cases}x_۱+x_۲+\cdots+x_k=n\\x_i\geq ۱,\ i=۱,۲,\ldots,n\end{cases}$	$\binom{n-۱}{k-۱}$	جواب‌های طبیعی معادله

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تعداد گل‌های مریم، لاله و شقایق را به ترتیب $x_۱$، $x_۲$ و $x_۳$ در نظر می‌گیریم؛ چون می‌خواهیم ۸ شاخه انتخاب کنیم، پس $x_۱+x_۲+x_۳=۸$.

گام دوم: $x_۱\geq ۲$، $x_۲\geq ۱$ و $x_۳\geq ۱$ باید باشد، پس ابتدا ۲ شاخه گل مریم، ۱ شاخه گل لاله و ۱ شاخه گل شقایق انتخاب می‌کنیم تا شرایط بزرگ‌تر یا مساوی رعایت گردد؛ پس $۸-۴=۴$ شاخه گل دیگر از بین سه نوع گل باید انتخاب کنیم (به زبان دیگر کافی است جواب‌های صحیح نامنفی معادلهٔ $x_۱+x_۲+x_۳=۴$ را پیدا کنیم).

گام سوم:

$$\text{تعداد جواب‌های صحیح نامنفی}=\binom{۴+۳-۱}{۳-۱}=\binom{۶}{۲}=\frac{۶\times ۵}{۲}=۱۵$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۶ معادلهٔ $x_1 + x_2 + \frac{۶}{\sqrt{x_3}} = ۱۰$ چند جواب طبیعی دارد؟

هیچ‌کدام از متغیرها صفر نیست.

۱) ۲۰
۲) ۲۲
۳) ۲۴
۴) ۲۶

مشاوره از بحث تعداد جواب‌های معادلهٔ سیالهٔ خطی معمولاً یک سؤال در کنکور می‌آید که با توجه به حجم کم آن خیلی خوب است و ارزش سرمایه‌گذاری دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint x_3 را حالت‌بندی کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: برای این‌که معادله به معادلهٔ سیالهٔ خطی با ضرایب واحد تبدیل گردد، باید متغیر خاص یعنی x_3 را حالت‌بندی کنیم.

گام دوم: چون دنبال جواب‌های طبیعی معادله هستیم، x_3 باید مربع کامل و عدد $\frac{۶}{\sqrt{x_3}}$ نیز باید طبیعی باشد؛ پس حالت‌های زیر را داریم:

$$x_3 = ۱ \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{۶}{۱} = ۱۰ \Rightarrow x_1 + x_2 = ۴ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۴-۱}{۲-۱} = \binom{۳}{۱} = ۳$$

$$x_3 = ۴ \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{۶}{۲} = ۱۰ \Rightarrow x_1 + x_2 = ۷ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۷-۱}{۲-۱} = \binom{۶}{۱} = ۶$$

$$x_3 = ۹ \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{۶}{۳} = ۱۰ \Rightarrow x_1 + x_2 = ۸ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۸-۱}{۲-۱} = \binom{۷}{۱} = ۷$$

$$x_3 = ۳۶ \Rightarrow x_1 + x_2 + \frac{۶}{۶} = ۱۰ \Rightarrow x_1 + x_2 = ۹ \Rightarrow \text{تعداد جواب‌های طبیعی} = \binom{۹-۱}{۲-۱} = \binom{۸}{۱} = ۸$$

گام سوم: معادله ۲۴ = ۸ + ۷ + ۶ + ۳ جواب طبیعی دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۳۷ دو مربع لاتین ۳×۳ به تصادف انتخاب می‌کنیم. با کدام احتمال این دو مربع لاتین متعامدند؟

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۶}$ ۳) $\frac{۵}{۱۱}$ ۴) $\frac{۶}{۱۱}$

مشاوره ساختار مربع‌های لاتین متعامد ۳×۳ بسیار بسیار مهم است. حتماً درس‌نامه را مطالعه کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) **مربع‌های لاتین متعامد:**

دو مربع لاتین متعامد: A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه هستند. از کنار هم قراردادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانهٔ آن شامل یک عدد دورقمی است که رقم سمت چپ مربوط به A و رقم سمت راست مربوط به B است (یا برعکس). اگر هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع جدید تکرار نشده باشند، می‌گوییم A و B متعامد هستند.

۱	۲	۳	۴
۳	۴	۱	۲
۲	۱	۴	۳
۴	۳	۲	۱

۲	۳	۴	۱
۳	۲	۱	۴
۴	۱	۲	۳
۱	۴	۳	۲

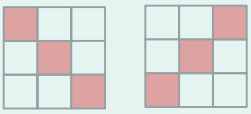
مثلاً دو مربع لاتین بالا متعامد نیستند، چون اگر این دوتا را کنار هم قرار دهیم، مربع مقابل به دست می‌آید. همین که دو عدد دورقمی تکراری (مثل ۴۲) داریم، یعنی آن دو مربع لاتین متعامد نیستند.

۲۱	۳۲	۴۳	۱۴
۳۳	۲۴	۱۱	۴۲
۴۲	۱۱	۲۴	۳۳
۱۴	۴۳	۳۲	۲۱

قضیه: اگر $n=۱,۲,۶$ باشد، دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود ندارد، ولی به ازای سایر اعداد طبیعی n یعنی $n\neq ۱,۲,۶$ دو مربع لاتین متعامد از مرتبهٔ n وجود دارد.

۲) **ساختار مربع‌های لاتین متعامد ۳×۳:**

می‌توانیم ثابت کنیم تعداد ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ وجود دارد. این‌ها را می‌توانیم به دو گروه ۶تایی (گروه A و گروه B) تقسیم کنیم:



گروه A= روی قطر فرعی یکسان (۶تا) گروه B= روی قطر اصلی یکسان (۶تا)

مثلاً دو مربع مقابل:

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

نکته

۱) هیچ‌کدام از مربع‌های یک گروه با خودشان متعامد نیستند، ولی با مربع‌های گروه دیگر متعامد هستند.

۲) برای هر مربع لاتین ۳×۳ تعداد ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ۱۲ مربع لاتین ۳×۳ داریم، پس به $\binom{۱۲}{۲}=\frac{۱۲\times ۱۱}{۲}=۶۶$ روش می‌توانیم دوتا از آن‌ها انتخاب کنیم $(n(S)=۶۶)$.

گام دوم: برای این‌که دو مربع لاتین متعامد باشند، طبق نکات درس‌باکس باید یک مربع از گروه A (به $\binom{۶}{۱}=۶$ روش) و یک مربع از گروه B (به $\binom{۶}{۱}=۶$ روش) انتخاب کنیم، پس در $۶\times ۶=۳۶$ حالت ممکن است دو مربع لاتین متعامد باشند $(n(A)=۳۶)$.

گام سوم:

$$P(A)=\frac{n(A)}{n(S)}=\frac{۳۶}{۶۶}=\frac{۶}{۱۱}$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۸ چند عدد طبیعی n کوچک‌تر یا مساوی ۳۰۰ وجود دارد، به طوری که $(n,12)\neq 1$ و $(n,25)=1$؟

n عامل ۵ ندارد.

n عامل ۲ یا ۳ دارد.

۱) ۱۲۰
۲) ۱۴۰
۳) ۱۶۰
۴) ۱۸۰

مشاوره اصل شمول از مباحث دیگر فصل سوم مقداری دشوارتر است. البته این بحث تیپ‌های مشخص دارد (مثل مدل بخش‌پذیری یا تابع پوشا) که اگر قرار باشد سؤال بیاید، معمولاً یکی از آن‌ها می‌آید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

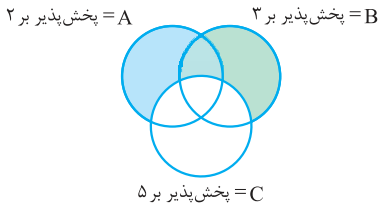
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ب.م.م n و $12=2^2\times 3$ بزرگ‌تر از یک است، پس عدد n باید بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

گام دوم: $(n,25)=1$، پس n نباید عامل ۵ داشته باشد (چون در این صورت ب.م.م بزرگ‌تر از یک می‌شود).

گام سوم: باید اعداد طبیعی $n\leq 300$ را طوری به دست آوریم که n بر ۲ یا بر ۳ بخش‌پذیر باشد، ولی بر ۵ بخش‌پذیر نباشد.

گام چهارم: ناحیهٔ مطلوب را می‌توانیم اجتماع دو ناحیهٔ آبی‌رنگ $(A-C)$ و سبزرنگ $(B-C)$ در نظر بگیریم. البته قسمت $(A\cap B)-C$ را دو بار شمردیم که باید یک بار آن را کم کنیم:



گام پنجم:

$$\text{ناحیهٔ آبی‌رنگ} = |A-C| = |A| - |\overbrace{A\cap C}^{\text{بر ۲ و بر ۵ (یعنی ۱۰) بخش‌پذیر}}| = [\tfrac{300}{2}] - [\tfrac{300}{10}] = 150-30 = 120$$

$$\text{ناحیهٔ سبزرنگ} = |B-C| = |B| - |B\cap C| = [\tfrac{300}{3}] - [\tfrac{300}{15}] = 100-20 = 80$$

$$\text{ناحیهٔ مشترک هر دو رنگ} = |(A\cap B)-C| = |A\cap B| - |A\cap B\cap C| = [\tfrac{300}{6}] - [\tfrac{300}{30}] = 50-10 = 40$$

گام ششم:

$$|(A\cup B)-C| = 120+80-40 = 160$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۹ ۱۲۰ تابع یک‌به‌یک از مجموعهٔ nعضوی A به مجموعهٔ ۶عضوی B وجود دارد. چند تابع پوشا از B به A وجود دارد؟

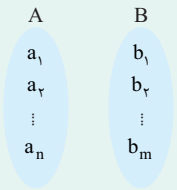
۱) ۱۵۰ ۲) ۵۴۰ ۳) ۷۲۹ ۴) ۲۱۰

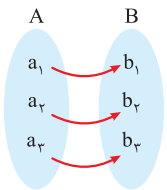
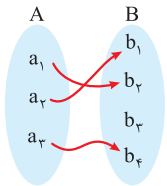
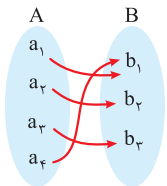
پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) تعریف تابع و انواع آن:

مجموعهٔ nعضوی A و مجموعهٔ mعضوی B را در نظر بگیرید:



	تعریف	مثال
تابع	هر عضو A فقط به یکی از عضوهای B نظیر می‌شود؛ به زبان دیگر از هیچ عضو A دو فلش به دو عدد مختلف نرفته باشد.	
تابع یک‌به‌یک	تابعی یک‌به‌یک است که هر عضو A دقیقاً به یک عضو منحصربه‌فرد از B نظیر شود، یعنی دوتا عضو از A به یک عضو B نظیر نشوند؛ به زبان دیگر به هیچ عضو B دوتا فلش وارد نشده باشد.	
تابع پوشا	به همهٔ عضوهای B فلش وارد شود؛ به زبان دیگر برد تابع برابر B باشد.	

۲) توزیع اشیا و تابع‌ها:

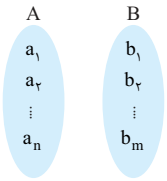
توزیع n شیء بین k نفر

- اشیای یکسان ← جواب‌های معادلهٔ $x_1+\cdots+x_k=n$
  - کل جواب‌های صحیح نامنفی $=\binom{n+k-1}{k-1}$
  - جواب‌های طبیعی (به هر نفر حداقل یک شیء برسد) $=\binom{n-1}{k-1}$
- اشیای متمایز ← تعداد تابع‌ها از مجموعهٔ nعضوی اشیاء به kعضوی افراد
  - کل جواب‌ها (تعداد کل توابع) $=k^n$ (دومی به توان اولی)
  - به هر نفر حداکثر یک شیء برسد. (تابع‌های یک‌به‌یک) $(k\geq n)$ $P(k,n)=\frac{k!}{(k-n)!}$
  - به هر نفر حداقل یک شیء برسد. (تابع‌های پوشا) $(k\leq n)$
    - از nعضوی به دوعضوی: 2^n-2
    - از nعضوی به ۳عضوی: $3^n-3\times 2^n+3$

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: تعداد تابع‌های یک‌به‌یک از مجموعهٔ n عضوی A به ۶ عضوی B برابر است با $P(6,n)$، پس:



$$P(6,n)=120 \Rightarrow \frac{6!}{(6-n)!}=120 \Rightarrow \frac{6\times 5!}{(6-n)!}=120 \Rightarrow 6=(6-n)! \Rightarrow n=3$$

(با استفاده از اصل ضرب هم می‌توانستیم تعداد تابع‌های یک‌به‌یک را به دست آوریم. برای a_1، ۶ حالت برای a_2، ۵ حالت و برای a_3، ۴ حالت باقی می‌ماند. اگر مجموعهٔ A دارای ۳ عضو باشد، تعداد تابع‌های یک‌به‌یک برابر $6\times5\times4=120$ می‌شود.)

گام دوم: تعداد تابع‌های پوشا از مجموعهٔ ۶ عضوی B به ۳ عضوی A (طبق درس‌باکس) برابر است با:

$$3^6-3\times2^6+3=729-192+3=540$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۰ حداکثر چند عدد از مجموعهٔ $\{۱۰,۱۱,۱۲,\ldots,۳۱\}$ می‌توانیم انتخاب کنیم به طوری که تفاضل هیچ دو عدد انتخابی، برابر ۱۵ نشود؟

آن تعدادی که اگر یکی بیشتر از آن برداریم قطعاً تفاضل دو عدد، ۱۵ بشود.

۱) ۱۵ ۲) ۱۶ ۳) ۱۷ ۴) ۱۸

مشاوره سؤال بسیار مهم مشابه تمرین کتاب که بارها و بارها در کنکور آمده است حتی در دی ۱۴۰۱.
درس‌باکس را به دقت مطالعه کنید تا روی این تیپ مسلط شوید!

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

روش جفت‌سازی در حل مسئله‌های اصل لانه‌کبوتری:

در برخی از مسئله‌های اصل لانه‌کبوتری باید اثبات کنیم که اگر حداقل فلان تعداد انتخاب کنیم دو عدد با ویژگی مورد نظر (مثلاً جمع خاص) در بین اعداد وجود دارد. روش این‌جوری است که اعداد را دوتا دوتا که همان ویژگی را دارند دسته‌بندی می‌کنیم؛ البته ممکن است برخی اعداد جفتی نداشته باشند و تک‌عضوی باقی بمانند که هر کدام از آن‌ها را یک دسته در نظر می‌گیریم.

اگر یکی بیشتر از تعداد دسته‌ها (لانه‌ها) برداریم، مطمئن هستیم که دو عدد با همان ویژگی در بین اعداد انتخابی وجود دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: اعداد را دوتا دوتا جوری دسته‌بندی می‌کنیم که تفاضل آن‌ها برابر ۱۵ شود، البته برخی اعداد ممکن است تک‌عضوی باقی بمانند:

$\{۱۰,۲۵\},\{۱۱,۲۶\},\{۱۲,۲۷\},\{۱۳,۲۸\},\{۱۴,۲۹\},\{۱۵,۳۰\},\{۱۶,۳۱\}$

$\{۱۷\}\{۱۸\}\{۱۹\}\{۲۰\}\{۲۱\}\{۲۲\}\{۲۳\}\{۲۴\}$

گام دوم: ۱۵ دسته (لانه) داریم، پس اگر ۱۶تا انتخاب کنیم (طبق اصل لانه‌کبوتری) مطمئن هستیم از یکی از مجموعه‌ها هر دو انتخاب‌شده که تفاضل آن‌ها برابر ۱۵ می‌شود، ولی با حداکثر ۱۵تا نمی‌توانیم مطمئن باشیم. این یعنی می‌توانیم حداکثر ۱۵ عدد انتخاب کنیم به طوری که تفاضل هیچ دوتایی از آن‌ها برابر ۱۵ نشود.

WWW.ArefOnline.ir

۴۱ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای روی محور x و حول مبدأ در حال نوسان است. کدام‌یک از عبارت‌های زیر دربارهٔ این نوسانگر درست است؟

عبور از مبدأ (نقطهٔ تعادل)

الف) در لحظه‌ای که جهت نیروی خالص وارد بر نوسانگر تغییر می‌کند، اندازهٔ تکانهٔ آن بیشینه است.

دور شدن از نقطهٔ تعادل

ب) در بازهٔ زمانی‌ای که انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر در حال افزایش است، اندازهٔ شتاب آن کاهش می‌یابد.

پ) هنگامی که نوسانگر در حال دورشدن از نقطهٔ تعادل است، انرژی جنبشی آن کاهش می‌یابد.

مبدأ (نقطهٔ تعادل)

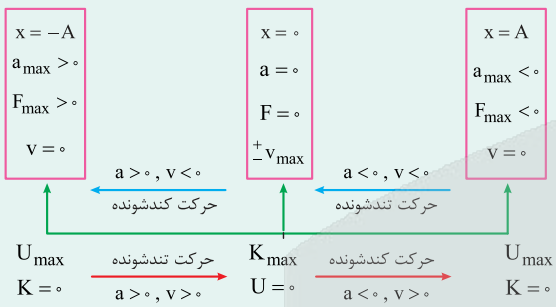
ت) در لحظه‌ای که اندازهٔ تکانهٔ نوسانگر بیشینه است، جهت حرکت نوسانگر تغییر می‌کند.

۱) الف ـ ب ۲) الف ـ پ ۳) ب ـ ت ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

بررسی وضعیت کمیت‌ها در یک نوسان کامل:



پاسخ خیلی تشریحی ✔

همهٔ عبارت‌ها را مورد بررسی قرار می‌دهیم:

الف) درست؛ با عبور نوسانگر از مرکز نوسان (نقطهٔ تعادل)، جهت نیروی خالص تغییر می‌کند که در این لحظه اندازهٔ سرعت و تکانه بیشینه است.

ب) نادرست؛ زمانی که نوسانگر به نقاط بازگشت $(x = \pm A)$ نزدیک می‌شود، انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر افزایش می‌یابد، هم‌چنین طبق رابطهٔ $a = -\omega^2 x$ با دورشدن از مرکز نوسان اندازهٔ شتاب نیز افزایش می‌یابد.

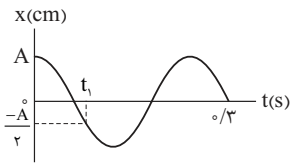
پ) درست؛ زمانی که نوسانگر از نقطهٔ تعادل $(x = ۰)$ دور می‌شود، تندی نوسانگر در حال کاهش است؛ بنابراین انرژی جنبشی هم در حال کاهش است.

ت) نادرست؛ اندازهٔ تکانهٔ نوسانگر مانند تندی، زمانی بیشینه است که نوسانگر از وضع تعادل عبور کند؛ در این نقطه جهت حرکت تغییر نمی‌کند.

با توجه به بررسی عبارت‌ها، گزینهٔ (۲) صحیح است.

WWW.ArefOnline.ir

۴۲ نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای به شکل زیر است. لحظهٔ t_1 برحسب ثانیه کدام است؟

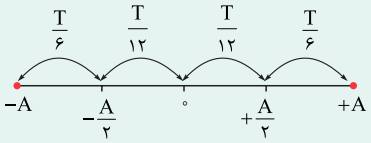


۱) ۰/۰۴
۲) ۰/۰۸
۳) ۰/۰۶
۴) ۰/۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۲

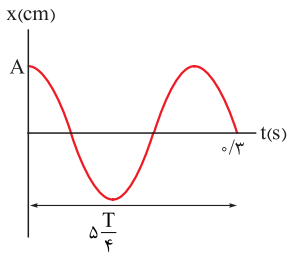
درس Box

با استفاده از معادلهٔ $x = A\cos(\omega t)$ می‌توان نشان داد که نوسانگر ساده حد فاصل $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ را در مدت $\frac{T}{6}$ و فاصلهٔ $+\frac{A}{2}$ تا مبدأ را در مدت $\frac{T}{12}$ طی می‌کند. در شکل روبه‌رو این جابه‌جایی‌ها و زمان‌ها مشخص شده است:



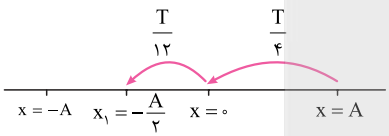
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به نمودار مکان ـ زمان نوسانگر، دورهٔ تناوب را به دست می‌آوریم:



$$\frac{5T}{4} = ۰/۳ \Rightarrow T = \frac{۱/۲}{۵} = ۰/۲۴\ s$$

گام دوم: مدت‌زمان لازم برای رسیدن نوسانگر تا $x = -۲\ cm$ را به دست می‌آوریم:



$$t_1 = \frac{T}{4} + \frac{T}{12} = \frac{T}{3} = \frac{۰/۲۴}{۳} = ۰/۰۸\ s$$

تیزبازی با توجه به نمودار داده‌شده در سؤال باید:

$$۰/۰۶ < t_1 < ۰/۱۲$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۳ نوسانگری روی محور x و حول مبدأ با دامنهٔ ۵ cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. این نوسانگر در هر دقیقه ۳۰ بار پاره‌خط نوسان را طی می‌کند. در لحظهٔ t_1 نوسانگر از مکان $x_1 = +3\ cm$ عبور کرده و انرژی پتانسیل کشسانی آن در حال افزایش است. در بازهٔ زمانی t_1 تا $t_2 = t_1 + 2$ (برحسب ثانیه) به ترتیب بزرگی سرعت متوسط و تندی متوسط نوسانگر چند سانتی‌متر بر ثانیه هستند؟

در حال نزدیک‌شدن به نقطهٔ بازگشت است.

۱۵ نوسان کامل انجام می‌دهد.

۱) صفر ـ ۵

۲) صفر ـ ۱۰

۳) ۳ ـ ۵

۴) ۳ ـ ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint

با استفاده از رابطهٔ $T \times N = \Delta t$، دورهٔ تناوب نوسانگر را به دست آورید، سپس وضعیت نوسانگر را از لحظهٔ t_1 تا t_2 دنبال کنید تا در نهایت سرعت متوسط و تندی متوسط را به دست آورید.

درس Box

۱) در حرکت هماهنگ ساده با دامنهٔ نوسان A و دورهٔ تناوب T، مسافتی که نوسانگر در بازهٔ $\Delta t = n\frac{T}{2}$ طی می‌کند، برابر (۲nA) است. تفاوت ندارد مکان ابتدایی نوسانگر در کجای پاره‌خط نوسان باشد.

$$\Delta t = \frac{T}{2} \Rightarrow \ell = 2A$$

$$\Delta t = 2(\frac{T}{2}) = T \Rightarrow \ell = 2 \times 2A = 4A \qquad n = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

۲) **تندی متوسط**: نسبت مسافت پیموده‌شده به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

تندی متوسط (m/s) ↑

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

ℓ ← مسافت پیموده‌شده (m)

Δt ← مدت‌زمان (s)

۳) **سرعت متوسط**: نسبت جابه‌جایی به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

سرعت متوسط (m/s) ↑

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$$

Δx ← جابه‌جایی (m)

Δt ← مدت‌زمان (s)

۴) معادلهٔ مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی مسیری مستقیم حرکت می‌کند، به صورت زیر است:

زمان (s) ↑ — مکان اولیهٔ متحرک (m) ↑

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \Rightarrow \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

x: مکان متحرک (m) — a: شتاب متحرک (m/s^2) — v_0: سرعت اولیهٔ متحرک (m/s) — Δx: جابه‌جایی متحرک (m)

۵) معادلهٔ جابه‌جایی زمان به شکل مستقل از سرعت اولیه:

$$\Delta x = -\frac{1}{2}at^2 + vt$$

v: سرعت متحرک در لحظهٔ t $(\frac{m}{s})$

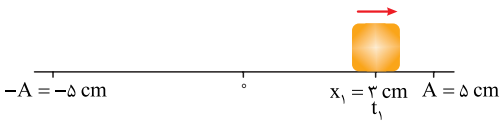
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: نوسانگر در هر دقیقه (۶۰ s)، ۳۰ بار پاره‌خط نوسان را طی می‌کند به عبارتی ۱۵ نوسان کامل انجام می‌دهد؛ بنابراین دورهٔ تناوب برابر است با:

$$T \times N = \Delta t \xrightarrow{N=15,\ \Delta t=60\ s} T \times 15 = 60 \Rightarrow T = 4\ s$$

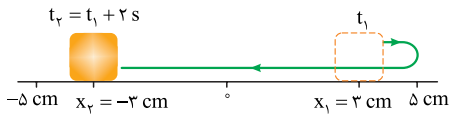
WWW.ArefOnline.ir

گام دوم: مکان و جهت حرکت نوسانگر را در لحظهٔ t_1 مشخص می‌کنیم. انرژی پتانسیل کشسانی نوسانگر در حال افزایش است، پس نوسانگر به نقطهٔ بازگشت نزدیک می‌شود:



گام سوم: مکان نوسانگر را در لحظهٔ t_2 مشخص می‌کنیم.

