

آزمون



کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



جزوه



فیلم



مشاوره



www.
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف



آزمون خیلی سبز؛ یک آزمون استراتژیک





Green Page

- سؤال‌هایی که با توجه به تمرین‌ها و مثال‌های کتاب درسی و سؤال‌های امتحان‌های نهایی برگزار شده، تو آزمون خیلی سبز براتون شبیه‌سازی شدن، البته سؤال‌های خاص امتحان نهایی؛ همون سؤال‌هایی که تضمین می‌کنه ۲۰ بگیری
- (سبک و نوع نگارش سؤال‌ها مشابهت دقیق با امتحان‌های نهایی دارن)
- تقریباً تو هر آزمون، برای هر درس ۲ یا ۳ تا سؤال شبیه‌ساز نهایی (Green Page) داریم.
- رنگ زمینه صفحه پاسخنامه این سؤال‌ها سبزرنگه به همین دلیل معروفن به (Green page)

فیزیک

۶۲ هر میکروقرن، تقریباً چند دقیقه است؟

۱) ۵/۲۶
۲) ۸/۷۶
۳) ۵۲/۶
۴) ۸۷/۶

پاسخ: گزینه ۳

تبدیل یکای زنجیره‌ای، برای تبدیل یکای یک کمیت به یکاهای دیگر، از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم. برای نمونه، برای این‌که بینیم ۲۰ in معادل چند cm است، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

الف) ابتدا تساوی بین دو یکا را می‌نویسیم، تا کسر تبدیل مناسب به دست آید:

$$\frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 1$$

ب) سپس به کمک کسر تبدیل مناسب، تبدیل یکای زنجیره‌ای را می‌نویسیم:

$$20 \text{ in} = 20 \text{ in} \times \frac{2.54 \text{ cm}}{1 \text{ in}} = 50.8 \text{ cm}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ از روش تبدیل یکای زنجیره‌ای استفاده می‌کنیم:

$$\frac{60 \text{ دقیقه}}{1 \text{ ساعت}} \times \frac{24 \text{ ساعت}}{1 \text{ روز}} \times \frac{365 \text{ روز}}{1 \text{ سال}} \times \frac{100 \text{ قرن}}{1 \text{ قرن}} \times \frac{10^{-6} \text{ میکروقرن}}{1 \text{ میکروقرن}} = 10^{-6} \times 100 \times 365 \times 24 \times 60 = 52.56 \text{ دقیقه} = 52/6 \text{ دقیقه}$$

کتاب درسی

الف) هر میکروقرن، تقریباً چند دقیقه است؟

(فیزیک (۱) - تمرین ۶ پایان فصل صفحه ۸ کتاب درسی)

پایین صفحه پاسخنامه این سؤال‌ها، سؤال اصلی که تو امتحان نهایی اومده (یا تمرین و مثال کتاب) با ذکر آدرسش نوشته شده.



Red Page

- برای این که با سبک سؤال‌های کنکور خیلی دقیق آشنا بشین؛ خیلی سبز تو هر آزمون برای هر درس ۲ یا ۳ تا از سؤال‌های کنکور رو شبیه‌سازی می‌کنه.
- همیشه سعی میشه که این مدل شبیه‌سازی‌ها از بین (سؤال‌های کنکور) که معمولاً تکرار میشن انجام بشه
- توی پاسخنامه صفحه مربوط به پاسخ این سؤال‌ها رنگ زمینه قرمز داره به خاطر همین بهش می‌گیم (Red page)
- اگه دقت کنید می‌بینید که سبک و مدل این سؤال‌های شبیه‌سازی شده دقیقاً مثل همون سؤال کنکوره

کنکور مشابه

فیزیک

۴۵

معادله سرعت - زمان متحرکی که در امتداد محور x حرکت می‌کنه، در SI به صورت $v = t^2 - 4t + 5$ است. شتاب متوسط این متحرک از مبدأ زمان تا لحظه‌ای که سرعت آن به $\vec{v} = (1 \text{ m/s})\vec{i}$ می‌رسه، بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟

۱) $4\vec{i}$
 ۲) $2\vec{i}$
 ۳) $-4\vec{i}$
 ۴) $-2\vec{i}$

پاسخ: گزینه ۴

سرعت در مبدأ زمان (v_0) و لحظه t_1 که بردار سرعت در آن لحظه برابر $\vec{v}_1 = (1 \text{ m/s})\vec{i}$ است را به دست آورید و سپس از رابطه $\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t}$ خواسته سؤال را حساب کنید.

بردار شتاب متوسط متحرک از رابطه زیر به دست می‌آید:

(\vec{v}): بردار سرعت متحرک (m/s)
 t: زمان (s)

گام اول: سرعت متحرک در مبدأ زمان را به دست می‌آوریم:

$$v_0 = (0)^2 - 4(0) + 5 = 5 \text{ m/s}$$

گام دوم: اکنون لحظه‌ای را که سرعت متحرک 1 m/s است، محاسبه می‌کنیم:

$$v = t^2 - 4t + 5 = 1 \Rightarrow t^2 - 4t + 4 = 0 \Rightarrow (t-2)^2 = 0 \Rightarrow t = 2 \text{ s}$$

گام سوم: بردار شتاب متوسط متحرک را در بازه زمانی « ۲ تا ثانیه به دست می‌آوریم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{v_{2s} - v_0}{2 - 0} = \frac{(1-5)\vec{i}}{2} = (-2 \text{ m/s}^2)\vec{i}$$

معادله سرعت - زمان متحرکی در SI به صورت $v = 2t^2 - 8$ است. شتاب متوسط آن در ۲ ثانیه دوم چند متر بر مربع ثانیه است