از آن‌جا که $\Delta t = \frac{T}{2} = 2\ s$ است، نوسانگر در مدت $\Delta t = 2\ s$ مسافتی به اندازهٔ $2A$ را طی خواهد کرد:



گام چهارم: سرعت متوسط و تندی متوسط را به دست می‌آوریم:

$$v_{av} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{(-3) - (3)}{2} = -3\ cm/s \Rightarrow |v_{av}| = 3\ cm/s$$

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{2A}{(\frac{T}{2})} = \frac{2 \times 5}{2} = 5\ cm/s$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۴ دامنهٔ نوسانگر هماهنگ ساده‌ای برابر A است. نوسانگر در لحظهٔ t_1 به صورت کندشونده از مکان $x_1 = \frac{A}{2}$ و پس از یک بار عبور از مبدأ، در لحظهٔ t_2 به صورت تندشونده از مکان $x_2 = -\frac{A}{2}$ عبور می‌کند. تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 چند برابر تندی بیشینهٔ آن در این مدت است؟ (نوسانگر بر روی محور x و حول مبدأ نوسان می‌کند.)

به مرکز نوسان نزدیک می‌شود.

به سمت نقاط بازگشت حرکت می‌کند.

۱) $\frac{۹}{۵\pi}$

۲) $\frac{۹}{۴\pi}$

۳) $\frac{۲}{\pi}$

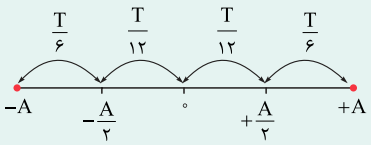
۴) $\frac{۳}{\pi}$

مشاوره در سؤالات هماهنگ ساده‌ای، که حرف از مکان و زمان شده است یکی از بهترین کارها رسم نمودار مکان ـ زمان نوسانگر یا مشخص‌کردن مکان جسم بر روی محور مکان است تا به راحتی بتوانیم مسیر حرکت و وضعیت جسم را مشخص کنیم.

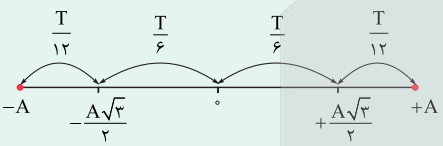
پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

- با استفاده از معادلهٔ $x = A\cos(\omega t)$ می‌توان نشان داد که نوسانگر ساده حد فاصل $+A$ تا $+\frac{A}{2}$ را در مدت $\frac{T}{۶}$ و فاصلهٔ $\frac{A}{2}+$ تا مبدأ را در مدت $\frac{T}{۱۲}$ طی می‌کند. در شکل زیر این جابه‌جایی‌ها و زمان‌ها مشخص شده است:

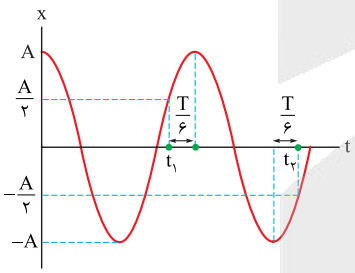


- نوسانگر هماهنگ ساده مسافت $+A$ تا $+\frac{A\sqrt{۳}}{2}$ را در مدت‌زمان $\frac{T}{۱۲}$ و فاصلهٔ $\frac{A\sqrt{۳}}{2}$ تا مبدأ را در مدت‌زمان $\frac{T}{۶}$ طی می‌کند، در شکل زیر این جابه‌جایی‌ها مشخص شده است.



پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل مقابل، نمودار مکان ـ زمان نوسانگر هماهنگ ساده‌ای با دامنهٔ A را نمایش می‌دهد. زمانی که متحرک به سمت نقاط بازگشت $(x = \pm A)$ حرکت می‌کند، حرکت از نوع کندشونده و زمانی که متحرک به سمت مرکز نوسان $(x = ۰)$ حرکت می‌کند، حرکت از نوع تندشونده است. ابتدا لحظهٔ t_1 و سپس لحظهٔ t_2 را که بلافاصله بعد از آن رخ داده است، مشخص می‌کنیم:



گام دوم: تندی متوسط نوسانگر را در بازهٔ t_1 تا t_2 به دست می‌آوریم:

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{\frac{A}{2}+A+A+\frac{A}{2}}{\frac{T}{۶}+\frac{T}{۲}+\frac{T}{۶}} = \frac{۳A}{\frac{۵T}{۶}} = \frac{۱۸}{۵}\frac{A}{T}$$

گام سوم: نسبت تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2 را به تندی بیشینه $(v_{max} = A\omega)$ محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{s_{av}}{v_{max}} = \frac{\frac{۱۸}{۵}\frac{A}{T}}{A\times\frac{۲\pi}{T}} = \frac{۱۸}{۱۰\pi} = \frac{۹}{۵\pi}$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۵ در شکل زیر، نوسانگر ساده‌ای روی محور x حول نقطهٔ O حرکت می‌کند. در جابه‌جایی نوسانگر از نقطهٔ M تا نقطهٔ N، انرژی پتانسیل نوسانگر ۸۰ درصد کاهش و انرژی جنبشی آن ۴۰ درصد افزایش می‌یابد. تندی نوسانگر در نقطهٔ M چند برابر تندی بیشینهٔ آن است؟



$v_{max} = A\omega$

$U_N = ۰/۲U_M$
$K_N = ۱/۴K_M$

۱) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\frac{\pi}{۳}$
۴) $\sqrt{\frac{۲}{۳}}$

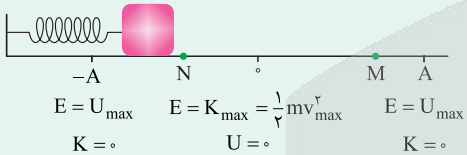
پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint

انرژی مکانیکی در نقطهٔ M و نقطهٔ N با هم برابر است. با توجه به رابطهٔ بین انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی نقاط M و N، رابطه‌ای بین انرژی جنبشی نقطهٔ N و انرژی جنبشی مرکز نوسانگر پیدا کنید.

درس Box

انرژی پتانسیل، انرژی جنبشی و انرژی مکانیکی در حرکت هماهنگ ساده به صورت زیر می‌باشد:



$E_M = E_N \Rightarrow U_M + K_M = U_N + K_N$

$E = \frac{۱}{۲}kA^۲ = \frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲ = ۲\pi^۲ mA^۲ f^۲$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: هرچه نوسانگر به مرکز نوسان نزدیک‌تر باشد، انرژی پتانسیل آن کم‌تر و انرژی جنبشی آن بیشتر می‌شود؛ بنابراین، انرژی پتانسیل در نقطهٔ M بیشتر از نقطهٔ N است $(U_M > U_N)$ و انرژی جنبشی در نقطهٔ N بیشتر از نقطهٔ M است $(K_N > K_M)$، در نتیجه به صورت رابطهٔ ریاضی روابط زیر برقرار است:

$$U_N = U_M - \frac{۸۰}{۱۰۰}U_M = \frac{۲۰}{۱۰۰}U_M = ۰/۲U_M$$

$$K_N = K_M + \frac{۴۰}{۱۰۰}K_M = \frac{۱۴۰}{۱۰۰}K_M = ۱/۴K_M$$

گام دوم: طبق قانون پایستگی انرژی مکانیکی، $E_M = E_N$ است:

$$E_M = E_N \Rightarrow U_M + K_M = U_N + K_N \Rightarrow U_M + K_M = ۰/۲U_M + ۱/۴K_M$$

$$\Rightarrow ۰/۸U_M = ۰/۴K_M \Rightarrow U_M = \frac{K_M}{۲}$$

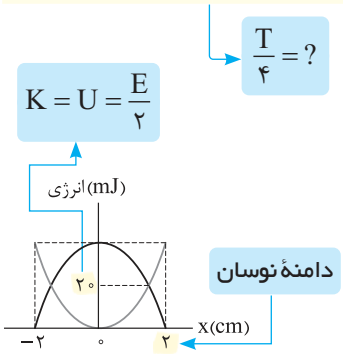
گام سوم: انرژی مکانیکی نوسانگر در طول مسیر ثابت و برابر $E = K_{max}$ است:

$$E_M = K_{max} \Rightarrow U_M + K_M = K_{max} \xrightarrow{U_M = \frac{K_M}{۲}} \frac{K_M}{۲} + K_M = K_{max}$$

$$\Rightarrow \frac{۳}{۲}K_M = K_{max} \Rightarrow \frac{۳}{۲} \times (\frac{۱}{۲}mv_M^۲) = \frac{۱}{۲}mv_{max}^۲ \Rightarrow v_M = \sqrt{\frac{۲}{۳}}v_{max}$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۶ نمودار تغییرات انرژی نوسانگر ساده‌ای برحسب مکان به شکل زیر است. اگر در لحظه‌ای که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر هستند، تندی نوسانگر $۴\pi\sqrt{۲}\ cm/s$ باشد، حداقل زمان لازم برای آن‌که انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به $۴۰\ mJ$ برسد، چند ثانیه است؟



۱) $\frac{۱}{۸}$

۲) $\frac{۱}{۴}$

۳) $\frac{۱}{۲}$

۴) ۱

مشاوره در نمودار انرژی پتانسیل و انرژی جنبشی برحسب مکان نوسانگر، مهم‌ترین نقطهٔ کلیدی برخورد این دو نمودار است، این نقطه سه ویژگی مهم دارد:

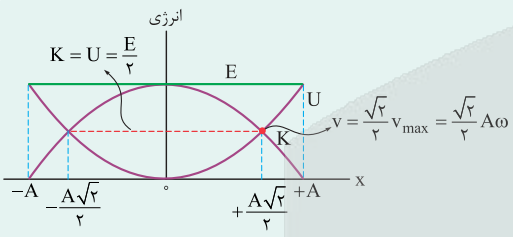
۱) مکان: $x=\pm\frac{A\sqrt{۲}}{۲}$ ۲) انرژی: $U=K=\frac{E}{۲}=\frac{K_{max}}{۲}=\frac{U_{max}}{۲}$

۳) تندی: $v=\frac{\sqrt{۲}}{۲}A\omega$

پاسخ: گزینهٔ ۱

Hint زمانی که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر است، تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر تندی بیشینه $(v_{max}=A\omega)$ است، با استفاده از تندی $۴\pi\sqrt{۲}\ cm/s$ که در صورت سؤال داده شده است و نمودار مطرح‌شده، بسامد زاویه‌ای و در نهایت دورهٔ تناوب را به دست آورید تا به خواستهٔ سؤال برسید.

درس Box **نمودار انرژی برحسب مکان نوسانگر هماهنگ ساده:**



پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** در زمانی که انرژی جنبشی و انرژی پتانسیل نوسانگر برابر می‌شوند، تندی نوسانگر $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$ برابر تندی بیشینه است؛ بنابراین داریم:

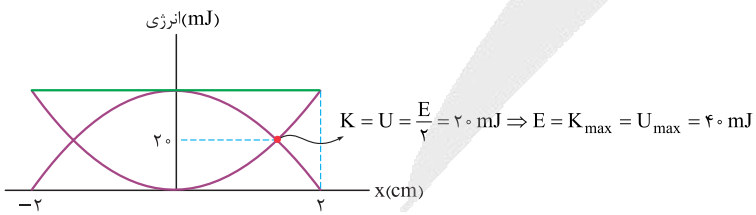
$$v=۴\pi\sqrt{۲}=\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_{max}\Rightarrow v_{max}=۸\pi\ cm/s$$

گام دوم: با توجه به نمودار تغییرات انرژی نوسانگر برحسب مکان، دامنهٔ نوسان $۲\ cm$ است؛ بنابراین بسامد زاویه‌ای و دورهٔ تناوب را به دست می‌آوریم:

$$v_{max}=۸\pi\ cm/s\xrightarrow{v_{max}=A\omega,\ A=۲\ cm}۲\times\omega=۸\pi\Rightarrow\omega=۴\pi\ rad/s$$

$$\omega=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow ۴\pi=\frac{۲\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{۱}{۲}\ s$$

گام سوم: با توجه به نمودار تغییرات انرژی نوسانگر برحسب مکان، انرژی مکانیکی نوسانگر برابر $۴۰\ mJ$ است.



گام چهارم: کم‌ترین زمان برای این‌که انرژی جنبشی از صفر به حداکثر مقدار خود $(۴۰\ mJ)$ برسد، برابر $\frac{T}{۴}$ است؛ بنابراین داریم:

$$\Delta t=\frac{T}{۴}=\frac{۱}{۸}\ s$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۷ جرم دو طناب A و B برابر و طول طناب A، ۲۸ درصد کم‌تر از طول طناب B است. اگر نیروی کشش طناب A، ۲ برابر نیروی کشش طناب B باشد، مدتی که طول می‌کشد تا موج عرضی طول طناب A را طی کند، چند برابر مدتی است که موج عرضی طول طناب B را طی می‌کند؟

۱) $\frac{۱۰}{۳}$
۲) $\frac{۳}{۱۰}$
۳) $\frac{۵}{۳}$
۴) $\frac{۳}{۵}$

$L_A = L_B - \frac{۲۸}{۱۰۰}L_B = \frac{۷۲}{۱۰۰}L_B$

مشاوره در این سؤال یکی از مواردی که ممکن است دانش‌آموزان اشتباه کنند، این است که نسبت‌ها را جابه‌جا به دست آورند به همین دلیل گزینهٔ (۳) دام تستی است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا رابطهٔ بین تندی انتشار موج دو طناب A و B را به دست آورید، سپس با داشتن نسبت تندی انتشار موج در طناب‌ها و طول طناب‌ها، نسبت مدت زمانی که موج عرضی طول طناب‌ها را طی می‌کند، به دست آورید.

درس Box

تندی انتشار موج عرضی در تار یا ریسمان یا فنر:

$v = \sqrt{\frac{F}{\mu}}$ ← نیروی کشش طناب برحسب (N)

v: تندی انتشار موج عرضی برحسب (m/s)

μ: چگالی خطی جرم (جرم واحد طول یک تار) برحسب (kg / m)

$\mu = \frac{m}{L}$ ← جرم تار برحسب (kg) / طول تار برحسب (m)

$\xrightarrow{\mu = \frac{m}{L}} v = \sqrt{\frac{FL}{m}}$

نکته اگر جبههٔ موج در مدت Δt، مسافت L را طی کند، تندی انتشار موج از رابطهٔ $v = \frac{L}{\Delta t}$ به دست می‌آید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا تندی انتشار موج در دو طناب A و B را با هم مقایسه می‌کنیم:

$$v = \sqrt{\frac{F.L}{m}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{F_A}{F_B} \times \frac{L_A}{L_B} \times \frac{m_B}{m_A}} \xrightarrow[m_A = m_B]{F_A = ۲F_B ,\ L_A = L_B - \frac{۲۸}{۱۰۰}L_B = \frac{۷۲}{۱۰۰}L_B} \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{۲}{۱} \times \frac{۷۲}{۱۰۰} \times ۱}$$

$$\Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{۱۴۴}{۱۰۰}} = ۱/۲ \Rightarrow v_A = ۱/۲ v_B$$

گام دوم: با داشتن نسبت تندی انتشار موج در طناب‌های A و B و نیز نسبت طول طناب‌ها، نسبت مدت‌زمانی که موج عرضی طول طناب‌ها را می‌پیماید به دست می‌آوریم:

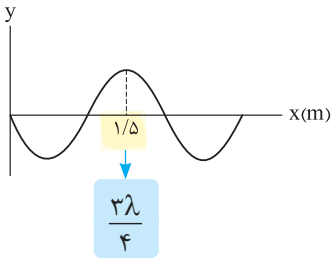
$$v = \frac{L}{\Delta t} \Rightarrow \Delta t = \frac{L}{v} \Rightarrow \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{L_A}{L_B} \times \frac{v_B}{v_A} \xrightarrow[v_A = ۱/۲ v_B]{L_A = \frac{۷۲}{۱۰۰}L_B} \frac{\Delta t_A}{\Delta t_B} = \frac{۷۲}{۱۰۰} \times \frac{۱}{۱/۲} = \frac{۳}{۵}$$

WWW.ArefOnline.ir

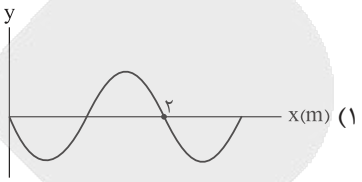
۴۸ شکل روبه‌رو تصویر لحظه‌ای موج سینوسی را در لحظهٔ t_1 نشان می‌دهد. اگر سرعت انتشار موج $(-2/5\ m/s)\vec{i}$ باشد، تصویر موج در لحظهٔ $t_2 = t_1 + 0/6\ s$ به کدام شکل است؟

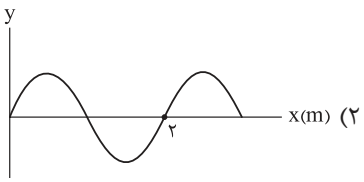
جهت انتشار به سمت چپ

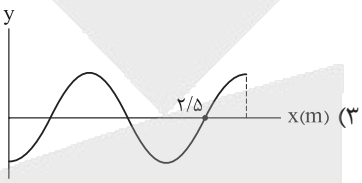
$0/6\ s$ بعد

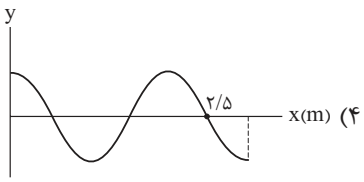


$\frac{3\lambda}{4}$

۱) 

۲) 

۳) 

۴) 

مشاوره این سؤال با کنکور تجربی خارج ۱۴۰۰ تشابه مفهومی دارد. دقت کنید که تنها با بررسی نقطهٔ مبدأ نمودار می‌توان به این سؤال پاسخ داد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا به کمک نمودار $y - x$ موج و تندی انتشار، دورهٔ تناوب را به دست آورید. سپس به کمک جهت انتشار موج، شکل موج پس از $0/6\ s$ را رسم کنید.

درس Box

اگر چشمه یا هر ذره از محیط انتشار یک موج مکانیکی، در مدت t ثانیه n نوسان کامل انجام دهد، داریم:

$$\text{دوره } (s)\ T = \frac{t}{n}$$

به برآمدگی‌های ایجادشده در موج، قله و به فرورفتگی‌های آن، دره می‌گوییم.

طول موج (λ): مسافتی که موج در مدت‌زمان یک دورهٔ تناوب چشمه طی می‌کند.

$$v = \frac{\ell}{\Delta t} \xrightarrow[\Delta t = T]{\ell = \lambda} v = \frac{\lambda}{T} \Rightarrow \lambda = vT$$

فاصلهٔ بین دو برآمدگی (قله) مجاور یا دو فرورفتگی (دره) مجاور برابر با طول موج و فاصلهٔ یک قله از درهٔ مجاور برابر با نصف طول موج است.

تندی متوسط: نسبت مسافت پیموده‌شده به مدت‌زمان حرکت است و از رابطهٔ زیر محاسبه می‌شود:

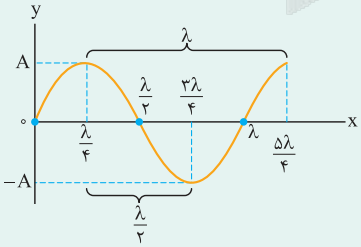
تندی متوسط (m/s)

$$s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t}$$

ℓ: مسافت پیموده‌شده (m)

Δt: مدت‌زمان (s)

نقش موج: شکل موج (طناب یا فنر یا ...) در هر لحظهٔ انتشار موج



فاصلهٔ دو قلهٔ مجاور $= \lambda$

فاصلهٔ دو درهٔ مجاور $= \lambda$

فاصلهٔ یک قله از درهٔ مجاور $= \frac{\lambda}{2}$

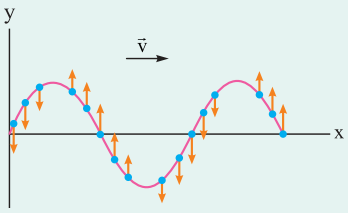
فاصلهٔ یک قله یا دره از نقطهٔ تعادل مجاور $= \frac{\lambda}{4}$

بیشینهٔ تندی ذرات محیط در نقطهٔ تعادل بوده و برابر است با:

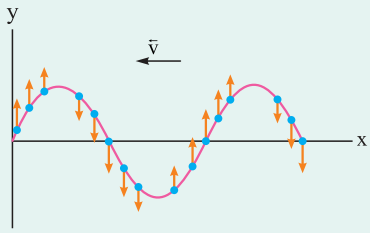
$$v_{max} = A\omega$$

WWW.Aref Online.ir

تعیین جهت حرکت ذرات، در محیط انتشار موج عرضی:



اگر موج روی محور x به سمت راست حرکت کند، آشفتگی‌ها از سمت چپ به راست حرکت می‌کنند، یعنی هر ذره از محیط با گذشت زمان، وضعیت مشابه با نقاط سمت چپ خود را خواهد داشت.



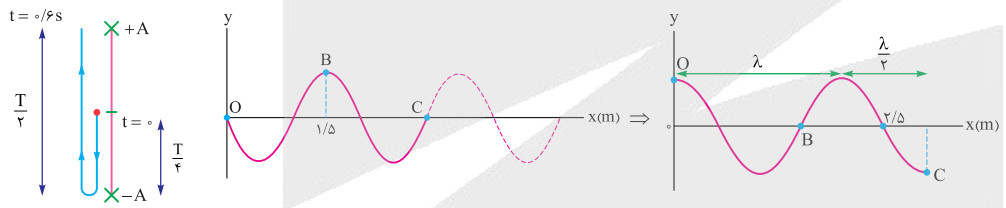
اگر موج روی محور x به سمت چپ حرکت کند، آشفتگی‌ها از سمت راست به چپ حرکت می‌کنند، یعنی هر ذره از محیط با گذشت زمان، وضعیت مشابه با نقاط سمت راست خود را خواهد داشت.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا به کمک نمودار x ـ y موج و تندی انتشار موج، دورهٔ تناوب را به دست می‌آوریم:

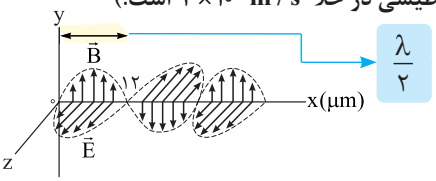
$$\lambda = vT \Rightarrow T = \frac{\lambda}{v} \xrightarrow[v=۲/۵\ m/s]{\frac{۳\lambda}{۴}=۱/۵\ m \Rightarrow \lambda=۲\ m} T = \frac{۲}{۲/۵} = ۰/۸\ s$$

گام دوم: با توجه به این‌که مدت‌زمان $۰/۶\ s$ معادل $۳\frac{T}{۴}$ است و جهت انتشار موج در خلاف جهت محور x است، باید وضعیت مبدأ (نقطهٔ O) پس از گذشت $\frac{۳T}{۴}$، معلوم شود. (دقت کنید که حرکت آشفتگی از سمت راست به چپ است، پس ذرهٔ مبدأ باید شبیه ذره‌های سمت راست خود شود.)



WWW.ArefOnline.ir

۴۹ تصویر یک موج الکترومغناطیسی که در خلأ منتشر می‌شود در لحظه‌ای معین به شکل زیر است. بسامد این موج چند هرتز و جهت انتشار آن کدام است؟ (تندی انتشار موج الکترومغناطیسی در خلأ $۳\times۱۰^{۸}\ m/s$ است.)



۱) $۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$، در جهت محور x

۲) $۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}$، در خلاف جهت محور x

۳) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$، در جهت محور x

۴) $۲/۵\times۱۰^{۱۳}$، در خلاف جهت محور x

مشاوره این سؤال با کنکور ریاضی داخل ۹۷ تشابه مفهومی دارد. قاعدهٔ دست راست برای تعیین جهت انتشار موج الکترومغناطیسی موضوع مهمی برای طرح سؤال است.

پاسخ: گزینهٔ ۲

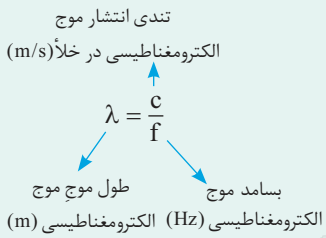
Hint ابتدا با توجه به نمودار موج الکترومغناطیسی، طول موج را به دست آورید. سپس به کمک تندی انتشار موج، بسامد را به دست آورید. از طرفی به کمک قاعدهٔ دست راست جهت انتشار موج را به دست آورید.

درس Box

امواج الکترومغناطیسی

امواجی که از رابطهٔ متقابل میدان‌های الکتریکی و مغناطیسی و تغییرات هم‌زمان این دو میدان به وجود می‌آیند.

رابطهٔ بین طول موج، بسامد و تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی به صورت زیر است:



جهت انتشار موج الکترومغناطیسی

به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را به دست می‌آوریم:

چهار انگشت دست راست را طوری در جهت میدان الکتریکی $(\vec{E})$ قرار می‌دهیم که میدان مغناطیسی $(\vec{B})$ از کف دست خارج شود. در این حالت شست دست راست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را نشان می‌دهد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا با توجه به نمودار موج الکترومغناطیسی، طول موج را به دست می‌آوریم:

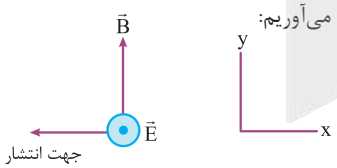
$$\frac{\lambda}{۲}=۱۲\ \mu m \Rightarrow \lambda=۲۴\ \mu m=۲۴\times۱۰^{-۶}\ m$$

گام دوم: با داشتن طول موج و تندی انتشار موج الکترومغناطیسی، بسامد موج الکترومغناطیسی را به دست می‌آوریم:

$$\lambda=\frac{c}{f} \Rightarrow f=\frac{c}{\lambda} \xrightarrow[\lambda=۲۴\times۱۰^{-۶}\ m]{c=۳\times۱۰^{۸}\ m/s} f=\frac{۳\times۱۰^{۸}}{۲۴\times۱۰^{-۶}}=\frac{۱}{۸}\times۱۰^{۱۴}=۱/۲۵\times۱۰^{۱۳}\ Hz$$

گام سوم: به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت انتشار موج الکترومغناطیسی را به دست می‌آوریم:

بنابراین موج الکترومغناطیسی در خلاف جهت محور x منتشر می‌شود.



WWW.ArefOnline.ir

۵۰ شنونده‌ای در فاصلهٔ ۵متری از چشمهٔ صوتی قرار دارد. اگر دامنهٔ ارتعاش چشمهٔ صوت نصف شود، تراز شدت صوت دریافتی توسط شنونده ۲۵ درصد کاهش می‌یابد. اگر چشمهٔ صوت به شرایط اولیهٔ خود بازگردانده شود، شنونده در چه فاصله‌ای از چشمهٔ صوت قرار گیرد تا شدت صوت دریافتی آن به $۶۴\times۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$ برسد؟ (از جذب انرژی توسط محیط صرف نظر کنید، $I_۰ = ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$ و $\log ۲ = ۰/۳$)

۱) ۸ ۲) ۱۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

مشاوره مبحث تراز شدت صوت، در سال‌های اخیر، چندین بار در کنکورهای سراسری مطرح شده است.

$\beta_۲ = \frac{۳}{۴}\beta_۱$

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) برای مقایسهٔ شدت صوت رسیده به دو شنوندهٔ مختلف، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

شدت صوت ($W/m^۲$) — بسامد چشمه (Hz) — دامنهٔ چشمه (m) — فاصله از چشمه (m)

$$\frac{I_۲}{I_۱} = \left(\frac{f_۲}{f_۱}\right)^۲ \times \left(\frac{A_۲}{A_۱}\right)^۲ \times \left(\frac{r_۱}{r_۲}\right)^۲$$

۲) لگاریتم نسبت شدت یک صوت به شدت صوت مرجع را تراز شدت صوت می‌گوییم و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

تراز شدت صوت (dB)

$$\beta = ۱۰\log\frac{I}{I_۰}$$

I: شدت صوت چشمه ($W/m^۲$)، $I_۰$: شدت صوت مرجع ($W/m^۲$)

۳) اگر شدت صوت دریافتی از $I_۱$ به $I_۲$ برسد، آن‌گاه تغییرات تراز شدت صوت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۲}{I_۱} \text{ یا } \beta_۱ - \beta_۲ = ۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: با توجه به این‌که وقتی دامنهٔ ارتعاش چشمهٔ صوت نصف می‌شود، تراز شدت صوت ۲۵ درصد کاهش می‌یابد، می‌توانیم بنویسیم:

$$\beta_۱ - \beta_۲ = ۱۰\log\frac{I_۱}{I_۲} \xrightarrow[\frac{I_۱}{I_۲}=(\frac{A_۱}{A_۲})^۲]{\beta_۲=\beta_۱-\frac{۱}{۴}\beta_۱=\frac{۳}{۴}\beta_۱} \beta_۱ - \frac{۳}{۴}\beta_۱ = ۱۰\log(\frac{A_۱}{A_۲})^۲ \xrightarrow{A_۲=\frac{۱}{۲}A_۱} \frac{۱}{۴}\beta_۱ = ۱۰\log ۲^۲$$

$$\xrightarrow{\log ۲=۰/۳} \frac{۱}{۴}\beta_۱ = ۲۰\times ۰/۳ \Rightarrow \beta_۱ = ۲۴\ dB$$

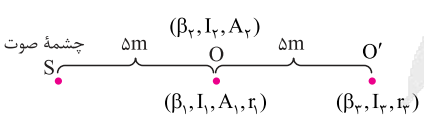
گام دوم: حالا می‌توانیم شدت صوت اولیه ($I_۱$) را به دست آوریم. بنابراین داریم:

$$\beta_۱ = ۱۰\log\frac{I_۱}{I_۰} \xrightarrow[I_۰=۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲]{\beta_۱=۲۴\ dB} \underbrace{۲/۴}_{۸\times ۰/۳} = \log\frac{I_۱}{۱۰^{-۱۲}} \xrightarrow{\log ۲=۰/۳} \log ۲^۸ = \log\frac{I_۱}{۱۰^{-۱۲}}$$

$$\Rightarrow I_۱ = ۲۵۶\times ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲$$

گام سوم: و در آخر شدت صوت نهایی را با شدت صوت اولیه مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{I_۳}{I_۱} = \left(\frac{r_۱}{r_۳}\right)^۲ \xrightarrow[I_۱=۲۵۶\times ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲,\ r_۱=۵\ m]{I_۳=۶۴\times ۱۰^{-۱۲}\ W/m^۲} \frac{۶۴\times ۱۰^{-۱۲}}{۲۵۶\times ۱۰^{-۱۲}} = \left(\frac{۵}{r_۳}\right)^۲ \Rightarrow \frac{۱}{۴} = \left(\frac{۵}{r_۳}\right)^۲ \xrightarrow{\text{جذر}} r_۳ = ۱۰\ m$$



WWW.ArefOnline.ir

۵۱ اگر بسامد یک چشمهٔ صوت ۴۰ درصد افزایش و فاصلهٔ شنونده تا چشمهٔ صوت ۳۰ درصد کاهش یابد، تراز شدت صوت چگونه تغییر می‌کند؟ (از جذب انرژی توسط محیط صرف نظر شود و $\log ۲ = ۰/۳$)

۱) ۶ برابر می‌شود.

۲) ۰/۶ برابر می‌شود.

۳) ۰/۶ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

۴) ۶ دسی‌بل افزایش می‌یابد.

$f_۲ = ۱/۴ f_۱$ ، $r_۲ = ۰/۷ r_۱$

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint ابتدا نسبت $\frac{I_۲}{I_۱}$ را با توجه به تغییرات بسامد و فاصله از چشمهٔ صوت به دست آورید و در آخر تغییرات تراز شدت صوت را با استفاده از رابطهٔ $\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱}$ محاسبه کنید.

درس Box

۱) برای مقایسهٔ شدت صوت رسیده به دو شنوندهٔ مختلف، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

شدت صوت ($W/m^۲$) ، بسامد چشمه (Hz) ، دامنهٔ چشمه (m) ، فاصله از چشمه (m)

$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{f_۲}{f_۱})^۲ \times (\frac{A_۲}{A_۱})^۲ \times (\frac{r_۱}{r_۲})^۲$$

۲) لگاریتم نسبت شدت یک صوت به شدت صوت مرجع را تراز شدت صوت می‌گوییم و از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

تراز شدت صوت (dB)

$$\beta = ۱۰ \log \frac{I}{I_۰}$$ شدت صوت چشمه ($W/m^۲$) / شدت صوت مرجع ($W/m^۲$)

۳) اگر شدت صوت دریافتی از $I_۱$ به $I_۲$ برسد، آن‌گاه تغییرات تراز شدت صوت از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱} \text{ یا } \beta_۱ - \beta_۲ = ۱۰ \log \frac{I_۱}{I_۲}$$

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** ابتدا نسبت شدت صوت در حالت دوم به حالت اول را به دست می‌آوریم:

$$\frac{I_۲}{I_۱} = (\frac{A_۲}{A_۱})^۲ (\frac{f_۲}{f_۱})^۲ (\frac{r_۱}{r_۲})^۲ \xrightarrow[r_۲ = r_۱ - \frac{۳۰}{۱۰۰} r_۱ = ۰/۷ r_۱]{A_۱ = A_۲ ,\ f_۲ = f_۱ + \frac{۴۰}{۱۰۰} f_۱ = ۱/۴ f_۱} \frac{I_۲}{I_۱} = ۱ \times (\frac{۱/۴ f_۱}{f_۱})^۲ \times (\frac{r_۱}{۰/۷ r_۱})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = \frac{۱۴ \times ۱۴}{۷ \times ۷} \Rightarrow \frac{I_۲}{I_۱} = ۴$$

گام دوم: حالا تغییرات تراز شدت صوت را با استفاده از رابطهٔ $\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log \frac{I_۲}{I_۱}$ محاسبه می‌کنیم:

$$\beta_۲ - \beta_۱ = ۱۰ \log ۴ \Rightarrow \beta_۲ - \beta_۱ = ۲۰ \log ۲ \xrightarrow{\log ۲ = ۰/۳} \beta_۲ - \beta_۱ = ۲۰ \times ۰/۳ \Rightarrow \beta_۲ - \beta_۱ = ۶ \text{ dB}$$

بنابراین تراز شدت صوت ۶ dB افزایش می‌یابد.

WWW.ArefOnline.ir

۵۲ در بازتاب پرتو نور از سطح یک آینه، اگر زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب، ۶۰ درجه بیشتر از زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه باشد، زاویهٔ تابش چند درجه است؟

($۲\theta_i$) ($۹۰ - \theta_i$)

۱) ۳۰

۲) ۴۰

۳) ۵۰

۴) ۶۰

مشاوره در سؤالات بازتاب نور، به خط عمود بر سطح صاف (مثلاً آینه) توجه کنید و برای درک بهتر لطفاً شکل رسم کنید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

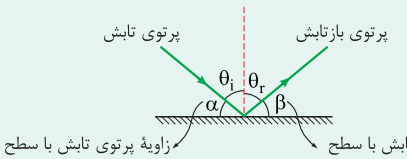
Hint همان‌طور که در صورت سؤال مشخص شده است، $(۲\theta_i) - (۹۰^\circ - \theta_i) = ۶۰^\circ$ است و از این رابطه، θ_i را به دست آورید.

درس Box

قانون بازتاب عمومی: همواره و در هر وضعیتی، زاویهٔ تابش (θ_i) با زاویهٔ بازتابش (θ_r) برابر است.

این قانون برای هر نوع مانعی (تخت، کاو، کوژ، هموار و ناهموار) و هر نوع موجی (مکانیکی، الکترومغناطیسی)، برقرار است.

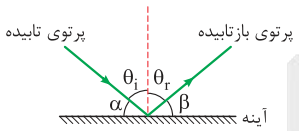
در شکل مقابل، زاویهٔ تابش و بازتاب، نمودار پرتویی مشخص شده است.



$$\theta_i = \theta_r \qquad \alpha = \beta$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: در شکل زیر، پرتو تابش و پرتو بازتابیده از سطح یک آینه مشخص شده است.



$$۲\theta_i = \text{زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب}$$

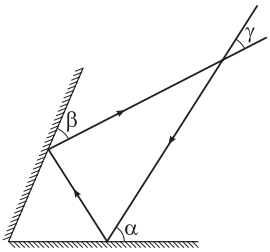
$$\alpha = \beta \quad \text{زاویهٔ بین پرتو بازتاب و آینه}$$

گام دوم: طبق فرض سؤال، زاویهٔ بین پرتو تابش و پرتو بازتاب، ۶۰ درجه بیشتر از زاویهٔ بین پرتو بازتاب و سطح آینه است، بنابراین داریم:

$$۲\theta_i - \alpha = ۶۰^\circ \xrightarrow{\alpha + \theta_i = ۹۰^\circ} ۲\theta_i - (۹۰^\circ - \theta_i) = ۶۰^\circ \Rightarrow ۳\theta_i = ۱۵۰^\circ \Rightarrow \theta_i = ۵۰^\circ$$

WWW.ArefOnline.ir

۵۳ شکل زیر، مسیر پرتو نوری را در بازتاب از دو آینهٔ تخت متقاطع نشان می‌دهد. اگر زاویهٔ α، ۱۰ درجه افزایش یابد، به ترتیب زاویه‌های β و γ چگونه تغییر می‌کنند؟



۱) 10° افزایش می‌یابد، 20° افزایش می‌یابد

۲) 10° افزایش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

۳) 10° کاهش می‌یابد، 20° افزایش می‌یابد

۴) 10° کاهش می‌یابد، تغییر نمی‌کند

پاسخ: گزینهٔ ۴

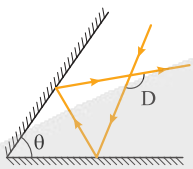
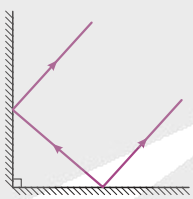
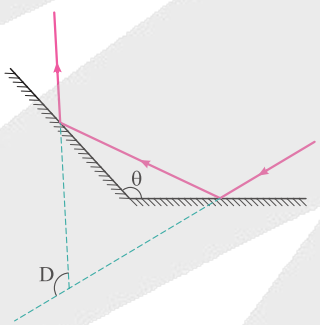
Hint

رابطه‌ای بین زاویه‌های α، β و γ با زاویهٔ بین دو آینه متقاطع را پیدا کنید تا بتوانید تغییرات را تحلیل کنید، توجه کنید که زاویهٔ بین دو آینه ثابت است و تغییر نمی‌کند.

درس Box

زاویهٔ انحراف در آینه‌های متقاطع، **پس از دو برخورد**، به زاویهٔ تابش بستگی ندارد و فقط به زاویهٔ بین دو آینه وابسته است.

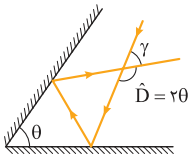
در شکل‌های زیر سه حالت نمایش داده شده است.

حالت	شکل	زاویهٔ انحراف
زاویهٔ بین دو آینه تند باشد.		$\hat{D} = 2\theta$
زاویهٔ بین دو آینه 90° باشد.		$\hat{D} = 180^\circ$
زاویهٔ بین دو آینه باز باشد.		$\hat{D} = 360^\circ - 2\theta$

حواستان باشد: این روابط زمانی کاربرد دارد که پرتو تنها دو برخورد با آینه‌ها داشته باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: همان‌طور که در درس‌باکس بررسی کردیم، اگر زاویهٔ بین دو آینهٔ متقاطع تند باشد و پرتو تنها یک بار با هر آینه برخورد داشته باشد (کلاً ۲ برخورد داشته باشیم)، زاویهٔ انحراف هیچ ربطی به زاویهٔ تابش ندارد و از رابطهٔ $\hat{D} = 2\theta$ به دست می‌آید (θ زاویهٔ بین دو آینهٔ متقاطع است.) البته در شکل مقابل، زاویهٔ γ، مکمل زاویهٔ انحراف است.

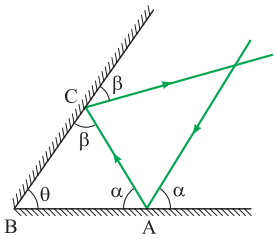


$$\hat{\gamma} = 180^\circ - 2\theta$$

زاویهٔ γ به زاویهٔ بین دو آینه وابسته است و با تغییر زاویهٔ تابش، تغییر نمی‌کند.

WWW.ArefOnline.ir

گام دوم: می‌دانیم زاویه‌های تابش و بازتاب با هم برابرند، بنابراین زاویه‌ای که پرتو تابش و بازتاب با سطح می‌سازند هم با یکدیگر برابرند (زاویه‌های α و β که در شکل مشخص شده‌اند)، بنابراین در شکل با توجه به مثلث ABC داریم:

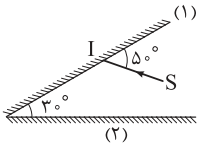


$$\alpha+\beta+\theta=۱۸۰^\circ \Rightarrow \alpha+\beta=۱۸۰^\circ-\theta$$

بنابراین، مجموع زاویهٔ α و β، به زاویهٔ بین دو آینه وابسته است و ثابت است، پس با افزایش زاویهٔ α به اندازهٔ ۱۰°، زاویهٔ β، ۱۰° کاهش می‌یابد، تا حاصل‌جمع α و β مقداری ثابت باقی بماند.

WWW.ArefOnline.ir

۵۴ **در شکل زیر پرتو SI به آینهٔ (۱) می‌تابد. این پرتو مجموعاً پس از چند بازتابش، آینه‌ها را ترک می‌کند؟ (سطح آینه‌های تخت را به اندازهٔ کافی بزرگ فرض کنید.)**



۱) ۳
۲) ۴
۳) ۵
۴) ۷

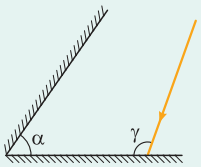
مشاوره اگر بخواهید این سؤال را از روش معمولی حل کنید، به شدت وقت‌گیر هست و این ظلم بزرگی به سؤال‌های سادهٔ دیگر است. پس توصیه می‌کنیم درس‌باکس را بخوانید تا روش صحیح حل این سؤالات را یاد بگیرید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

برای محاسبهٔ تعداد برخورد یک پرتو در آینه‌های متقاطع، دو حالت ممکن است اتفاق بیفتد:

۱) پرتو اولیه در حال ورود به دو آینه متقاطع است. (مانند شکل مقابل)

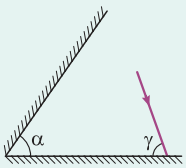


الف) اگر $\frac{\gamma}{\alpha}$ عدد صحیح باشد، تعداد برخورد برابر $\frac{\gamma}{\alpha}$ است.

ب) اگر $\frac{\gamma}{\alpha}$ عدد صحیح نباشد، تعداد برخورد برابر $1+[\frac{\gamma}{\alpha}]$ است.

در این حالت γ برابر i_1+90 است.

۲) پرتو اولیه در حال خروج از دو آینه متقاطع باشد. (مانند شکل مقابل)



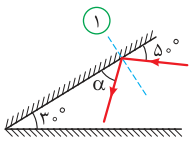
الف) اگر $\frac{\gamma}{\alpha}$ عدد صحیح باشد، تعداد برخورد برابر $\frac{\gamma}{\alpha}$ است.

ب) اگر $\frac{\gamma}{\alpha}$ عدد صحیح نباشد، تعداد برخورد برابر $1+[\frac{\gamma}{\alpha}]$ است.

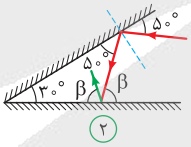
در این حالت γ برابر i_1-90 است.

پاسخ خیلی تشریحی

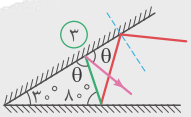
بازتاب نور در هر آینه را رسم می‌کنیم و تعداد برخوردها را به دست می‌آوریم.



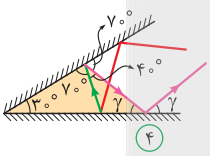
شکل (۱) ـ برخورد اول



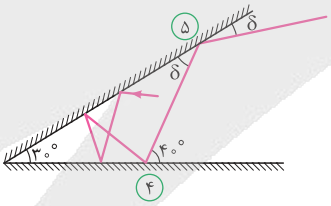
شکل (۲) ـ برخورد دوم



شکل (۳) ـ برخورد سوم



شکل (۴) ـ برخورد چهارم



شکل (۵) ـ برخورد پنجم

گام اول: در برخورد اول، زاویه‌ای که پرتوهای تابش و بازتابش با سطح می‌سازند، برابر است، بنابراین $\alpha = 50^\circ$.

گام دوم: در برخورد دوم، β زاویهٔ خارجی مثلث است، بنابراین داریم:

$$\beta = 50^\circ + 30^\circ = 80^\circ$$

گام سوم: در برخورد سوم، می‌توانیم بگوییم مجموع زاویه‌های داخلی مثلث 180° است، بنابراین داریم:

$$\theta + 30^\circ + 80^\circ = 180^\circ \Rightarrow \theta = 70^\circ$$

گام چهارم: در برخورد چهارم هم از مجموع زاویه‌های داخلی مثلث رنگ‌شده در شکل چهارم استفاده می‌کنیم.

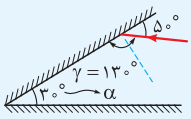
$$\gamma + 30^\circ + 70^\circ + 40^\circ = 180^\circ \Rightarrow \gamma = 40^\circ$$

WWW.ArefOnline.ir

گام پنجم: در نهایت به سراغ آخرین برخورد می‌رویم و زاویهٔ δ را به کمک زاویهٔ خارجی مثلث به دست می‌آوریم.

$$۴۰^\circ = \delta + ۳۰^\circ \Rightarrow \delta = ۱۰^\circ$$

یه‌جور دیگه



به کمک تکنیکی که در درس‌باکس بررسی کردیم، پرتو اولیه در حال ورود به دو آینهٔ متقاطع است و γ برابر ۱۳۰° است و نسبت γ به α، عدد صحیحی نیست. بنابراین تعداد برخورد پرتو به آینه‌ها برابر است با:

$$n = [\frac{\gamma}{\alpha}] + ۱ \qquad n = [\frac{۱۳۰^\circ}{۳۰^\circ}] + ۱ = ۴ + ۱ = ۵$$

WWW.ArefOnline.ir

۵۵ شخصی بین دو مانع بلند و روبه‌روی هم ایستاده است. در لحظه‌ای شخص فریاد می‌زند. اول بدون آن‌که پژواک صدای خود از مانع نزدیک‌تر را از صدای اصلی تمیز دهد، پس از $۱/۲\ s$ فقط پژواک صدای خود را از مانع دورتر می‌شنود. فاصلهٔ بین دو مانع حداکثر چند متر است؟ (تندی صوت در هوا $۳۴۰\ m/s$ است و صوت از هر مانع فقط یک بار بازتاب می‌شود.)

۱) ۲۲۱

۲) ۲۳۱

۳) ۲۳۸

۴) ۲۴۸

یعنی گوش شخص فقط پژواک یکی از مانع‌ها را می‌تواند از صوت اصلی‌اش متمایز کند.

پاسخ: گزینهٔ ۱

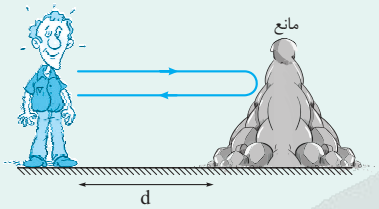
Hint

شخصی را بین دو مانع در نظر بگیرید. فاصله تا یک مانع طوری باشد که شخص پس از $۱/۲\ s$ صدای پژواک خود را بشنود، این فاصله را به دست آورید و فاصله تا مانع دیگر طوری باشد که زمان طی‌شده توسط صدای پژواک، $۰/۱\ s$ باشد. در این صورت شخص فقط از یک مانع صدای پژواک را می‌شنود و در نهایت فاصلهٔ دو مانع را به دست آورید.

درس Box

به صوتی که پس از بازتاب از یک مانع دوباره به چشمهٔ صوت برمی‌گردد، پژواک می‌گوییم.

در شکل مقابل شخصی در فاصلهٔ d از یک مانع قرار دارد. در پدیدهٔ پژواک، صوت باید مسافت $۲d$ (رفت و برگشت) را طی کند تا دوباره به چشمهٔ صوت (شخص) برگردد، بنابراین می‌توانیم رابطه‌ای به صورت زیر بنویسیم:



$$۲d = v_{صوت} \times \Delta t \Rightarrow \Delta t = \frac{۲d}{v_{صوت}}$$

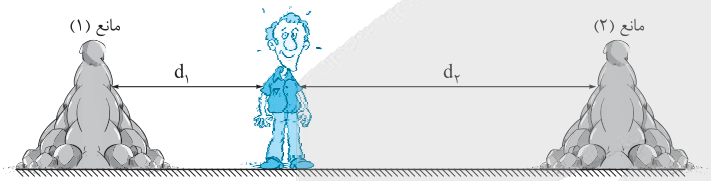
حواستان باشد: Δt مدت‌زمان رفت و برگشت صوت است.

نکته

گوش انسان زمانی می‌تواند، صوت اصلی و صوت پژواک را تشخیص دهد (تمایز قائل شود) که فاصلهٔ زمانی بین این دو صوت، حداقل $۰/۱\ s$ باشد.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: شکل زیر، وضعیت فرد را بین دو مانع (۱) و (۲) نمایش می‌دهد. می‌دانیم کم‌ترین فاصلهٔ زمانی برای تشخیص پژواک از صوت اصلی برابر $۰/۱\ s$ است. از آن‌جا که شخص فقط یکی از پژواک‌های خود را می‌شنود، پس باید فاصلهٔ زمانی تا مانع نزدیک‌تر (مانع (۱)) حداکثر $۰/۱\ s$ باشد، بنابراین داریم:



$$۲d_۱ = v_{صوت} t$$
$$\Rightarrow ۲d_۱ = ۳۴۰ \times ۰/۱$$
$$\Rightarrow d_۱ = ۱۷\ m$$

حواستان باشد: صوت دو بار مسافت $d_۱$ را طی کرده است (رفت و برگشت)، به همین دلیل از $۲d_۱$ استفاده می‌کنیم.

گام دوم: شخص صدای پژواک خود از مانع (۲) را پس از $۱/۲\ s$ می‌شنود، بنابراین داریم:

$$۲d_۲ = v_{صوت} t \Rightarrow ۲d_۲ = ۳۴۰ \times ۱/۲ \Rightarrow d_۲ = ۲۰۴\ m$$

گام سوم: حداکثر فاصلهٔ بین دو مانع را به دست می‌آوریم:

$$\text{فاصلهٔ بین دو مانع} < d_۱ + d_۲ = ۱۷ + ۲۰۴ = ۲۲۱\ m$$

WWW.ArefOnline.ir

۵۶ پرتو نور تک‌رنگی با زاویهٔ تابش 53° از هوا به محیط شفافی به ضریب شکست ۱/۶ می‌تابد. راستای انتشار این پرتو پس از ورود به محیط شفاف چند درجه تغییر می‌کند؟ $(\sin 53^\circ = 0/8)$

زاویهٔ انحراف = ؟

زاویه‌ای که پرتو با خط عمود می‌سازد.

۱) ۷

۲) ۸

۳) ۱۶

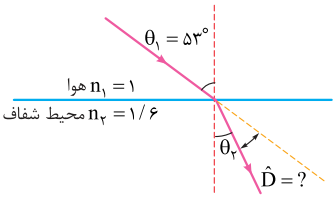
۴) ۲۳

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint به کمک رابطهٔ $\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2}$، زاویهٔ شکست را به دست آورید و در نهایت با استفاده از رابطهٔ $D = |\theta_2 - \theta_1|$ زاویهٔ انحراف را محاسبه کنید.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: شکل زیر مسیر پرتو نور را پس از شکست از محیط (۱) (هوا) به محیط (۲) (محیط شفاف به ضریب شکست ۱/۶) را نمایش می‌دهد.



توجه کنید، پرتو نور پس از واردشدن به محیط با ضریب شکست بیشتر، به خط عمود بر مرز جدایی نزدیک می‌شود.

گام دوم: طبق قانون شکست اسنل داریم:

$$\frac{\sin\theta_2}{\sin\theta_1} = \frac{n_1}{n_2} \Rightarrow \frac{\sin\theta_2}{0/8} = \frac{1}{1/6} \Rightarrow \sin\theta_2 = 0/5 \Rightarrow \theta_2 = 30^\circ$$

گام سوم: خواستهٔ سؤال، مقدار انحراف پرتو تابش $(\hat{D})$ است:

$$\hat{D} = \theta_1 - \theta_2 = 53^\circ - 30^\circ = 23^\circ$$

WWW.ArefOnline.ir

۵۷ انرژی هر کوانتوم یک موج الکترومغناطیسی ۸ eV است. این موج در کدام ناحیه از طیف الکترومغناطیسی قرار دارد؟ $(hc = ۱۲۴۰\ eV.nm)$

۱) فروسرخ
۲) نور مرئی
۳) فرابنفش
۴) رادیویی

مشاوره حتماً گسترهٔ طول موج نور مرئی یعنی ۴۰۰ nm تا ۷۵۰ nm را بلد باشید، تا بتوانید ناحیهٔ طیف موج خواسته‌شده را به دست آورید.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) **انرژی فوتون**: اگر نور را به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر بگیریم، انرژی هر یک از این بسته‌ها که کوانتوم انرژی یا انرژی هر فوتون گفته می‌شود، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

ثابت پلانک (J.s) — تندی انتشار امواج الکترومغناطیسی (m/s)

$$E(J) = hf \xrightarrow{f=\frac{c}{\lambda}} E = \frac{hc}{\lambda}$$

بسامد نور $(\frac{1}{s})$ — طول موج نور (m)

برای n فوتون مشابه می‌توان نوشت:

$$E(J) = nhf = n\frac{hc}{\lambda}$$

تعداد فوتون

۲) **طیف امواج الکترومغناطیسی به ترتیب افزایش طول موج**: گاما، ایکس، فرابنفش، نور مرئی، فروسرخ، ریزموج و رادیویی

پاسخ خیلی تشریحی

برای این‌که ناحیهٔ طیف موج الکترومغناطیسی را تشخیص دهیم، باید طول موج آن را به دست آوریم. برای این کار داریم:

(دقت کنید! چون hc برحسب eV.nm و انرژی برحسب eV است، پس طول موج برحسب nm به دست می‌آید):

$$E = \frac{hc}{\lambda} \Rightarrow ۸ = \frac{۱۲۴۰}{\lambda} \Rightarrow \lambda = ۱۵۵\ nm$$

با توجه به این‌که طول موج برابر ۱۵۵ nm، یعنی کم‌تر از طول موج نور بنفش است، پس این موج در ناحیهٔ فرابنفش قرار دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۵۸ در پدیدهٔ فوتوالکتریک، انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های جداشده از سطح فلز به کدام‌یک از عوامل زیر بستگی دارد؟

الف) بسامد نور فرودی　　ب) تعداد فوتون‌های فرودی

پ) شدت نور فرودی　　ت) جنس فلز

۱) الف ـ پ　　۲) الف ـ ت

۳) ب ـ پ　　۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

درس Box

۱) وقتی نوری تکفام (تک‌رنگ) بر سطح فلزی می‌تابد، هر فوتون صرفاً با یکی از الکترون‌های فلز برهم‌کنش می‌کند. اگر فوتون انرژی کافی داشته باشد تا فرایند خارج‌کردن الکترون از فلز را انجام دهد، الکترون به طور آنی از آن گسیل می‌شود. در این صورت بخشی از انرژی فوتون صرف جداکردن الکترون از فلز می‌شود و مابقی آن به انرژی جنبشی الکترون خارج‌شده تبدیل می‌شود.

۲) $K = hf - W$

K = انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها　　h = ثابت پلانک　　f = بسامد نور فرودی

W = کار(انرژی) لازم برای خارج‌کردن الکترون‌ها از سطح یک فلز که به جنس فلز و این‌که الکترون از چه مداری جدا شده است، بستگی دارد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به درس‌باکس، عبارت‌ها را بررسی می‌کنیم:

الف) اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح فلز از بسامدی موسوم به بسامد آستانه کم‌تر باشد، فوتون‌ها حداقل انرژی لازم برای خارج‌کردن الکترون از فلز را ندارند و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ نمی‌دهد، ولی اگر بسامد نور تابیده‌شده بر سطح فلز از بسامد آستانه بیشتر باشد، فوتون‌ها حداقل انرژی لازم برای خارج‌کردن الکترون از فلز را دارند و پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ می‌دهد. حالا اگر از نوری با بسامد بیشتر استفاده کنیم (در صورتی که پدیدهٔ فوتوالکتریک رخ دهد)، آن‌گاه الکترون‌های خارج‌شده از فلز (فوتوالکترون‌ها) انرژی جنبشی بیشتری خواهند داشت. ✓

ب و پ) اگر شدت نوری را که فوتون‌های آن حداقل انرژی لازم برای وقوع پدیدهٔ فوتوالکتریک را دارند، افزایش دهیم (با ثابت‌ماندن بسامد) در حقیقت تعداد فوتون‌ها را افزایش داده‌ایم؛ بنابراین تعداد فوتون‌هایی که با الکترون‌های فلز برهم‌کنش می‌کنند، افزایش می‌یابد و در نتیجه تعداد فوتوالکترون‌ها بیشتر می‌شود، در حالی که انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها بدون تغییر می‌ماند. ✗

ت) بسامد آستانه به جنس فلز بستگی دارد؛ بنابراین اگر نوری را به فلزی بتابانیم که بسامد آستانهٔ آن کم‌تر از بسامد آستانهٔ فلز دیگری می‌باشد، انرژی جنبشی سست‌ترین الکترون فلز با بسامد آستانهٔ کم‌تر، بیشتر ازسست‌ترین الکترون فلز دیگر است. ✓

یه‌جور دیگه

براساس معادلهٔ نوشته‌شده در درس‌باکس و با توجه به ثابت‌بودن مقدار h، انرژی جنبشی (K)، فقط به بسامد نور فرودی (f) و جنس فلز (W) بستگی دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۵۹ اگر در یک آزمایش فوتوالکتریک، طول موج نور فرودی بر فلز معین را $\frac{۱}{۲}$ برابر کنیم، تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های خارج‌شده از سطح فلز **n** برابر می‌شود. کدام رابطه درست است؟

۱) $n = \sqrt{۲}$ ۲) $n = ۲$ ۳) $n > \sqrt{۲}$ ۴) $n > ۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

در پدیدهٔ فوتوالکتریک، وقتی نوری تکفام بر سطح فلزی می‌تابد، هر فوتون صرفاً با یکی از الکترون‌های فلز برهم‌کنش می‌کند. حالا اگر انرژی فوتون در حدی باشد که بتواند الکترون را از سطح فلز خارج کند، الکترون به طور آنی از فلز کنده می‌شود؛ در این حالت بخشی از انرژی فوتون صرف جداکردن الکترون از سطح فلز و مابقی آن به انرژی جنبشی الکترون خارج‌شده تبدیل می‌شود؛ یعنی:

$hf = W_{\circ} + K$

hf: انرژی فوتون (J)
$W_{\circ}$: انرژی لازم برای خارج کردن الکترون از سطح فلز (J)
K: انرژی جنبشی الکترون (J)

برخی از الکترون‌ها در فلز کم‌تر مقید هستند، پس برای خارج‌کردن آن‌ها از فلز، انرژی کم‌تری نسبت به بقیهٔ الکترون‌ها نیاز است. اگر کم‌ترین انرژی لازم برای خارج‌کردن الکترون‌ها از سطح فلزی *(یعنی سست‌ترینشون)* را با $W_{\circ}$ نشان دهیم، آن‌گاه انرژی جنبشی سریع‌ترین الکترون‌های کنده‌شده از فلز از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$K_{max} = hf - W_{\circ}$

K_{max}: انرژی جنبشی سریع‌ترین فوتوالکترون‌های گسیل‌شده از فلز (J)
$W_{\circ}$: کم‌ترین انرژی لازم برای خارج‌کردن الکترون از سطح فلز (J)

پاسخ خیلی تشریحی ✔

با توجه به رابطهٔ $\lambda = \frac{c}{f}$، با $\frac{۱}{۲}$ برابر شدن طول موج نور فرودی، بسامد آن ۲ برابر می‌شود؛ زیرا:

$$\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱} = \frac{f_۱}{f_۲} \xrightarrow{\frac{\lambda_۲}{\lambda_۱}=\frac{۱}{۲}} f_۲ = ۲f_۱$$

برای این‌که بتوانیم تندی سریع‌ترین فوتوالکترون‌ها در هر دو حالت را مقایسه کنیم، باید انرژی جنبشی آن‌ها را در این دو حالت به دست آوریم:

$$K_{max} = hf - W_{\circ} \Rightarrow \begin{cases} K_{max_۱} = hf - W_{\circ} \\ K_{max_۲} = h(۲f) - W_{\circ} \end{cases}$$

حالا می‌توانیم بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها در حالت دوم را با حالت اول مقایسه کنیم:

$$\frac{K_{max_۲}}{K_{max_۱}} = \frac{h(۲f) - W_{\circ}}{hf - W_{\circ}} \xrightarrow{\text{اضافه و کم کردن } W_{\circ} \text{ در صورت}} \frac{K_{max_۲}}{K_{max_۱}} = \frac{h(۲f) - W_{\circ} + W_{\circ} - W_{\circ}}{hf - W_{\circ}} = \frac{۲hf - ۲W_{\circ} + W_{\circ}}{hf - W_{\circ}}$$

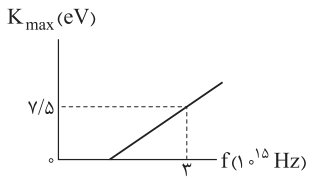
$$\Rightarrow \frac{K_{max_۲}}{K_{max_۱}} = \frac{۲(hf - W_{\circ}) + W_{\circ}}{hf - W_{\circ}} = ۲ + \frac{W_{\circ}}{hf - W_{\circ}} \Rightarrow \frac{K_{max_۲}}{K_{max_۱}} > ۲$$

در آخر با استفاده از رابطهٔ $K = \frac{۱}{۲}mv^۲$ می‌توانیم نسبت $\frac{v_۲}{v_۱}$ را که در این‌جا همان **n** است، به دست آوریم:

$$(\frac{v_۲}{v_۱})^۲ > ۲ \xrightarrow{\text{جذر}} \frac{v_۲}{v_۱} > \sqrt{۲} \xrightarrow{\frac{v_۲}{v_۱}=n} n > \sqrt{۲}$$

WWW.ArefOnline.ir

۶۰ در یک آزمایش فوتوالکتریک، نمودار بیشینهٔ انرژی جنبشی فوتوالکترون‌های جداشده از سطح یک فلز مطابق شکل است. تابع کار این فلز چند الکترون‌ولت است؟ $(h = ۴\times۱۰^{-۱۵}\ eV.s\ ,\ e = ۱/۶\times۱۰^{-۱۹}\ C)$



۱) ۱۲

۲) ۷/۵

۳) ۹

۴) ۴/۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

مشاوره نمودارها را به خوبی تحلیل کنید، چون از آن ها می‌توانیم کلی اطلاعات بگیریم.

پاسخ خیلی تشریحی

تابع کار فلز را با توجه به نمودار به دست می‌آوریم:

$$K_{max} = hf - W_{\circ} \Rightarrow ۷/۵ = ۴\times۱۰^{-۱۵}\times۳\times۱۰^{۱۵} - W_{\circ} \Rightarrow W_{\circ} = ۴/۵\ eV$$

WWW.ArefOnline.ir

۶۱ شدت تابشی خورشید در سطح زمین $300\ W/m^2$ است. اگر طول موج نور خورشید به طور متوسط $600\ nm$ باشد، در هر دقیقه چند فوتون به سطحی به مساحت $5\ m^2$ می‌رسد؟ ($h = 6\times10^{-34}\ J.s$ و $c = 3\times10^{8}\ m/s$)

۱) 3×10^{22}
۲) 3×10^{23}
۳) 6×10^{22}
۴) 6×10^{23}

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: به کمک رابطهٔ $I = \frac{E_{کل}}{At}$ که بیانگر شدت تابش است، انرژی کل تابیده‌شده به سطح مورد نظر را در مدت‌زمان $1\ min$ به دست می‌آوریم:

$$I = \frac{E_{کل}}{At} \xrightarrow[t=1min=60s]{A=5m^2} 300 = \frac{E_{کل}}{5\times60} \Rightarrow E_{کل} = 9\times10^{4}\ J$$

گام دوم: تعداد فوتون‌های تابیده‌شده را به دست می‌آوریم:

$$E_{کل} = nE_{فوتون} \Rightarrow 9\times10^{4} = n\times\left(\frac{hc}{\lambda}\right)$$

$$\Rightarrow 9\times10^{4} = n\times\frac{(6\times10^{-34})\times(3\times10^{8})}{600\times10^{-9}} \Rightarrow n = \frac{9\times10^{4}\times600\times10^{-9}}{6\times10^{-34}\times3\times10^{8}} = 3\times10^{23}$$

WWW.ArefOnline.ir

۶۲ در طیف اتمی هیدروژن، گسترهٔ طول موج‌های رشتهٔ لیمان ($n' = ۱$) چند میکرومتر است؟ ($R = ۰/۰۱ (nm)^{-۱}$)

۱) $\frac{۱}{۳۰}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $\frac{۲}{۱۵}$ ۴) $\frac{۴}{۳}$

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: کوتاه‌ترین طول موج رشتهٔ لیمان ($n' = ۱$)، مربوط به $n = \infty$ است.

$$\frac{۱}{\lambda_{min}} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) = R(\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{\infty^۲}) = R = ۰/۰۱ \Rightarrow \lambda_{min} = ۱۰۰\,nm$$

گام دوم: بلندترین طول موج رشتهٔ لیمان ($n' = ۱$)، مربوط به $n = ۲$ است.

$$\frac{۱}{\lambda_{max}} = R(\frac{۱}{n'^۲} - \frac{۱}{n^۲}) = R(\frac{۱}{۱^۲} - \frac{۱}{۲^۲}) = \frac{۳R}{۴} = \frac{۳}{۴۰۰} \Rightarrow \lambda_{max} = \frac{۴۰۰}{۳}\,nm$$

گام سوم: گسترهٔ طول موج‌های رشتهٔ لیمان را به دست می‌آوریم.

$$\text{گسترهٔ طول موج‌های رشتهٔ لیمان} = \lambda_{max} - \lambda_{min} = \frac{۴۰۰}{۳} - ۱۰۰ = \frac{۱۰۰}{۳}\,nm = \frac{۱}{۳۰}\,\mu m$$

WWW.ArefOnline.ir

۶۳ **الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = ۵$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اگر این اتم به حالت پایه برود، امکان گسیل چند نوع فوتون با انرژی‌های متفاوت وجود دارد؟**

۱) ۱۰ ۲) ۲۵ ۳) ۴ ۴) ۱۶

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: تمام گذارهای مربوط به مدارهای $n > ۱$ به مدار $n' = ۱$ را به دست می‌آوریم.

$(۵ \to ۱)(۴ \to ۱)(۳ \to ۱)(۲ \to ۱)$

گام دوم: تمام گذارهای مربوط به مدارهای $n > ۲$ به مدار $n' = ۲$ را به دست می‌آوریم. $(۵ \to ۲)(۴ \to ۲)(۳ \to ۲)$

گام سوم: تمام گذارهای مربوط به مدارهای $n > ۳$ به مدار $n' = ۳$ را به دست می‌آوریم. $(۵ \to ۳)(۴ \to ۳)$

گام چهارم: تمام گذارهای مربوط به مدارهای $n > ۴$ به مدار $n' = ۴$ را به دست می‌آوریم. $(۵ \to ۴)$

گام پنجم: تعداد کل فوتون‌های گسیل‌شده در گام‌های اول تا چهارم را با هم جمع می‌کنیم:

$$\text{تعداد کل فوتون‌ها} = ۴ + ۳ + ۲ + ۱ = ۱۰$$

یه جور دیگه

در یک اتم هیدروژن که الکترون در تراز n قرار دارد، برای آن‌که الکترون به تراز پایه برسد، تعداد کل انواع فوتون‌هایی که می‌توانند گسیل شوند از رابطهٔ $\frac{n(n-۱)}{۲}$ به دست می‌آید، بنابراین داریم:

$$\text{تعداد کل انواع فوتون‌ها} = \frac{۵(۵-۱)}{۲} = ۱۰$$

WWW.ArefOnline.ir

۶۴ کدام‌یک از عبارت‌های زیر نادرست است؟

۱) واپاشی α در هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد.

۲) یکی از کاربردهای واپاشی α در آشکارسازهای دود است.

۳) واپاشی β، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.

۴) اغلب هسته‌ها بلافاصله پس از واپاشی α یا β، به حالت پایه می‌رسند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

زمانی که هستهٔ ناپایدار یا پرتوزا، به صورت طبیعی واپاشی کند، نوع معینی از ذرات یا فوتون‌های پرانرژی آزاد می‌شوند. به این فرایند واپاشی، پرتوزایی طبیعی گفته می‌شود.

پرتوهای ایجادشده در پرتوزایی طبیعی

- پرتوهای α ← در واپاشی هسته‌های سنگین صورت می‌گیرد و یکی از کاربردهای گستردهٔ آن در آشکارسازهای دود است.
- پرتوهای β ← متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌ها
- پرتوهای γ ← اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و بعد از گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسند.

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، گزینهٔ (۴) نادرست است.

WWW.ArefOnline.ir

۶۵ در فرایندهای واپاشی «الف» و «ب»، تعداد نوترون‌های هستهٔ مادر به ترتیب از راست به چپ کدام است؟

الف) ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{۲۰۷}_{۸۲}Pb + \alpha$ ب) ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{۲۰۷}_{۸۲}Pb + \beta^{-}$

۱) ۱۲۶ ـ ۱۲۴
۲) ۱۲۳ ـ ۱۲۷
۳) ۱۲۳ ـ ۱۲۴
۴) ۱۲۶ ـ ۱۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) واپاشی آلفا: ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A-۴}_{Z-۲}Y + {}^{۴}_{۲}\alpha$

۲) واپاشی بتای منفی: ${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{A}_{Z+۱}Y + {}^{۰}_{-۱}\beta^{-}$

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در واپاشی α، ۲ واحد از عدد اتمی و ۴ واحد از عدد جرمی هسته کاسته می‌شود.

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{۲۰۷}_{۸۲}Pb + {}^{۴}_{۲}\alpha \Rightarrow A = ۲۱۱, Z = ۸۴$$

تعداد نوترون‌های درون هستهٔ مادر $\Rightarrow N = A - Z = ۲۱۱ - ۸۴ = ۱۲۷$

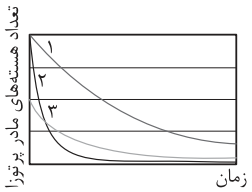
گام دوم: در واپاشی β^{-}، ۱ واحد به عدد اتمی هسته اضافه می‌شود:

$${}^{A}_{Z}X \rightarrow {}^{۲۰۷}_{۸۲}Pb + {}^{۰}_{-۱}\beta^{-} \Rightarrow A = ۲۰۷, Z = ۸۱$$

تعداد نوترون‌های درون هستهٔ مادر $\Rightarrow N = A - Z = ۲۰۷ - ۸۱ = ۱۲۶$

WWW.ArefOnline.ir

۶۶ نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونهٔ (۱)، (۲) و (۳) برحسب زمان به شکل زیر است. کدام مقایسه دربارهٔ نیمه‌عمر این سه نمونه (T) درست است؟



۱) $T_۲ > T_۱ > T_۳$

۲) $T_۱ > T_۲ > T_۳$

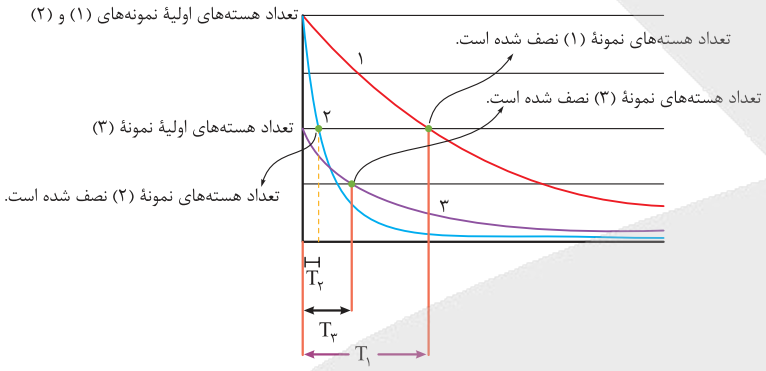
۳) $T_۲ > T_۳ > T_۱$

۴) $T_۱ > T_۳ > T_۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

همان‌طور که می‌دانیم، به مدت‌زمانی که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر در یک مادهٔ پرتوزا به نصف برسد، نیمه‌عمر گفته می‌شود. در شکل زیر، نیمه‌عمر برای سه نمونهٔ (۱)، (۲) و (۳) مشخص شده است.



بنابراین رابطهٔ بین نیمه‌عمرهای سه نمونه به صورت مقابل است: $T_۱ > T_۳ > T_۲$

WWW.ArefOnline.ir

۶۷ اختلاف بسامد دومین و سومین خط طیف اتم هیدروژن در یک رشتهٔ معین $67/5\ THz$ است. این رشته کدام است؟
$(R = \frac{1}{100}(nm)^{-1}\ ,\ c = 3\times10^{8}\ m/s)$

۱) بالمر $(n' = 2)$

۲) پاشن $(n' = 3)$

۳) براکت $(n' = 4)$

۴) لیمان $(n' = 1)$

مشاوره در سؤالاتی که در خط طیف اتم هیدروژن مقادیر n و n' هم‌زمان مجهول است، ممکن است محاسبات پیچیده باشد و سؤال زمان زیادی را از ما بطلبد. توصیه می‌شود این نوع سؤال‌ها را در اولویت‌های بعدی برای حل قرار دهید. این سؤال الهام‌گرفته‌شده از کنکور فیزیک رشتهٔ تجربی در دی‌ماه ۱۴۰۱ است.

پاسخ: گزینهٔ ۱

درس Box

اگر الکترون اتم هیدروژن از مدار n به مدار n' برود، فوتونی تابش می‌کند که طول موج آن به صورت زیر به دست می‌آید:

$$\frac{1}{\lambda} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2}\right)\ ,\ n > n'$$

به R ثابت ریدبرگ گفته می‌شود که برابر با $\frac{E_R}{hc}$ است و تقریباً برابر $0/01\,(nm)^{-1}$ است.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طول موج حاصل از انتقال الکترون از دومین و سومین خط طیف اتم هیدروژن در یک رشتهٔ مشخص (n') را به کمک معادلهٔ ریدبرگ می‌نویسیم:

$$\frac{1}{\lambda_2} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+2)^2}\right)$$

$$\frac{1}{\lambda_3} = R\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right)$$

گام دوم: طبق رابطهٔ $f = \frac{c}{\lambda}$، بسامدهای مورد نظر را به دست می‌آوریم:

$$\left.\begin{aligned} f_2 &= \frac{c}{\lambda_2} = cR\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+2)^2}\right) \\ f_3 &= \frac{c}{\lambda_3} = cR\left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right) \end{aligned}\right\} \Rightarrow f_3 - f_2 = cR\left(\frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right)$$

گام سوم: در این‌جا اختلاف بسامد دومین و سومین خط طیف اتم هیدروژن، $67/5\ THz$ است؛ بنابراین داریم:

$$67/5\times10^{12} = 3\times10^{8}\times\frac{1}{100\times10^{-9}}\left(\frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right) \Rightarrow \frac{67/5}{3\times10^{3}} = \left(\frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2}\right)$$

$$\Rightarrow \frac{9}{400} = \frac{1}{(n'+2)^2} - \frac{1}{(n'+3)^2} \Rightarrow \frac{9}{400} = \frac{(2n'+5)}{((n'+2)(n'+3))^2}$$

با چک‌کردن گزینه‌ها، $n' = 2$ پاسخ معادلهٔ بالا است که مربوط به رشتهٔ بالمر است.

WWW.ArefOnline.ir

۶۸ در اتم هیدروژن وقتی الکترون از kامین حالت برانگیخته به اولین حالت برانگیخته جهش می‌کند، فوتونی با بسامد ۷۱۴ THz گسیل می‌شود. k کدام است؟ $(E_R = 13/6\ eV$ و $h = 4\times10^{-15}\ eV.s)$

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $n = 2$ مربوط به اولین حالت برانگیخته و $n = k+1$ مربوط به kامین حالت برانگیختگی است. انرژی الکترون در این مدارها برابر است با:

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2} \Rightarrow E_2 = -\frac{13/6}{4} \quad \text{و} \quad E_{(k+1)} = \frac{-13/6}{(k+1)^2}$$

گام دوم: در اثر جهش الکترون از مدار بالاتر به مدار پایین‌تر، فوتونی گسیل می‌شود که انرژی آن برابر اختلاف انرژی بین این دو مدار مانا است.

$$E_{(k+1)} - E_2 = hf \Rightarrow \left(\frac{-13/6}{(k+1)^2}\right) - \left(\frac{-13/6}{4}\right) = 4\times10^{-15}\times714\times10^{12} \Rightarrow 13/6\left(\frac{-1}{(k+1)^2} + \frac{1}{4}\right) = 4\times714\times10^{-3}$$

$$\Rightarrow \frac{-1}{(k+1)^2} + \frac{1}{4} = \frac{21}{100} \Rightarrow \frac{-1}{(k+1)^2} = \frac{-1}{25} \Rightarrow k+1 = 5 \Rightarrow k = 4$$

WWW.ArefOnline.ir

۶۹ در اتم هیدروژن، الکترونی که در سومین حالت برانگیخته قرار دارد، یک فوتون در ناحیهٔ مرئی گسیل می‌کند. انرژی این فوتون چند ریدبرگ است؟ ($n=۴$ ، $n'=۲$)

۱) $\frac{۸}{۹}$

۲) $\frac{۷}{۱۴۴}$

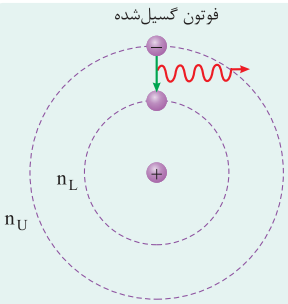
۳) $\frac{۱۵}{۱۶}$

۴) $\frac{۳}{۱۶}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

۱) هنگامی که الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) به یک حالت مانا با انرژی کم‌تر (E_L) می‌رود، یک فوتون تابش می‌شود. انرژی این فوتون برابر با اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی $(E_U - E_L)$ است.



$$E_{\text{فوتون}} = E_U - E_L$$

هم‌چنین اگر به الکترونی که در یک حالت مانا با انرژی کم‌تر (E_L) قرار دارد، فوتونی با انرژی $E_U - E_L$ بتابانیم، الکترون با دریافت این انرژی به یک حالت مانا با انرژی بیشتر (E_U) می‌رود.

۲) **ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن:**

بور نشان داد که انرژی الکترون در مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن، از رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$E_n = -\frac{۱۳/۶\ \text{eV}}{n^۲}$$

E_n: انرژی الکترون در مدار n (eV)

۳) **انرژی ریدبرگ:** انرژی الکترون در $n=۱$ برابر $E_۱ = -۱۳/۶\ \text{eV}$ است که اندازهٔ آن را یک ریدبرگ می‌نامند و با نماد E_R نشان می‌دهند.

$$E_R = ۱۳/۶\ \text{eV}$$

۴) وقتی الکترون در اولین، دومین، سومین و ... حالت برانگیخته قرار دارد، یعنی به ترتیب در مدار $n=۲$، $n=۳$، $n=۴$ و ... است. به طور کلی، وقتی الکترون در Kامین حالت برانگیخته قرار دارد، یعنی در مدار $n = K+۱$ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

الکترون در سومین حالت برانگیخته، یعنی در مدار $n=۴$ قرار دارد و چون یک فوتون در ناحیهٔ مرئی گسیل می‌کند، پس از مدار $n=۴$ به مدار $n'=۲$ می‌رود *(یادتونه که ناحیهٔ طیف بالمر، فرابنفش و مرئی بود؟!)*، بنابراین انرژی فوتون گسیلی را می‌توانیم با استفاده از اختلاف انرژی بین این دو مدار به دست آوریم.

$$E = E_n - E_{n'} \xrightarrow[n'=۲]{n=۴} E = -\frac{E_R}{۴^۲} - \left(-\frac{E_R}{۲^۲}\right) \Rightarrow E = \frac{E_R}{۴} - \frac{E_R}{۱۶} \Rightarrow E = \frac{۳E_R}{۱۶}$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۰ بسامد سومین خط رشتهٔ پاشن $(n' = ۳)$ چند برابر کم‌ترین بسامد رشتهٔ براکت $(n' = ۴)$ است؟

۱) $\frac{۲۷}{۱۰۰}$ ۲) $\frac{۴}{۳}$ ۳) $\frac{۱۰۰}{۲۷}$ ۴) $\frac{۳}{۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

۱) در معادلهٔ ریدبرگ، به ازای یک عدد صحیح که به n' نسبت می‌دهیم، n می‌تواند عددهای صحیح بعد از آن باشد و مجموعه‌ای از طول موج‌ها ایجاد می‌شوند که یک رشته نامیده می‌شوند.

مقدارهای n شماره‌های خط‌ها را نشان می‌دهند؛ مثلاً پنجمین خط در رشتهٔ بالمر $(n' = ۲)$، یعنی $n = ۷$.

۲) کم‌ترین بسامد فوتون گسیلی یا جذبی ناشی از کم‌ترین انرژی ممکن است؛ یعنی حالتی که الکترون به نزدیک‌ترین مدار مجاور خود برود.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: سومین خط رشتهٔ پاشن یعنی:

$$\begin{cases} n' = ۳ \\ n = ۳ + ۳ = ۶ \end{cases}$$

گام دوم: کم‌ترین بسامد رشتهٔ براکت یعنی:

$$\begin{cases} n' = ۴ \\ n = ۵ \end{cases}$$

گام سوم: نسبت بسامدها را حساب می‌کنیم:

$$\frac{f_{\text{پاشن}}}{f_{\text{براکت}}} = \frac{\frac{۱}{\lambda_{\text{پاشن}}}}{\frac{۱}{\lambda_{\text{براکت}}}} = \frac{R(\frac{۱}{۳^۲} - \frac{۱}{۶^۲})}{R(\frac{۱}{۴^۲} - \frac{۱}{۵^۲})} = \frac{\frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۳۶}}{\frac{۱}{۱۶} - \frac{۱}{۲۵}} \Rightarrow \frac{f_{\text{پاشن}}}{f_{\text{براکت}}} = \frac{\frac{۱}{۱۲}}{\frac{۹}{۴۰۰}} = \frac{۴۰۰}{۱۲ \times ۹} = \frac{۱۰۰}{۲۷}$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۱ بسامد هماهنگ چهارم تاری به طول ۵۰ cm برابر ۲۰۰ Hz و نیروی کشش آن ۶۰ N است. اگر چگالی تار $۸\ g/cm^۳$ باشد، قطر مقطع آن چند میلی‌متر است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۸ ۲) ۴ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۳

Hint ابتدا به کمک رابطهٔ بسامد هماهنگ nام، تندی انتشار موج را به دست آورید، سپس قطر مقطع تار را از روی تندی انتشار به دست آورید.

درس Box برای محاسبهٔ تندی انتشار موج عرضی در یک تار با قطر مقطع D تحت کشش نیروی F، از رابطهٔ $v = \frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}}$ استفاده می‌کنیم که در آن ρ چگالی تار است.

پاسخ خیلی تشریحی **گام اول:** با توجه به رابطهٔ بسامد هماهنگ nام با تندی انتشار موج و طول تار، تندی انتشار موج را به دست می‌آوریم:

$$f_n = \frac{nv}{۲L} \xrightarrow[L=۵۰\ cm\ ,\ n=۴]{f_۴=۲۰۰\ Hz} ۲۰۰ = \frac{۴\times v}{۲\times ۰/۵} \Rightarrow ۲۰۰ = ۴v \Rightarrow v = ۵۰\ m/s$$

گام دوم: به کمک رابطهٔ تندی انتشار موج عرضی در تار تحت کشش، قطر مقطع تار را به دست می‌آوریم:

$$v = \frac{۲}{D}\sqrt{\frac{F}{\rho\pi}} \xrightarrow[\rho=۸\ g/cm^۳=۸۰۰۰\ kg/m^۳]{v=۵۰\ m/s\ ,\ F=۶۰\ N} ۵۰ = \frac{۲}{D}\sqrt{\frac{۶۰}{۸۰۰۰\times ۳}}$$

$$\Rightarrow ۵۰ = \frac{۲}{۲۰D} \Rightarrow D = ۲\times ۱۰^{-۳}\ m \Rightarrow D = ۲\ mm$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۲ در فرایند واپاشی زیر، حاصل $N - N'$ کدام است؟

$$^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow \alpha + 3\beta^{-} + ^{A'}_{Z'}Y_{N'}$$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به تساوی عدد جرمی و عدد اتمی در دو طرف واکنش می‌توانیم بنویسیم (توجه کنید که α با بار مثبت همان هستهٔ هلیم یعنی $^{4}_{2}He$ و β^{-} همان الکترون یعنی $^{0}_{-1}e^{-}$ است):

$$^{A}_{Z}X_{N} \rightarrow ^{4}_{2}He + 3\,^{0}_{-1}e^{-} + ^{A'}_{Z'}Y_{N'}$$

موازنهٔ عدد جرمی: $A = 4 + 3(0) + A' \Rightarrow A - A' = 4$

موازنهٔ عدد اتمی: $Z = 2 + 3(-1) + Z' \Rightarrow Z' - Z = 1$

گام دوم: تعداد نوترون‌های هستهٔ یک اتم با استفاده از اختلاف عدد جرمی و عدد اتمی آن به دست می‌آید؛ پس داریم:

$$\begin{cases} N = A - Z \\ N' = A' - Z' \end{cases} \Rightarrow N - N' = (A - Z) - (A' - Z')$$

$$\Rightarrow N - N' = A - A' + Z' - Z \xrightarrow[Z'-Z=1]{A-A'=4} N - N' = 4 + 1 = 5$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۳ در راکتور شکافت هسته‌ای، از کدام ماده به عنوان کندساز نوترون‌ها استفاده نمی‌شود؟

کاهندهٔ تندی

۱) آب (H_2O)
۲) آب سنگین (D_2O)
۳) گرافیت
۴) بور

مشاوره یکی از مباحث فیزیک که زمینهٔ مناسبی برای طرح تست‌های غیرمحاسباتی دارد، فصل آخر کتاب درسی فیزیک (۳) است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

Hint با توجه به کارکرد قسمت‌های اصلی یک راکتور شکافت هسته‌ای، به راحتی می‌توان به این سؤال جواب داد.

درس Box

۱) **مادهٔ کُندساز**: نوترون‌های آزادشده در فرایند شکافت هسته‌ای، سرعت زیادی دارند و با احتمال بیشتری جذب ایزوتوپ $^{238}_{92}U$ می‌شوند، بدون آن‌که سبب شکافت آن‌ها شوند؛ اما اگر بتوان به نحوی این نوترون‌ها را کند ساخت، احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ $^{235}_{92}U$ افزایش می‌یابد و با شکافت‌های پی‌درپی، واکنش زنجیری شکل می‌گیرد. موادی مانند آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن)، به عنوان کندساز نوترون‌ها در واکنش‌های هسته‌ای به کار می‌روند.

۲) **میله‌های کنترل**: این میله‌ها معمولاً از مواد جذب‌کنندهٔ نوترون مانند کادمیم یا بور ساخته می‌شوند و آهنگ واکنش شکافت، یعنی تعداد نوترون‌های موجود برای به وجود آوردن شکافت را تنظیم می‌کنند.

پاسخ خیلی تشریحی با توجه به متن درس‌باکس، گزینهٔ (۴) درست است.

WWW.ArefOnline.ir

۷۴ **نسبت تعداد نوترون به تعداد پروتون، برای ایزوتوپ‌های پایدار سبک و ایزوتوپ‌های پایدار سنگین به ترتیب از راست به چپ چگونه است؟**

$\frac{N}{Z}$

۱) کوچک‌تر از یک، تقریباً برابر با یک

۲) کوچک‌تر از یک، بزرگ‌تر از یک

۳) تقریباً برابر با یک، کوچک‌تر از یک

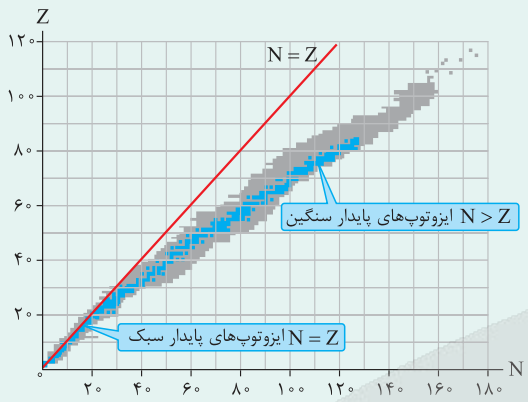
۴) تقریباً برابر با یک، بزرگ‌تر از یک

مشاوره این نوع تست‌ها ظاهراً از زمینهٔ مشترک بین دو درس فیزیک و شیمی مطرح می‌شوند؛ اما فیزیک در مورد هستهٔ اتم حرف‌های بیشتری برای گفتن دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

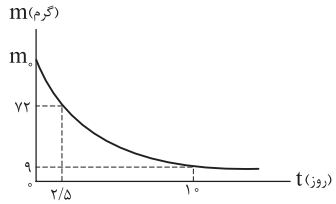
نمودار تغییرات Z (تعداد پروتون‌ها) برحسب N (تعداد نوترون‌ها) برای هسته‌های پایدار، نشان می‌دهد که نسبت $\frac{N}{Z}$ برای هسته‌های سبک تقریباً برابر با یک و برای هسته‌های سنگین، تقریباً برابر با ۱/۵است؛ یعنی با افزایش تعداد پروتون‌ها، برای آن‌که هسته پایدار بماند، باید تعداد نوترون‌ها افزایش بیشتری داشته باشند.



پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به درس‌باکس، گزینهٔ (۴) صحیح است.

WWW.ArefOnline.ir

۷۵ نمودار جرم نمونه‌ای از یک مادهٔ پرتوزا برحسب زمان، به شکل زیر است. جرم اولیهٔ این نمونه (m_0) چند گرم است؟



۱) ۲۸۸
۲) ۱۴۴
۳) ۲۱۶
۴) ۱۰۸

پاسخ: گزینهٔ ۲

Hint ابتدا با توجه به بازهٔ زمانی ۲/۵ روز تا ۱۰ روز، نیمه‌عمر را به دست آورید، سپس در بازهٔ زمانی صفر تا ۲/۵ روز، m_0 را محاسبه کنید.

درس Box هسته‌های پرتوزا، با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند و تعداد هسته‌های اولیهٔ آن‌ها و در نتیجه، جرم آن‌ها کاهش می‌یابد. نیمه‌عمر، مدت‌زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌ها و در نتیجه جرم اولیهٔ موجود در یک نمونه به نصف برسد و آن را با نماد $T_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم.

m_0 = جرم مادهٔ پرتوزای اولیه

m = جرم مادهٔ پرتوزای باقی‌مانده $\quad m = \frac{m_0}{2^n}$

n = تعداد مراحل واپاشی

Δt = بازهٔ زمانی واپاشی $\quad n = \frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}}$

توجه: لازم نیست Δt و $T_{\frac{1}{2}}$ حتماً برحسب ثانیه باشند. فقط کافی است یکای آن‌ها یکسان باشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: در بازهٔ زمانی روز $(t_1 = 2/5)$ تا روز $(t_2 = 10)$، جرم مادهٔ پرتوزا از $m_1 = 72\,g$ به $m_2 = 9\,g$ می‌رسد.

$$m_2 = \frac{m_1}{2^n} \Rightarrow 9 = \frac{72}{2^n} \Rightarrow 2^n = 8 = 2^3 \Rightarrow n = 3$$

یعنی در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2، جرم مادهٔ پرتوزا، ۳ بار نصف می‌شود.

$$n = \frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 3 = \frac{10 - 2/5}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = \frac{7/5}{3} = 2/5 \text{ روز}$$

گام دوم: در بازهٔ زمانی $(t_0 = 0)$ تا (روز $t_1 = 2/5$)، داریم:

$\Delta t = 2/5 - 0 = 2/5$ روز

$$m_1 = \frac{m_0}{2^n} \Rightarrow 72 = \frac{m_0}{2^1} \Rightarrow m_0 = 144\,g$$

$$n = \frac{\Delta t}{T_{\frac{1}{2}}} = \frac{2/5}{2/5} = 1$$

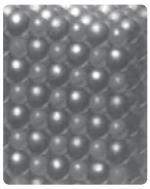
تیزپازی تست‌های مربوط به نیمه‌عمر را می‌توان با نصف‌کردن‌های متوالی نیز پاسخ داد.

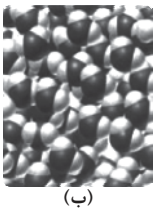
WWW.ArefOnline.ir

۷۶ در حالت خالص و جامد، ساختار ذره‌ای چند درصد از مواد داده‌شده با الگوی «الف» و ساختار ذره‌ای چند درصد از آن‌ها با الگوی «ب» همخوانی دارد؟

جامد مولکولی — جامد یونی

- پتاس سوزآور ← KOH
- فورمیک اسید ← HCOOH
- جوش‌شیرین ← $NaHCO_3$
- آهک ← CaO
- آلومینیم اکسید ← Al_2O_3
- هیدروژن کلرید ← HCl


(الف)


(ب)

۱) ۶۶ / ۷ ـ ۳۳ / ۳

۲) ۵۰ ـ ۳۳ / ۳

۳) ۶۶ / ۷ ـ ۱۶ / ۷

۴) ۸۳ / ۳ ـ ۱۶ / ۷

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

شکل «الف» ساختار کلی جامدهای یونی و شکل «ب» ساختار کلی مواد مولکولی را نشان می‌دهد:

ترکیب‌های یونی ← پتاس سوزآور (KOH)، جوش‌شیرین ($NaHCO_3$)، آهک (CaO)، آلومینیم اکسید (Al_2O_3) ← ۴ ماده از ۶ ماده

$$\frac{۴}{۶}\times ۱۰۰ = \frac{۲}{۳}\times ۱۰۰ \simeq ۶۶ / ۷$$

مواد مولکولی ← فورمیک اسید (HCOOH)، هیدروژن کلرید (HCl) ← ۲ ماده از ۶ ماده

$$\frac{۲}{۶}\times ۱۰۰ = \frac{۱}{۳}\times ۱۰۰ \simeq ۳۳ / ۳$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۷ **مخلوطی شامل ترکیب A، ۵ درصد جرمی آب و مقداری ناخالصی است. اگر پس از مدتی بر اثر جذب رطوبت، درصد جرمی آب و A به ترتیب به ۱۵ و ۶۸ برسد، درصد جرمی ناخالصی در نمونهٔ اولیه کدام است؟**

۱) ۱۹ ۲) ۲۱ ۳) ۲۳ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: جرم مخلوط اولیه را ۱۰۰ گرم در نظر می‌گیریم؛ پس جرم آب در مخلوط اولیه برابر ۵ گرم است. جرم ترکیب A را برابر x گرم و جرم ناخالصی را برابر y گرم فرض می‌کنیم.

$$\text{جرم مخلوط اولیه}\begin{cases}5\ g & H_2O\\ x\ g & A\\ y\ g & \text{ناخالصی}\end{cases}$$

گام دوم: اگر جرم رطوبت جذب‌شده را برابر z گرم در نظر بگیریم، جرم مخلوط ثانویه برابر $(100+z)$ گرم خواهد بود. پس می‌توان جرم آب جذب‌شده و جرم ترکیب $A(x)$ را حساب کرد.

$$\text{درصد جرمی آب در مخلوط ثانویه}=\frac{\text{جرم آب}}{\text{جرم مخلوط ثانویه}}\times 100 \Rightarrow \cancel{15}^{3}=\frac{5+z}{100+z}\times\cancel{100}^{20} \Rightarrow z=\frac{200}{17}\,g \text{ آب}$$

$$\text{درصد جرمی ترکیب A در مخلوط ثانویه}=\frac{\text{جرم A}}{\text{جرم مخلوط ثانویه}}\times 100 \Rightarrow 68=\frac{x}{100+z}\times 100 \Rightarrow 68=\frac{x}{100+\frac{200}{17}}\times 100$$

$$\Rightarrow 6800+800=100x \Rightarrow x=76\,g\ A$$

گام سوم: حال می‌توان جرم ناخالصی در مخلوط اولیه را حساب کرد.

$$5+x+y=100 \Rightarrow 5+76+y=100 \Rightarrow y=19\,g \text{ ناخالصی}$$

بنابراین درصد ناخالصی در نمونهٔ اولیه برابر ۱۹ بوده است.

تیزپازی

با جذب رطوبت، جرم A و ناخالصی در نمونه تغییر نمی‌کند؛ بنابراین نسبت درصد جرمی آن‌ها ثابت باقی خواهد ماند:

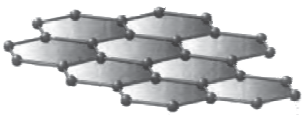
نمونهٔ اولیه: $\%x\ A$, $\%y$ ناخالصی , $\%5\ H_2O \Rightarrow x+y=100-5=95$

نمونهٔ دوم: $\%68\ A$, $\%y'$ ناخالصی , $\%15\ H_2O \Rightarrow y'=100-(68+15)=17$

$$\frac{x}{y}=\frac{68}{y'}=\frac{68}{17}=4 \Rightarrow x=4y \xrightarrow{x+y=95} 5y=95 \Rightarrow y=\%19$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۸ **اگر در شکل زیر، گلوله‌ها نشان‌دهندهٔ اتم کربن باشند، کدام مطلب دربارهٔ این ماده درست است؟**



۱) یک جامد کووالانسی شفاف است و مقاومت کششی آن ۵ برابر فولاد است.

۲) برخلاف گرافیت، بین همهٔ اتم‌های آن پیوند اشتراکی وجود دارد و یک جامد کووالانسی انعطاف‌پذیر است.

۳) تک‌لایه‌ای از گرافیت به ضخامت ۱ مول اتم کربن است.

۴) برخلاف گرافیت، جریان الکتریسیته را از خود عبور نمی‌دهد.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شکل نشان داده شده، تک‌لایه‌ای از گرافیت یا همان گرافن است. گرافن یک جامد کووالانسی انعطاف‌پذیر و شفاف است و مقاومت کششی آن ۱۰۰ برابر فولاد هم‌جرم خود می‌باشد.

گزینهٔ (۲): در ساختار لایه‌ای گرافیت، میان لایه‌ها نیروی جاذبهٔ وان‌دروالسی ضعیف وجود دارد و هیچ پیوند اشتراکی بین اتم کربن یک لایه با اتم کربن لایهٔ دیگر وجود ندارد.

گزینهٔ (۳): گرافن، تک‌لایه‌ای از گرافیت به ضخامت یک اتم کربن است.

گزینهٔ (۴): گرافن همانند گرافیت رسانای جریان برق است.

WWW.ArefOnline.ir

۷۹ **کدام مطلب دربارهٔ الماس (A)، سیلیسیم کربید (X) و سیلیسیم (D) نادرست است؟**

۱) آنتالپی پیوند موجود در ساختار D از A کم‌تر است.

۲) سختی، نقطهٔ ذوب و پایداری X از A کم‌تر و از D بیشتر است.

۳) هر سه، جامد کووالانسی بوده و ساختار بلوری آن‌ها مشابه و سه‌بعدی است.

۴) در ساختار این ۳ ماده، در مجموع ۴ نوع پیوند اشتراکی (از نظر نوع اتم‌های تشکیل‌دهندهٔ پیوند) وجود دارد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): شعاع اتمی کربن از شعاع اتمی سیلیسیم کوچک‌تر است؛ پس ترتیب طول پیوند، قدرت پیوند و آنتالپی پیوند در الماس (A)، سیلیسیم کربید (X) و سیلیسیم (D) به صورت زیر خواهد بود:

طول پیوند: $Si-Si > Si-C > C-C$

قدرت پیوند (آنتالپی پیوند): $Si-Si < Si-C < C-C$

گزینهٔ (۲): از آن‌جا که ساختار سه مادهٔ کووالانسی داده‌شده مشابه یکدیگر است، هر چه پیوندهای اشتراکی در ساختار یک جامد کووالانسی قوی‌تر باشد، نقطهٔ ذوب و سختی آن بیشتر خواهد بود؛ بنابراین داریم:

سختی و نقطهٔ ذوب: $A > X > D$

گزینهٔ (۳): هر ۳ ماده، جامد کووالانسی هستند و در ساختار آن‌ها هر اتم با ۴ اتم مجاور خود، ۴ پیوند اشتراکی یگانه تشکیل می‌دهد.

گزینهٔ (۴): در ساختار الماس، فقط پیوند $C-C$، در ساختار سیلیسیم کربید فقط پیوند $Si-C$ و در ساختار سیلیسیم فقط پیوند $Si-Si$ وجود دارد؛ یعنی در ساختار این ۳ ماده، در مجموع ۳ نوع پیوند اشتراکی وجود دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۸۰ کدام مطلب دربارهٔ یخ درست است؟ ۶

۱) شمار پیوندهای هیدروژنی در هر حلقهٔ موجود در ساختار آن، ۱/۵ برابر شمار پیوندهای هیدروژنی اطراف هر مولکول سازندهٔ آن است. ۴

۲) جامدی دیرگداز با چینش سه‌بعدی و منظم است که موجب استحکام ویژهٔ آن شده است.

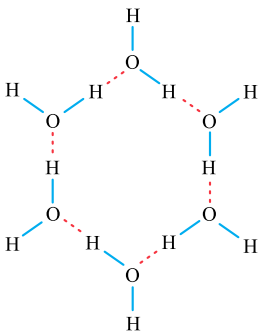
۳) اتم‌های اکسیژن در رأس حلقه‌های هشت‌ضلعی آن قرار داشته و با دو پیوند اشتراکی و دو پیوند هیدروژنی به ۴ اتم هیدروژن متصل هستند.

۴) در حالت خالص و تراش‌خورده، شفاف، زیبا و سخت است و در ساختار آن فضای خالی مشاهده نمی‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در ساختار یخ، اطراف هر مولکول آب، ۴ پیوند هیدروژنی وجود دارد. از طرفی شمار پیوندهای هیدروژنی در حلقه‌های شش‌ضلعی موجود در ساختار یخ، برابر ۶ است:



$$\frac{۶}{۴} = ۱/۵$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۲): یخ جزء مواد مولکولی و جامدی زودگداز است.

گزینهٔ (۳): در ساختار یخ حلقه‌های شش‌ضلعی وجود دارد، نه هشت‌ضلعی!

گزینهٔ (۴): در ساختار یخ، فضاهای خالی وجود دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۸۱ کدام مطلب درست است؟

۱) در ساختار مواد کووالانسی، میان شمار معینی از اتم‌ها پیوند اشتراکی وجود دارد؛ به همین دلیل این مواد دیرگداز هستند.

۲) آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش یک مادهٔ مولکولی، به طور عمده به جفت‌الکترون‌های پیوندی و ناپیوندی موجود در ساختار آن وابسته است.

۳) برای توصیف اغلب ترکیب‌های آلی، می‌توان از واژه‌های شیمیایی رایجی مانند فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

۴) پایدارترین دگرشکل ششمین عنصر جدول تناوبی، ساختار مشابهی با چهاردهمین عنصر جدول تناوبی دارد.
(گرافیت ← ششمین عنصر جدول تناوبی) (سیلیسیم ← چهاردهمین عنصر جدول تناوبی)

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

اغلب ترکیب‌های آلی جزء مواد مولکولی‌اند؛ بنابراین برای آن‌ها می‌توان از واژه‌هایی مانند فرمول مولکولی و نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در ساختار مواد کووالانسی، میان همهٔ اتم‌ها پیوند اشتراکی وجود دارد.

گزینهٔ (۲): آنتالپی تبخیر و نقطهٔ جوش یک مادهٔ مولکولی که جزء رفتارهای فیزیکی است، به نیروهای بین مولکولی وابسته است.

گزینهٔ (۴): ششمین و چهاردهمین عنصرهای جدول تناوبی به ترتیب، کربن و سیلیسیم هستند. پایدارترین دگرشکل (آلوتروپ) کربن، گرافیت است. ساختار ذره‌ای گرافیت (جامد کووالانسی با چینش دوبعدی) متفاوت با ساختار ذره‌ای سیلیسیم (جامد کووالانسی سه‌بعدی) است.

WWW.ArefOnline.ir

۸۲ با توجه به نقشه‌های پتانسیل الکتروستاتیکی داده‌شده، کدام مطلب درست است؟



۱) گشتاور دوقطبی مولکول (II) برابر صفر است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری نمی‌کند.

۲) مولکول (I) می‌تواند C_2H_4 باشد که توزیع بار الکتریکی پیرامون اتم‌های مرکزی در آن، متقارن است.

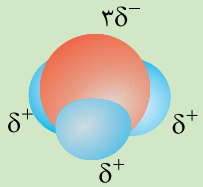
۳) هر اتم کناری در مولکول (II) دارای بار جزئی $+\delta$ و اتم مرکزی در آن دارای بار جزئی -3δ است.

۴) مولکول (II) می‌تواند ترکیب هیدروژن‌دار نخستین عنصر گروه ۱۳ جدول دوره‌ای باشد.

$_5B$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی، اتم‌های به رنگ آبی، دارای بار جزئی مثبت $(+\delta)$ و اتم‌های به رنگ قرمز، دارای بار جزئی منفی $(-\delta)$ هستند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در مولکول (II)، توزیع بار الکتریکی پیرامون اتم مرکزی یکنواخت و متقارن نیست؛ در نتیجه این مولکول قطبی و گشتاور دوقطبی آن بزرگ‌تر از صفر است و در میدان الکتریکی جهت‌گیری می‌کند.

گزینهٔ (۲): مولکول اتیلن (C_2H_4) خطی نیست؛ بنابراین شکل (I) نمی‌تواند مربوط به اتیلن باشد. این شکل می‌تواند مربوط به مولکول اتین یا همان استیلن (C_2H_2) باشد.

گزینهٔ (۴): فرمول ترکیب هیدروژن‌دار نخستین عنصر گروه ۱۳ به صورت XH_3 است که اتم مرکزی در آن، جفت‌الکترون ناپیوندی ندارد؛ بنابراین فرم کلی ساختار آن به صورت  است و نه  !

امتحان نهایی

با توجه به نقشه‌های پتانسیل الکتروستاتیکی شکل‌های (۱ و ۲)، به پرسش‌های مطرح‌شده پاسخ دهید.

(سؤال ۹ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸)

الف) گشتاور دو قطبی در کدام شکل را می‌توان برابر با صفر در نظر گرفت؟ چرا؟

ب) کدام شکل می‌تواند نشان‌دهندهٔ مولکول «SO_2» باشد؟

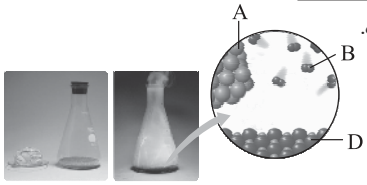
پ) در نقشهٔ پتانسیل الکتروستاتیکی رنگ سرخ نشان‌دهندهٔ چیست؟



شکل (۱) شکل (۲)

WWW.ArefOnline.ir

۸۳ **با توجه به شکل زیر که مربوط به تشکیل سدیم کلرید است، کدام گزینه نادرست است؟**



۱) مادهٔ D نسبت به مادهٔ B در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع است.

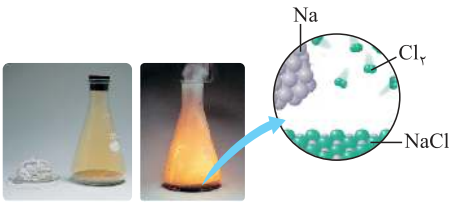
۲) بر خلاف D، مادهٔ A در حالت جامد نیز رسانای جریان برق است.

۳) در شبکهٔ بلور فراوردهٔ حاصل، یون‌های همنام به دو صورت، یکی در رأس‌ها و مرکز مکعب و دیگری در مرکز ضلع‌ها و مرکز وجه‌ها قرار گرفته‌اند.

۴) نیروهای میان یون‌های ناهمنام در هنگام تشکیل جامد D بر نیروهای میان یون‌های همنام غلبه کرده و این دو نوع نیرو، در تمام جهت‌ها به همهٔ یون‌ها وارد می‌شوند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ با توجه به شکل، مادهٔ A، فلز Na، مادهٔ B گاز Cl_2 و مادهٔ D، نمک NaCl است.



سدیم کلرید ← گاز کلر + فلز سدیم

بررسی گزینه‌ها:

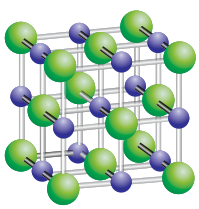
گزینهٔ (۱): به طور کلی هر چه تفاوت بین نقطهٔ ذوب و جوش مادهٔ خالص بیشتر باشد، آن ماده در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع بوده و نیروهای جاذبهٔ میان ذره‌های آن ماده قوی‌تر است. مادهٔ D $(NaCl)$ یک ترکیب یونی و مادهٔ B (Cl_2) یک مادهٔ مولکولی است؛ همان‌طور که می‌دانید پیوند یونی به مراتب قوی‌تر از نیروهای جاذبهٔ وان‌دروالسی (نیروی جاذبهٔ بین مولکولی در Cl_2) است؛ بنابراین NaCl در گسترهٔ دمایی بیشتری به حالت مایع وجود دارد.

گزینهٔ (۲): مادهٔ D $(NaCl)$ یک ترکیب یونی است و مادهٔ A (Na) یک فلز است. ترکیب‌های یونی برخلاف فلزها، در حالت جامد رسانای جریان برق نیستند.

نکته

ترکیب یونی
- در حالت جامد ← نارسانا
- در حالت مذاب و محلول ← رسانا

گزینهٔ (۳): مدل گلوله و میلهٔ شبکهٔ بلور NaCl به صورت زیر است:



در این ساختار، یون‌های Cl^- (●) در رأس‌ها و مرکز وجه‌ها و یون‌های Na^+ (●) در مرکز ضلع‌ها و مرکز مکعب قرار دارند.

گزینهٔ (۴): هنگام تشکیل ترکیب یونی، پس از دادوستد الکترون و تشکیل یون‌ها، میان یون‌های ناهمنام، نیروی جاذبه و میان یون‌های همنام، نیروی دافعه، در تمام جهت‌ها وارد می‌شود. وجود جامدهای یونی در طبیعت حاکی از آن است که نیروهای جاذبهٔ میان یون‌های ناهمنام، بر نیروهای دافعهٔ میان یون‌های همنام غالب است.

WWW.ArefOnline.ir

۸۴ با توجه به جدول زیر که مربوط به دو عنصر در دورهٔ سوم جدول تناوبی است، فرمول ترکیب حاصل از این دو عنصر کدام است؟

عنصر	شعاع اتم (pm)	شعاع یون (pm)	نسبت مقدار بار به شعاع یون
A	۱۰۲	۱۸۴	$۱/۰۹\times۱۰^{-۲}$
B	۱۴۳	۵۶	$۵/۳۶\times۱۰^{-۲}$

۱) $A_۲B_۳$ ۲) AB ۳) $B_۲A_۳$ ۴) $BA_۲$

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی

از آن‌جا که شعاع یون منفی هر عنصر از شعاع اتمی آن، بزرگ‌تر است، عنصر A یک نافلز است که می‌تواند به آنیون تبدیل شود. هم‌چنین به این علت که شعاع یون مثبت هر عنصر از شعاع اتمی آن، کوچک‌تر است، عنصر B یک فلز است که می‌تواند به کاتیون تبدیل شود؛ حال می‌توان با توجه به نسبت مقدار بار به شعاع یون عناصر A و B، بار یون پایدار آن‌ها را حساب کرد:

$$\frac{\text{مقدار بار آنیون عنصر A}}{\text{شعاع آنیون عنصر A}} = ۱/۰۹\times۱۰^{-۲} \Rightarrow \frac{\text{مقدار بار آنیون عنصر A}}{۱۸۴} = ۱/۰۹\times۱۰^{-۲} \Rightarrow \text{مقدار بار آنیون عنصر A} = ۲$$

$$\Rightarrow \text{آنیون عنصر A} = A^{۲-}$$

$$\frac{\text{مقدار بار کاتیون عنصر B}}{\text{شعاع کاتیون عنصر B}} = ۵/۳۶\times۱۰^{-۲} \Rightarrow \frac{\text{مقدار بار کاتیون عنصر B}}{۵۶} = ۵/۳۶\times۱۰^{-۲}$$

$$\Rightarrow \text{مقدار بار کاتیون عنصر B} = ۳ \Rightarrow \text{کاتیون عنصر B} = B^{۳+}$$

بنابراین فرمول ترکیب به‌دست‌آمده از دو عنصر A و B به صورت $B_۲A_۳$ خواهد بود:

$$B^{۳+}A^{۲-} \longrightarrow B_۲A_۳$$

WWW.ArefOnline.ir

۸۵ **با توجه به عنصرهای مشخص‌شده در جدول داده‌شده، کدام مطلب درست است؟**

R												G		J			
	D												E	Q			
Z														M			

۱) کم‌ترین آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب حاصل از واکنش این عنصرها، مربوط به دو عنصر D و G است.

۲) نیروی جاذبه بین یون‌ها در ترکیب حاصل از G و Z کم‌تر از ترکیب حاصل از D و J است.

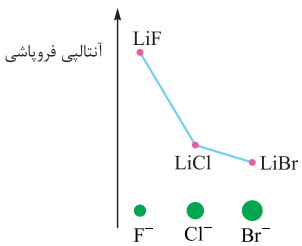
۳) نقطهٔ ذوب ترکیب حاصل از واکنش عنصرهای Z و M بیشتر از ترکیب حاصل از واکنش عنصرهای D و E است.

۴) تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکهٔ بلور ترکیب‌های RJ و RQ، بیشتر از این تفاوت در ترکیب‌های RQ و RM است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی

ترکیب‌های RJ، RQ و RM به ترتیب LiF، LiCl و LiBr هستند. با توجه به نمودار کتاب درسی، با افزایش شعاع یون هالید، تفاوت آنتالپی فروپاشی شبکهٔ ترکیب یونی حاصل از یک فلز قلیایی با دو هالوژن متوالی، کاهش می‌یابد.



تفاوت آنتالپی فروپاشی: $(LiF - LiCl) > (LiCl - LiBr)$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): کم‌ترین آنتالپی فروپاشی شبکه مربوط به ترکیب حاصل از Z و M است، زیرا کم‌ترین مقدار بار یون و بیشترین شعاع یون، مربوط به این دو عنصر است.

$$Z^{+}M^{-} \Rightarrow ZM$$

گزینهٔ (۲): فرمول ترکیب حاصل از Z و G به صورت Z_3G و فرمول ترکیب حاصل از D و J به صورت DJ_2 است. با توجه به بیشتربودن مجموع بار یک کاتیون و یک آنیون در Z_3G $(1+3=4)$ نسبت به DJ_2 $(2+1=3)$، آنتالپی فروپاشی Z_3G از DJ_2 بیشتر است؛ در نتیجه می‌توان گفت که نیروی جاذبه بین یون‌های سازندهٔ Z_3G بیشتر از DJ_2 است.

گزینهٔ (۳): آنتالپی فروپاشی شبکه و در نتیجه نقطهٔ ذوب ترکیب حاصل از Z و M کم‌تر از ترکیب حاصل از D و E است.

آنتالپی فروپاشی شبکه و نقطهٔ ذوب: $ZM < DE \Rightarrow ZM < DE$

مجموع بار یک کاتیون و یک آنیون: $\underset{1+1=2}{ZM} < \underset{2+2=4}{DE}$

WWW.ArefOnline.ir

۸۶ درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب کدام است؟

- در ساختار فلزها، الکترون‌ها و کاتیون‌ها در دریای الکترونی، آزادانه در حال حرکت هستند.
- دریای الکترونی، عامل حفظ‌کنندهٔ چیدمان کاتیون‌ها در شبکهٔ بلوری فلز است.
- مطابق مدل دریای الکترونی، فلزها با سست‌ترین الکترون‌های خود یک دریای الکترونی می‌سازند.
- الکترون‌های موجود در دریای الکترونی فلزها را نمی‌توان تنها متعلق به یک اتم معین دانست.

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ نادرست
۲) نادرست ـ درست ـ درست ـ درست
۳) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۴) نادرست ـ درست ـ نادرست ـ درست

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت اول، نادرست و عبارت‌های دوم، سوم و چهارم درست هستند.

بررسی عبارت نادرست:

عبارت اول: در ساختار فلزها، سست‌ترین الکترون‌های موجود در اتم (الکترون‌های ظرفیت)، آزادانه در فضای میان کاتیون‌ها در حال حرکت هستند و کاتیون‌ها دارای آرایش منظمی در سه بعد می‌باشند.

WWW.ArefOnline.ir

۸۷ کدام موارد از مطالب زیر، درست‌اند؟

الف) تیتانیم فلزی از دستهٔ d است که در ویژگی‌هایی مانند سختی و تنوع اعداد اکسایش، با فلزهای دستهٔ s و p تفاوت دارد.

ب) مهم‌ترین دلیل استفاده از تیتانیم در پوشش بیرونی موزهٔ گوگنهایم، سبک‌بودن و درخشندگی آن است.

پ) چگالی تیتانیم از فولاد کم‌تر و مقاومت آن در برابر سایش، از فولاد، بیشتر است.

ت) نقطهٔ ذوب و مقاومت گرمایی بالای تیتانیم، می‌تواند یکی از دلایل استفاده از این فلز در ساخت موتور جت باشد.

ث) نیتینول، آلیاژی هوشمند از تیتانیم و نیکل است که از آن در ساخت قاب عینک و سازه‌های ارتودنسی استفاده می‌شود.

۱) الف ـ پ ـ ت
۲) ب ـ پ ـ ث
۳) الف ـ ت ـ ث
۴) ت ـ ث

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف»، «ت» و «ث» درست هستند.

نکته

جدول روبه‌رو برخی از ویژگی‌های تیتانیم را در مقایسه با فولاد زنگ‌نزن نشان می‌دهد.

ویژگی / ماده	تیتانیم	فولاد
نقطهٔ ذوب ($^\circ C$)	۱۶۶۷	۱۵۳۵
چگالی ($g.mL^{-1}$)	۴/۵۱	۷/۹۰
واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا	ناچیز	متوسط
مقاومت در برابر خوردگی	عالی	ضعیف
مقاومت در برابر سایش	عالی	عالی

۱) نقطهٔ ذوب: فولاد < تیتانیم

۲) چگالی: فولاد > تیتانیم

۳) واکنش با ذره‌های موجود در آب دریا: فولاد < تیتانیم

۴) مقاومت در برابر خوردگی: فولاد < تیتانیم

۵) مقاومت در برابر سایش: فولاد = تیتانیم

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) مهم‌ترین دلیل استفاده از تیتانیم در پوشش بیرونی موزهٔ گوگنهایم اسپانیا، مقاومت بالای این فلز در برابر خوردگی و سایش است.

پ) چگالی تیتانیم از چگالی فولاد کم‌تر است، ولی مقاومت در برابر سایش، برای هر دو، تقریباً با هم برابر است.

فولاد ≃ تیتانیم :مقاومت در برابر سایش ؛ فولاد > تیتانیم :چگالی

WWW.ArefOnline.ir

۸۸ یون سیلیکات از نظر شمار اتم‌های اکسیژن در فرمول شیمیایی، عدد اکسایش اتم مرکزی و نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی، به ترتیب مشابه کدام یون‌ها است؟

SiO_4^{4-}

۱) فسفات ـ سولفات ـ کربنات — SO_4^{2-}

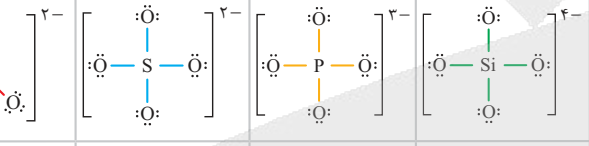
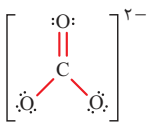
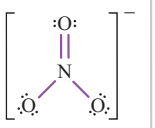
۲) سولفات ـ کربنات ـ فسفات — PO_4^{3-}، CO_3^{2-}

۳) سولفات ـ نیترات ـ فسفات

۴) فسفات ـ کربنات ـ نیترات — NO_3^-

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

ویژگی / یون	سیلیکات	فسفات	سولفات	کربنات	نیترات
فرمول شیمیایی	SiO_4^{4-}	PO_4^{3-}	SO_4^{2-}	CO_3^{2-}	NO_3^-
ساختار لوویس					
شمار اتم‌های اکسیژن	۴	۴	۴	۳	۳
عدد اکسایش اتم مرکزی	$Si+4(-2)=-4 \Rightarrow Si-8=-4 \Rightarrow Si=+4$	$P+4(-2)=-3 \Rightarrow P-8=-3 \Rightarrow P=+5$	$S+4(-2)=-2 \Rightarrow S-8=-2 \Rightarrow S=+6$	$C+3(-2)=-2 \Rightarrow C-6=-2 \Rightarrow C=+4$	$N+3(-2)=-1 \Rightarrow N-6=-1 \Rightarrow N=+5$
نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{12}=\frac{1}{3}$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$	$\frac{4}{8}=\frac{1}{2}$

با توجه به جدول فوق، یون سیلیکات (SiO_4^{4-}) از نظر شمار اتم‌های اکسیژن در فرمول شیمیایی (۴)، مشابه یون‌های سولفات (SO_4^{2-}) و فسفات (PO_4^{3-})، از نظر عدد اکسایش اتم مرکزی (+۴)، مشابه یون کربنات (CO_3^{2-}) و از نظر نسبت شمار جفت‌الکترون‌های پیوندی به ناپیوندی ($\frac{1}{3}$)، مشابه یون‌های سولفات (SO_4^{2-}) و فسفات (PO_4^{3-}) است.

WWW.ArefOnline.ir

۸۹ **مادهٔ خالصی در حالت مایع رسانای جریان برق است. کدام مطلب دربارهٔ این ماده به یقین درست است؟**

یونی یا فلزی

۱) در حالت جامد شکننده است.

۲) برای توصیف آن می‌توان از واژهٔ شیمیایی نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

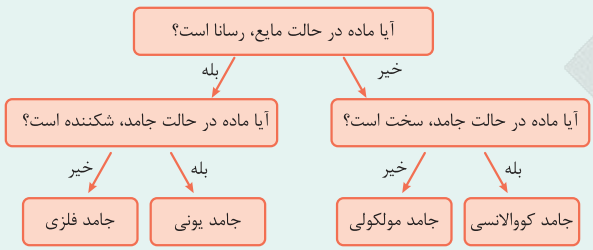
۳) اگر در اثر ضربهٔ چکش خرد نشود، در حالت جامد نیز رسانای جریان برق است.

۴) واحدهای سازندهٔ آن، یون‌هایی با بار مثبت و منفی هستند.

پاسخ: گزینهٔ ۳

درس Box

مواد خالص را براساس رفتارهای آن‌ها، مطابق نمودار مقابل می‌توان به چهار دستهٔ مواد کووالانسی، مولکولی، یونی و فلزی تقسیم کرد:



پاسخ خیلی تشریحی ✔ مواد یونی و فلزی در حالت مایع (مذاب) رسانای جریان برق هستند.

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مادهٔ مورد نظر می‌تواند فلز باشد و فلزها برخلاف مواد یونی در حالت جامد چکش‌خوار بوده و شکننده نیستند.

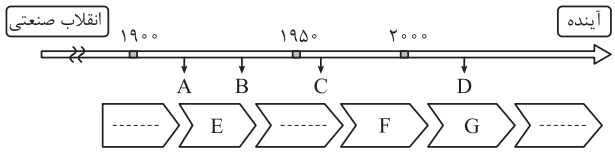
گزینهٔ (۲): فقط برای توصیف مواد مولکولی می‌توان از واژهٔ رایجی مانند نیروهای بین مولکولی استفاده کرد.

گزینهٔ (۳): فلزها در حالت جامد چکش‌خوار و رسانای جریان برق هستند.

گزینهٔ (۴): واحدهای سازندهٔ مواد یونی، کاتیون‌ها و آنیون‌ها هستند اما در این‌جا مادهٔ مورد نظر می‌تواند فلز نیز باشد.

WWW.ArefOnline.ir

۹۰ **با توجه به نمودار زیر که چند نمونه فراوردهٔ حاصل از فناوری‌های شیمیایی در گذر زمان را نشان می‌دهد، کدام موارد به درستی معرفی شده‌اند؟**



۱) A: اوره، B: آمونیاک، G: مراقبت‌های بهداشتی

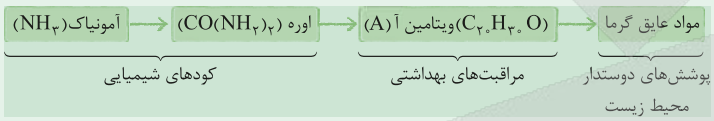
۲) E: پوشش‌های دوستدار محیط زیست، C: ویتامین آ، D: مواد عایق گرما

۳) B: اوره، C: ویتامین آ، G: پوشش‌های دوستدار محیط زیست

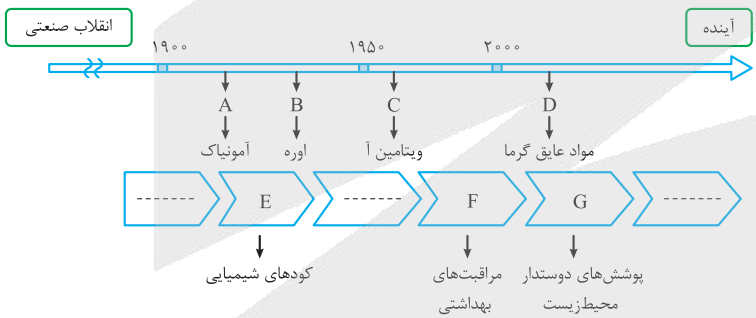
۴) A: ویتامین آ، C: مواد عایق گرما، F: مراقبت‌های بهداشتی

پاسخ: گزینهٔ ۳

نکته طبق نمودار کتاب درسی، ترتیب زمانی شناسایی و تولید چند فراوردهٔ حاصل از فناوری‌های شیمیایی پس از انقلاب صنعتی به صورت زیر است:

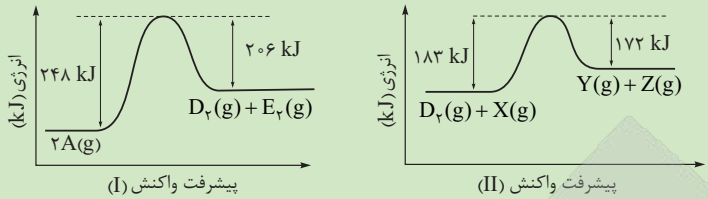


پاسخ خیلی تشریحی پس از انقلاب صنعتی ابتدا کودهای شیمیایی و بعد فراورده‌های مربوط به مراقبت‌های بهداشتی و بعد از آن فراورده‌های مربوط به پوشش‌های دوستدار محیط زیست‌شناسایی و تولید شدند؛ بنابراین موارد A تا G در نمودار سؤال، به صورت زیر هستند:



WWW.ArefOnline.ir

۹۱ **اگر واکنش‌های زیر در شرایط یکسان انجام شوند، با توجه به نمودارهای داده‌شده، درستی یا نادرستی مطالب زیر، به ترتیب، کدام است؟**



- **سرعت تشکیل گاز D_2 (در واکنش I) از سرعت مصرف آن (در واکنش II) کم‌تر است.**
- **تفاوت کم‌ترین انرژی مورد نیاز برای انجام دو واکنش، برابر ۵۶ کیلوژول است.**
- **به ازای مصرف ۱ مول گاز A در واکنش I، ۲۱ کیلوژول گرما آزاد می‌شود.**
- **تفاوت آنتالپی دو واکنش برابر ۳۱ کیلوژول است.**

۱) درست ـ درست ـ نادرست ـ درست
۲) درست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست
۴) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های اول و چهارم، درست و عبارت‌های دوم و سوم، نادرست‌اند.

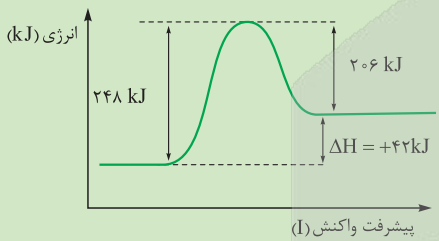
بررسی عبارت‌ها:

عبارت اول: انرژی فعال‌سازی واکنش (I) برابر ۲۴۸ kJ و انرژی فعال‌سازی واکنش (II) برابر ۱۸۳ kJ است. می‌دانیم، هر چه انرژی فعال‌سازی واکنش کم‌تر باشد، سرعت آن واکنش، بیشتر خواهد بود؛ پس سرعت مصرف D_2 در واکنش(II) نسبت به سرعت تولید آن در واکنش (I)، بیشتر است.

عبارت دوم: انرژی مورد نیاز برای انجام واکنش همان E_a واکنش است.

$$E_{a(I)} - E_{a(II)} = ۲۴۸ - ۱۸۳ = ۶۵\,kJ$$

عبارت سوم: با توجه به نمودار داده‌شده، آنتالپی واکنش (I) برابر ۴۲+ کیلوژول است و واکنش گرماگیر است؛ پس گرما مصرف می‌شود، نه آزاد!



$$2A(g) + ۴۲\,kJ \rightarrow D_2(g) + E_2(g)$$

استفاده از کسر تبدیل:

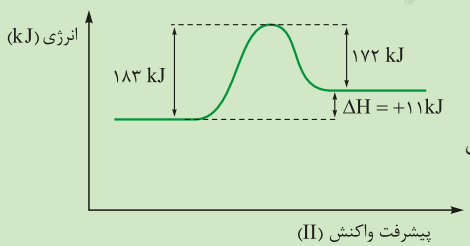
$$?\,kJ\ \text{گرما} = ۱\,mol\,A \times \frac{۴۲\,kJ\ \text{گرما}}{۲\,mol\,A} = ۲۱\,kJ$$ گرما مصرف می‌شود.

یه‌جور دیگه

استفاده از کسر تناسب:

$$\frac{\text{مول}}{\underbrace{\text{ضریب}}_{\text{مادهٔ A}} \times ۱} = \frac{Q}{\underbrace{|\Delta H|}_{\text{انرژی}}} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{Q}{|۴۲|} \Rightarrow Q = ۲۱\,kJ$$

عبارت چهارم: با توجه به نمودارهای داده‌شده، آنتالپی واکنش (I) برابر ۴۲ kJ+ و آنتالپی واکنش (II) برابر ۱۱ kJ+ است؛ پس داریم:

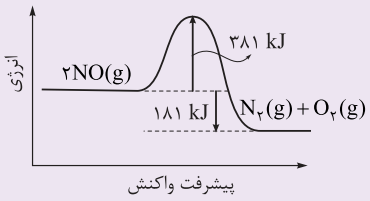


$$\text{تفاوت آنتالپی دو واکنش} = ۴۲ - ۱۱ = ۳۱\,kJ$$

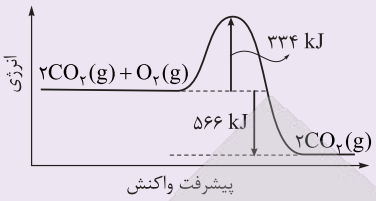
WWW.ArefOnline.ir

امتحان نهایی

با توجه به نمودارهای واکنش (۱ و ۲) به پرسش‌ها پاسخ دهید. (سؤال ۱۰ ـ امتحان نهایی شهریور ۱۳۹۸)



واکنش (۱)



واکنش (۲)

الف) انرژی فعال‌سازی «واکنش ۱» را تعیین کنید.

ب) چرا این واکنش‌ها در دماهای پایین انجام نمی‌شوند یا بسیار کند هستند؟

پ) کدام واکنش گرمای بیشتری آزاد می‌کند؟ چرا؟

ت) سرعت کدام واکنش در شرایط یکسان کمتر است؟ چرا؟

WWW.ArefOnline.ir

۹۲ کدام موارد از مطالب زیر درست‌اند؟

الف) با استفاده از طیف‌سنجی فروسرخ می‌توان به شناسایی گروه‌های عاملی، آلاینده‌هایی مانند CO و NO_x و مولکول‌ها در فضای بین ستاره‌ای پرداخت.

ب) برای شناسایی مواد، تنها می‌توان از برهم‌کنش امواج فروسرخ با آن‌ها بهره برد.

پ) دستگاه MRI، نمونه‌ای از کاربرد طیف‌سنجی در علم پزشکی است.

ت) جسمی که به رنگ سبز دیده می‌شود، تمام طول موج‌های مربوط به نور سبز را جذب می‌کند و سایر طول موج‌ها را عبور می‌دهد یا بازتاب می‌کند.

۱) الف ـ ب ۲) ب ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌های نادرست:

ب) افزون بر طیف‌سنجی فروسرخ، می‌توان از برهم‌کنش پرتوهای فرابنفش، نور مرئی، امواج رادیویی و ... نیز برای شناسایی مواد گوناگون بهره برد.

ت) جسمی که به رنگ سبز دیده می‌شود، همهٔ نورها (به‌جز نور سبز) را جذب و نور سبز را بازتاب کرده و یا عبور داده است.

WWW.ArefOnline.ir

۹۳ با توجه به جدول زیر که مربوط به واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن است، کدام گزینه نادرست است؟

ردیف	شرایط آزمایش	دما (°C)	سرعت واکنش
الف	بدون حضور کاتالیزگر	۲۵	ناچیز
ب	ایجاد جرقه در مخلوط	۲۵	؟ ← انفجاری
پ	در حضور پودر روی	۲۵	سریع
ت	در حضور تور پلاتینی	۲۵	انفجاری

۱) به ازای مصرف جرم یکسان واکنش‌دهنده‌ها، مقدار گرمای آزادشده در آزمایش (پ) با گرمای آزادشده در آزمایش (ت) تفاوتی ندارد.

۲) تأثیر پودر روی در کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش، کم‌تر از تأثیر توری پلاتینی است.

۳) سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها در آزمایش (پ)، بالاتر از سطح انرژی آن‌ها در آزمایش (الف) است.

۴) سرعت واکنش در آزمایش (ب) مشابه سرعت واکنش در آزمایش (ت) است.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

کاتالیزگر با تغییر مسیر واکنش، انرژی فعال‌سازی را کاهش داده و از این طریق سرعت واکنش را افزایش می‌دهد ولی روی سطح انرژی مواد واکنش‌دهنده و فراورده بی‌تأثیر است؛ بنابراین سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها در آزمایش‌های «الف» و «پ» با هم برابر است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): به ازای مصرف مقدار یکسانی از واکنش‌دهنده‌ها، گرمای آزادشده در هر شرایطی، (در حضور یا عدم حضور کاتالیزگر یا در حضور کاتالیزگرهای مختلف) در دمای $25\ ^\circ C$ یکسان است، زیرا کاتالیزگرها روی آنتالپی واکنش (ΔH) بی‌تأثیرند.

گزینهٔ (۲): واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای $25\ ^\circ C$ در حضور پودر روی، سریع و در حضور توری پلاتینی، انفجاری است؛ *انگار* توری پلاتینی کاتالیزگر بهتری نسبت به پودر روی است و انرژی فعال‌سازی واکنش را بیشتر کاهش می‌دهد؛ بنابراین تأثیر پودر روی در کاهش انرژی فعال‌سازی واکنش، کم‌تر از تأثیر توری پلاتینی است.

گزینهٔ (۴): واکنش میان گازهای هیدروژن و اکسیژن در دمای $25^\circ C$، هم با ایجاد جرقه در مخلوط و هم در حضور توری پلاتینی، به صورت انفجاری انجام می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

۹۴ کدام گزینه در رابطه با مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی، نادرست است؟

۱) همهٔ واکنش‌های حذف آلاینده‌ها در این مبدل‌ها، گرماده هستند.

۲) در سطح سرامیک‌های درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ میلی‌متر وجود دارد.

۳) کارایی این مبدل‌ها به هنگام روشن و گرم شدن خودرو به‌ویژه در روزهای سرد زمستان، کاهش می‌یابد.

۴) فلزهای رودیم، پالادیم و پلاتین، کاتالیزگرهای مناسبی برای کاهش یا حذف آلاینده‌های خروجی از اگزوز خودروها، در این مبدل‌ها هستند.

۱) سوختن هیدروکربن‌های نسوخته
۲) ترکیب‌شدن CO با O_2 و تولید CO_2
۳) تجزیهٔ NO به گازهای N_2 و O_2

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✔

در سطح سرامیک‌ها درون مبدل کاتالیستی، توده‌های فلزی با قطر ۲ تا ۱۰ نانومتر وجود دارند نه ۲ تا ۱۰ میلی‌متر!

در مورد گزینهٔ (۱) لازم به یادآوری است که مبدل‌های کاتالیستی خودروهای بنزینی برای کاهش مقدار یا حذف آلاینده‌های CO، NO و C_xH_y (هیدروکربن‌های نسوخته) به کار می‌روند و هر سه واکنش حذف این آلاینده‌ها، گرماده هستند.

۱) واکنش حذف گاز کربن مونوکسید: $2CO(g)+O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)\ ;\ \Delta H<0$

۲) واکنش حذف هیدروکربن نسوخته: $C_xH_y(g)+(x+\frac{y}{4})O_2(g) \rightarrow xCO_2(g)+\frac{y}{2}H_2O(g)\ ;\ \Delta H<0$

۳) واکنش حذف گاز نیتروژن مونوکسید: $2NO(g) \rightarrow N_2(g)+O_2(g)\ ;\ \Delta H<0$

WWW.ArefOnline.ir

۹۵ در یک ظرف دربسته، مقداری از گازهای هیدروژن و کربن دی‌سولفید وارد شده است تا تعادل زیر برقرار شود. اگر در لحظهٔ تعادل، ۰/۱ مول از هر واکنش‌دهنده، ۰/۵ مول گاز متان و ۱ مول گاز هیدروژن سولفید در مخلوط تعادلی وجود داشته باشد، حجم ظرف واکنش چند لیتر است؟

$$CS_2(g)+4H_2(g) \rightleftharpoons CH_4(g)+2H_2S(g) \quad K=1/25\times10^6$$

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۵ ۴) ۱۰

پاسخ: گزینهٔ ۳

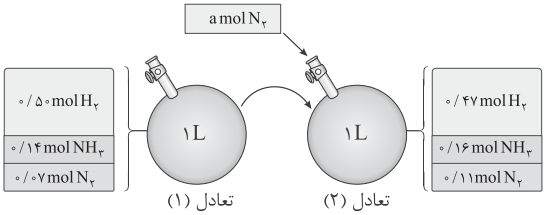
پاسخ خیلی تشریحی ✔ اگر حجم ظرف واکنش را V لیتر در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$K=\frac{[CH_4][H_2S]^2}{[CS_2][H_2]^4} \Rightarrow 1/25\times10^6=\frac{\frac{0/5}{V}\times(\frac{1}{V})^2}{\frac{0/1}{V}\times(\frac{0/1}{V})^4}=\frac{0/5\times V^2}{0/1\times(0/1)^4} \Rightarrow 1/25\times10^6\times10^{-5}=\underbrace{0/5}_{\frac{1}{2}}V^2$$

$$\Rightarrow V^2=2/5\times10=25 \Rightarrow V=5\ L$$

WWW.ArefOnline.ir

۹۶ در محفظه‌ای به حجم یک لیتر، تعادل $N_2(g)+3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$ در دمای $200\ ^\circ C$ برقرار است. شکل زیر، افزودن مقداری نیتروژن را به این سامانه در دمای ثابت نشان می‌دهد. با توجه به شکل، مقدار نیتروژن افزوده‌شده به سامانه در شرایط STP، چند لیتر حجم دارد و مقدار ثابت تعادل (۲) کدام است؟



۱) ۲/۰۵ ـ ۱/۱۲

۲) ۲/۰۵ ـ ۰/۸۹۶

۳) ۲/۲۴ ـ ۱/۱۲

۴) ۲/۲۴ ـ ۰/۸۹۶

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

گام اول: ابتدا تعداد مول N_2 اضافه‌شده (a) را به دست می‌آوریم:

	N_2 +	$3H_2 \rightleftharpoons 2NH_3$	
تعداد مول اولیه	$0/07+a$	$0/5$	$0/14$
تعداد مول نهایی	$0/07+a-x$	$0/5-3x$	$0/14+2x$

با توجه به اطلاعات مسئله، $0/5-3x=0/47$ و در نتیجه $x=0/01\ mol$ است، بنابراین:

$$\text{مول نهایی } N_2 = \text{مول اولیهٔ } N_2 + \text{مول اضافه‌شدهٔ } N_2 - \text{مول مصرف‌شدهٔ } N_2 \Rightarrow 0/11=0/07+a-0/01 \Rightarrow a=0/05\ mol$$

گام دوم: حجم N_2 اضافه‌شده را در شرایط STP محاسبه می‌کنیم:

$$0/05\ mol\ N_2 \times \frac{22/4\ L\ N_2}{1\ mol\ N_2} = 1/12\ L\ N_2$$

گام سوم: در دمای ثابت، مقدار ثابت تعادل واکنش ثابت است؛ بنابراین برای محاسبهٔ ثابت تعادل، می‌توانیم به جای استفاده از غلظت‌های تعادل ۲، از غلظت‌های تعادل ۱ که ساده‌تر هستند، استفاده کنیم؛ با توجه به حجم یک لیتری محفظه واکنش داریم:

$$K=\frac{[NH_3]^2}{[N_2][H_2]^3}=\frac{(0/14)^2}{0/07\times(0/5)^3}=\frac{0/14\times0/14}{0/07\times(\frac{1}{2})^3}=2\times0/14\times8=2/24$$

WWW.ArefOnline.ir

۹۷ در فرایند تولید آمونیاک به روش هابر، کدام عامل درصد مولی فراورده در مخلوط تعادلی را افزایش می‌دهد، اما بر مقدار ثابت تعادل واکنش بی‌تأثیر است؟

$N_2(g) + 3H_2(g) \rightleftharpoons 2NH_3(g)$

۱) افزایش فشار

۲) کاهش دما

۳) افزایش دما

۴) کاهش فشار

پاسخ: گزینهٔ ۱

نکته در بین عوامل مؤثر بر تعادل، فقط دما است که می‌تواند مقدار ثابت تعادل واکنش را تغییر دهد.

پاسخ خیلی تشریحی ثابت تعادل فقط به دما بستگی دارد و با تغییر دما می‌توان مقدار عددی ثابت تعادل را تغییر داد (رد گزینه‌های (۲) و (۳)). افزایش فشار تعادل را در جهت تولید مول گازی کم‌تر جابه‌جا می‌کند، پس با افزایش فشار، واکنش تعادلی هابر $\underbrace{(N_2(g) + 3H_2(g)}_{۴ \text{ مول گاز}} \rightleftharpoons \underbrace{2NH_3(g))}_{۲ \text{ مول گاز}}$ در جهت رفت (تولید آمونیاک بیشتر) جابه‌جا می‌شود و درصد مولی آمونیاک (فراورده) در مخلوط واکنش افزایش می‌یابد.

WWW.ArefOnline.ir

۹۸ کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ سامانه‌های تعادلی داده‌شده درست است؟

I) $N_2O_4(g) + Q \rightleftharpoons 2NO_2(g)$ II) $NH_3(aq) + H_2O(l) \rightleftharpoons NH_4^+(aq) + OH^-(aq) + Q'$

الف) با افزایش دمای سامانهٔ تعادلی (II)، pH محلول کاهش می‌یابد.

ب) با کاهش حجم ظرف واکنش (I)، غلظت تعادلی گاز قهوه‌ای‌رنگ نسبت به تعادل اولیه، کاهش می‌یابد.

NO_2

پ) افزودن یک باز به محلول تعادل (II)، سامانه را به سمت چپ جابه‌جا می‌کند.

ت) با کاهش دمای سامانهٔ تعادلی (I)، شمار مولکول‌های موجود در ظرف افزایش می‌یابد.

۱) الف ـ پ ۲) ب ـ ت ۳) الف ـ ب ۴) پ ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) تعادل (II)، گرماده است و افزایش دما در آن، باعث جابه‌جایی تعادل در جهت برگشت و مصرف گرما می‌شود؛ بنابراین یون‌های هیدروکسید (OH^-) مصرف می‌شوند و از غلظت آن‌ها کاسته می‌شود؛ در نتیجه pH محلول کاهش می‌یابد.

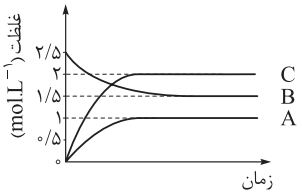
ب) *درسته که* با کاهش حجم (افزایش فشار) در سامانهٔ تعادلی (I)، تعادل جهت جبران افزایش فشار، در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود؛ (زیرا تعداد مول‌های گازی در سمت واکنش‌دهنده کم‌تر است)، اما *هواستون باشه* که با کاهش حجم سامانه، غلظت همهٔ مواد گازی نسبت به تعادل اولیه، افزایش می‌یابد.

پ) با اضافه‌کردن یک باز یا در واقع افزودن یون‌های هیدروکسید (OH^-) به تعادل (II)، سامانه در جهت مصرف این یون‌ها یعنی در جهت برگشت و به سمت چپ جابه‌جا می‌شود.

ت) تعادل (I)، گرماگیر است و با کاهش دما در آن، تعادل برای جبران کم‌شدن دما به سمت چپ و تولید گرما جابه‌جا می‌شود؛ بنابراین شمار مولکول‌های موجود در ظرف کاهش می‌یابد؛ زیرا تعداد مول‌های گازی در سمت واکنش‌دهنده کم‌تر است.

WWW.ArefOnline.ir

۹۹ با توجه به نمودار زیر که مربوط به یک تعادل گازی بوده و در آن درصد مولی C با کاهش دما، کاهش می‌یابد، کدام موارد درست‌اند؟ (حجم ظرف واکنش، ۲ لیتر است.)



الف) واکنش با افزایش فشار در جهت رفت جابه‌جا می‌شود.

ب) مجموع شمار مول‌های تعادلی مواد در ظرف واکنش، برابر با ۴/۵ مول است.

پ) روند تغییر ثابت تعادل آن با دما، مشابه این روند در واکنش تعادلی تجزیهٔ گاز SO_3 به گاز SO_2 است.

ت) با کاهش حجم ظرف، غلظت مولی A و B افزایش می‌یابد.

۱) الف ـ ب ۲) پ ـ ت ۳) الف ـ پ ۴) ب ـ ت

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

موارد «پ» و «ت» درست‌اند.

بررسی تمام موارد:

الف) ابتدا معادلهٔ واکنش را می‌نویسیم: تا رسیدن به تعادل، غلظت B و A، یک واحد و غلظت C، دو واحد تغییر کرده است؛ بنابراین ضرایب A و B برابر و نصف ضریب C است.

$$B \rightleftharpoons A + 2C$$

با افزایش فشار، واکنش در جهت تولید مول گازی کم‌تر پیش می‌رود، بنابراین واکنش در جهت برگشت انجام می‌شود.

ب) روی نمودار، غلظت تعادلی همهٔ مواد داده شده است. مجموع این غلظت‌های تعادلی، $4/5\ mol.L^{-1}$ می‌باشد؛ با توجه به حجم ظرف که ۲ لیتر است، مجموع مول تعادلی مواد برابر ۹ مول خواهد بود.

پ) واکنش داده‌شده در این سؤال، گرماگیر است؛ زیرا با کاهش دما در جهت برگشت جابه‌جا شده و درصد مولی C کاهش یافته است. واکنش تجزیهٔ گوگرد تری‌اکسید به گازهای گوگرد دی‌اکسید و اکسیژن نیز گرماگیر است.

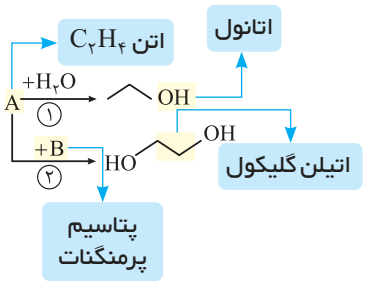
$$2SO_3 \rightleftharpoons 2SO_2 + O_2$$

نکته در واکنش‌های تعادلی گرماگیر، با افزایش دما، ثابت تعادل افزایش می‌یابد و در واکنش‌های تعادلی گرماده، با افزایش دما، ثابت تعادل کاهش می‌یابد.

ت) با کاهش حجم (افزایش فشار)، غلظت مولی همهٔ مواد گازی افزایش می‌یابد.

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۰ با توجه به شکل زیر که تبدیل برخی مواد آلی به یکدیگر را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



۱) A هیدروکربنی است که مجموع شمار اتم‌ها در آن با شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر است.

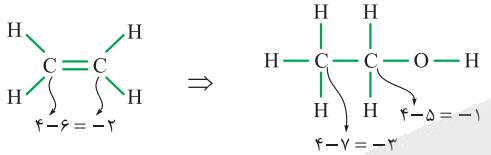
۲) B می‌تواند ماده‌ای باشد که در تبدیل پارازیلن به ترفتالیک اسید نیز از آن استفاده می‌شود.

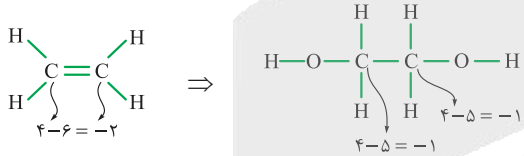
۳) با انجام واکنش (۲) همانند واکنش (۱)، عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در مادهٔ A افزایش می‌یابد.

۴) با کاهش pH محیط، می‌توان سرعت واکنش (۱) را افزایش داد.

پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔ از واکنش اتن با آب، اتانول به دست می‌آید؛ پس A همان گاز اتن (C_2H_4) است. از طرفی، گاز اتن در حضور اکسنده، به اتیلن گلیکول تبدیل می‌شود؛ پس B می‌تواند اکسنده‌ای مانند پتاسیم پرمنگنات باشد.

۱) 

۲) 

همان‌طور که می‌بینید در واکنش (۱) برخلاف واکنش (۲)، عدد اکسایش برخی از اتم‌های کربن کاهش می‌یابد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): مجموع شمار اتم‌ها در C_2H_4، مانند شمار پیوندهای اشتراکی آن برابر ۶ است.

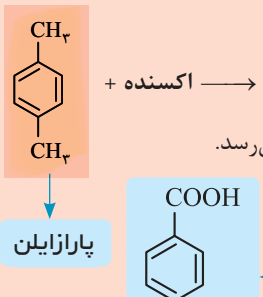
گزینهٔ (۲): B همان پتاسیم پرمنگنات است که در تبدیل پارازیلن به ترفتالیک اسید از محلول غلیظ آن به عنوان اکسنده استفاده می‌شود.

گزینهٔ (۴): همان‌طور که می‌دانید، کاتالیزگر واکنش اتن با آب، H_2SO_4 است؛ پس با افزایش غلظت اسید و در نتیجه کاهش pH، می‌توان سرعت واکنش را افزایش داد.

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۱ **کدام مطلب دربارهٔ واکنش داده‌شده که مربوط به تهیهٔ یکی از مونومرهای پلیمر سازندهٔ بطری آب می‌باشد، درست است؟**

واکنش تولید ترفتالیک اسید از پارازایلن



۱) عدد اکسایش همهٔ اتم‌های کربن در این واکنش تغییر کرده و از ۳− به ۳+ می‌رسد.

۲) در ساختار فراوردهٔ واکنش، ۲۲ پیوند اشتراکی و ۱۶ الکترون ناپیوندی وجود دارد.

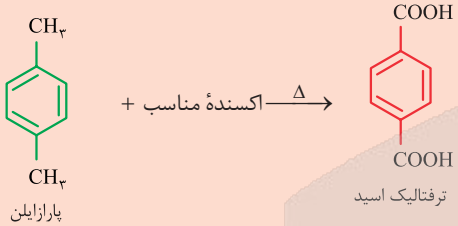
۳) تنها با استفاده از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات به عنوان اکسنده، شرایط تبدیل واکنش‌دهنده به فراورده تأمین می‌شود.

۴) فراوردهٔ واکنش برخلاف واکنش‌دهنده، می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.

پاسخ: گزینهٔ ۴

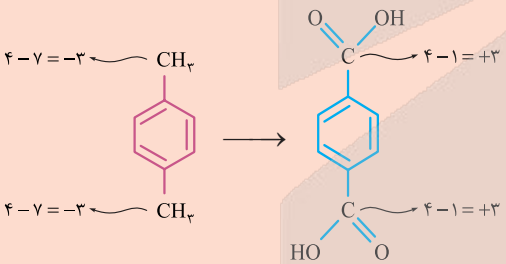
پاسخ خیلی تشریحی ✔ واکنش داده‌شده، مربوط به تهیهٔ ترفتالیک اسید از پارازایلن است. ترفتالیک اسید (یک دی‌اسید) یکی از مونومرهای پلیمر سازندهٔ بطری آب (PET) است.

ترفتالیک اسید برخلاف پارازایلن، به علت داشتن H متصل به O (داشتن پیوند $O-H$)، می‌تواند با مولکول‌های آب پیوند هیدروژنی برقرار کند.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در این فرایند، عدد اکسایش اتم‌های کربن حلقهٔ بنزنی تغییر نمی‌کند؛ اما عدد اکسایش هر اتم کربن گروه متیل در پارازایلن از ۳− به ۳+ (در هر گروه کربوکسیل در ترفتالیک اسید) می‌رسد:



گزینهٔ (۲): ترفتالیک اسید $(C_8H_6O_4)$، دارای ۴ اتم اکسیژن است که هر یک از آن‌ها ۲ جفت یا ۴ الکترون ناپیوندی دارد؛ بنابراین در ترفتالیک اسید، $4\times4=16$ الکترون ناپیوندی وجود دارد.

شمار پیوندهای اشتراکی در ترفتالیک اسید $(C_8H_6O_4)$: $\frac{\overbrace{(8\times4)}^{C}+\overbrace{(6\times1)}^{H}+\overbrace{(4\times2)}^{O}}{2}=23$

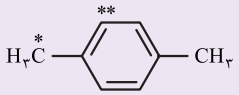
گزینهٔ (۳): محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات $(KMnO_4)$ به عنوان اکسنده، به تنهایی شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید را تأمین نمی‌کند؛ مگر آن‌که دمای مخلوط واکنش افزایش یابد. دقت کنید که با افزایش دما اگرچه شرایط انجام واکنش تأمین شده است، اما بازده هم‌چنان مطلوب نیست.

WWW.ArefOnline.ir

کنکور

با توجه به ساختار مولکولی ترکیب زیر، کدام موارد از مطالب زیر، دربارهٔ آن درست است؟

(سؤال ۲۴۵ کنکور تجربی ۱۴۰۱ (خارج از کشور))



الف) فرمول مولکولی آن با فرمول مولکولی نفتالن، یکاسن است.

ب) مجموع عددهای اکسایش اتم‌های کربن ستاره‌دار، برابر ۴− است.

پ) در تبدیل آن به ترفتالیک اسید، عدد اکسایش اتم $\overset{**}{C}$، ۶ واحد افزایش می‌یابد.

ت) با استفاده از اتن و در مجاورت یک اکسندهٔ مناسب، به ترفتالیک اسید تبدیل می‌شود.

۱) الف ـ پ ۲) الف ـ ت ۳) ب ـ ت ۴) ب ـ پ

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۲ کدام مطلب **نادرست** است؟

۱) از ویژگی‌های پلاستیک‌ها، می‌توان به چگالی کم، قیمت کم و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.

۲) در ساختار واحد تکرارشوندهٔ پلیمر سازندهٔ بطری آب، شمار پیوندهای دوگانه نصف شمار اتم‌های کربن است.

۳) در ساختار همهٔ ترکیبات آلی، شمار پیوندهای $C-H$ با شمار اتم‌های هیدروژن برابر است.

۴) ترفتالیک اسید را برخلاف پارازایلن، اتن و بنزن، نمی‌توان از تقطیر نفت خام به دست آورد.

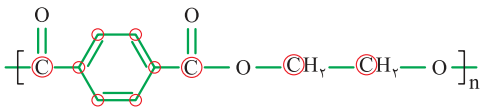
پاسخ: گزینهٔ ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✔

بررسی گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): از ویژگی‌های پلاستیک‌ها می‌توان به چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان‌بودن و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.

گزینهٔ (۲): در ساختار واحد تکرارشوندهٔ پلی‌اتیلن ترفتالات (پلیمر سازندهٔ بطری آب)، ۱۰ اتم کربن و ۵ پیوند دوگانه وجود دارد.



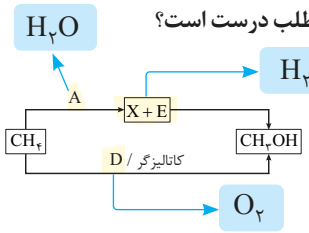
(PET)

گزینهٔ (۳): در ترکیبات آلی نیتروژن‌دار و اکسیژن‌دار ممکن است اتم‌های هیدروژن به اتم‌های نیتروژن یا اکسیژن متصل بشوند. اما در هیدروکربن‌ها همواره شمار اتم‌های هیدروژن با شمار پیوندهای $C-H$ برابر است.

گزینهٔ (۴): موادی مانند بنزن (C_6H_6)، اتن (C_2H_4) و پارازایلن (C_8H_{10})، به طور مستقیم از تقطیر نفت خام به دست می‌آیند، اما اتیلن‌گلیکول ($C_2H_6O_2$) و ترفتالیک اسید ($C_8H_6O_4$) در نفت خام وجود ندارند.

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۳ **با توجه به شکل زیر که تولید متانول از گاز متان را به دو روش نشان می‌دهد، کدام مطلب درست است؟**



۱) مادهٔ D، یکی از فراورده‌های واکنش سوختن ناقص هیدروکربن‌ها است.

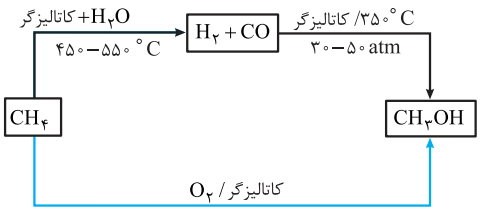
۲) مجموع ضرایب استوکیومتری X و E در معادلهٔ واکنش تولید آن‌ها، با مجموع ضرایب استوکیومتری این مواد در معادلهٔ واکنش مصرف آن‌ها، با هم برابر است.

۳) مادهٔ A در روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان، نقش کاهنده را ایفا می‌کند.

۴) در هر دو مرحلهٔ روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان، نیاز به کاتالیزگر است و دمای مورد نیاز در مرحلهٔ دوم، کم‌تر از مرحلهٔ اول می‌باشد.

پاسخ: گزینهٔ ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✔



نمودار روبه‌رو دو روش مستقیم و غیرمستقیم تبدیل متان به متانول را نشان می‌دهد:

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): در روش تولید مستقیم متانول از گاز متان، از کاتالیزگر و گاز اکسیژن (O_2) استفاده می‌شود؛ در صورتی که فراورده‌های واکنش سوختن ناقص هیدروکربن‌ها، گازهای کربن دی‌اکسید (CO_2)، کربن مونوکسید (CO) و آب (H_2O) است.

گزینهٔ (۲):

روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان

مرحلهٔ (۱): $CH_4(g) + H_2O(g) \xrightarrow{\text{کاتالیزگر، } \Delta} CO(g) + 3H_2(g) \Rightarrow H_2$ و

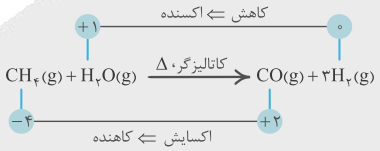
مجموع ضرایب استوکیومتری CO $= 1 + 3 = 4$

مرحلهٔ (۲): $CO(g) + 2H_2(g) \xrightarrow[\text{دما و فشار مناسب}]{\text{کاتالیزگر}} CH_3OH(l) \Rightarrow H_2$ و

مجموع ضرایب استوکیومتری CO $= 1 + 2 = 3$

گزینهٔ (۳): در روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان، مادهٔ A یا بخار آب (H_2O)، نقش اکسنده و گاز متان (CH_4)، نقش کاهنده را ایفا می‌کند.

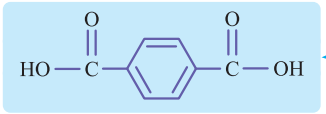
مرحلهٔ اول روش غیرمستقیم تولید متانول از گاز متان



WWW.ArefOnline.ir

۱۰۴ کدام مطلب دربارهٔ دی‌استر حاصل از واکنش اتانول و ترفتالیک اسید، درست است؟

C_2H_5OH



۱) فرمول مولکولی آن، $C_{12}H_{12}O_4$ است.

۲) شمار پیوندهای $C-H$ در ساختار آن، ۳/۵ برابر شمار پیوندهای $C-O$ است.

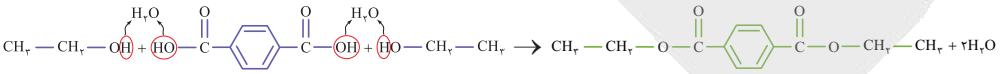
۳) ۵ نوع اتم کربن با عدد اکسایش متفاوت، در این ترکیب وجود دارد.

۴) به ازای تولید ۱ مول از این ترکیب، ۱ مول آب نیز در طول انجام واکنش، تولید می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی

ترفتالیک اسید، یک کربوکسیلیک اسید دوعاملی است که دو گروه $(-\overset{O}{\overset{\|}{C}}-OH)$ دارد؛ بنابراین یک مول از این دی‌اسید با دو مول اتانول (CH_3CH_2OH) که یک الکل تک‌عاملی است، به صورت زیر واکنش می‌دهد:



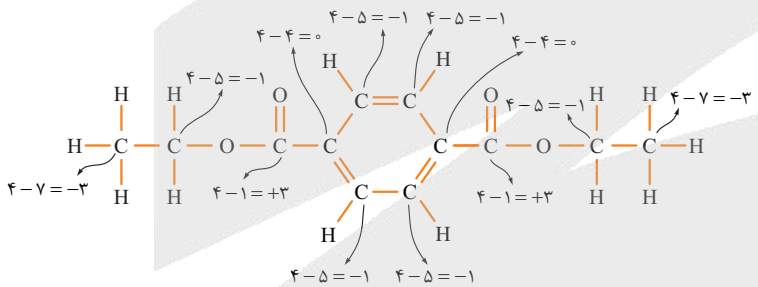
با توجه به ساختار دی‌استر تولیدشده خواهیم داشت:

$$\frac{\text{شمار پیوندهای C–H}}{\text{شمار پیوندهای C–O}} = \frac{14}{4} = 3/5$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینهٔ (۱): با توجه به ساختار رسم‌شده، فرمول مولکولی دی‌استر حاصل از واکنش اتانول و ترفتالیک اسید، $C_{12}H_{14}O_4$ است.

گزینهٔ (۳): در ساختار دی‌استر حاصل از واکنش اتانول و ترفتالیک اسید، ۴ نوع اتم کربن با اعداد اکسایش متفاوت وجود دارد:

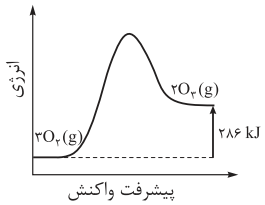


توجه از آن‌جا که ساختار مولکول متقارن است، نیازی به محاسبهٔ اعداد اکسایش تمام اتم‌های کربن نیست. در واقع با محاسبهٔ اعداد اکسایش اتم‌های کربن در سمت چپ مولکول، اعداد اکسایش اتم‌های کربن در سمت راست مولکول را نیز خواهیم داشت.

گزینهٔ (۴): با توجه به واکنش نشان داده‌شده، به ازای تولید یک مول دی‌استر، ۲ مول آب تولید می‌شود.

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۵ با توجه به نمودار داده‌شده، درستی یا نادرستی عبارت‌های زیر به ترتیب کدام است؟



- انرژی فعال‌سازی از آنتالپی واکنش بزرگ‌تر است.
- آنتالپی (محتوای انرژی) فراورده‌ها از واکنش دهنده‌ها کم‌تر است.
- مجموع آنتالپی پیوندها در واکنش‌دهنده‌ها بزرگ‌تر از فراورده‌ها است.
- اگر این واکنش درون سیلندر با پیستون روان به تعادل برسد، با کاهش فشار در دمای ثابت، شمار مول‌های اوزون افزایش می‌یابد.

۱) درست ـ نادرست ـ درست ـ نادرست
۲) نادرست ـ نادرست ـ نادرست ـ درست
۳) درست ـ نادرست ـ درست ـ درست
۴) نادرست ـ درست ـ درست ـ نادرست

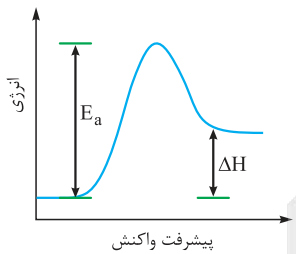
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✔

عبارت‌های اول و سوم درست و عبارت‌های دوم و چهارم، نادرست است.

بررسی عبارت‌ها:

- انرژی فعال‌سازی واکنش (تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها و قلهٔ نمودار) از آنتالپی واکنش (تفاوت سطح انرژی واکنش‌دهنده و فراورده‌ها) بزرگ‌تر است.



- واکنش گرماگیر است و در آن، آنتالپی فراورده‌ها از واکنش‌دهنده‌ها بالاتر است.
- با توجه به رابطهٔ محاسبهٔ ΔH واکنش به کمک آنتالپی‌های پیوند، در واکنش‌های گرماگیر، مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده از مواد فراورده بیشتر است.

$$\Delta H(\text{واکنش}) = [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد واکنش‌دهنده}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوندها در مواد فراورده}]$$

- با کاهش فشار، تعادل به سمت تعداد مول‌های گازی بیشتر، یعنی در جهت برگشت و کاهش تعداد مول‌های اوزون جابه‌جا می‌شود.

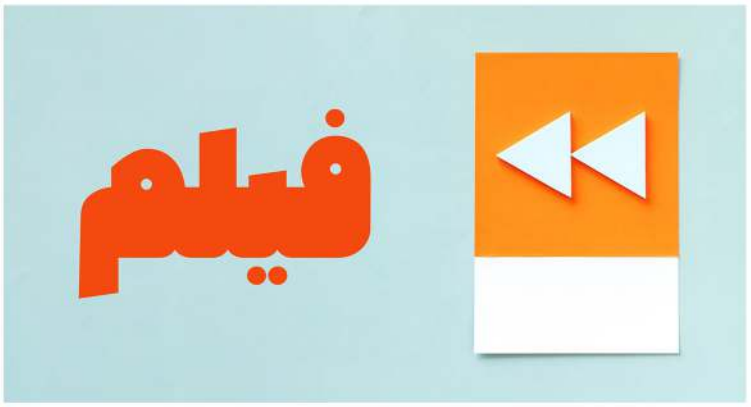
$$۳O_۲(g) \rightleftharpoons ۲O_۳(g)$$

WWW.ArefOnline.ir


آزمون


کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰


جزوه


فیلم


مشاوره


www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف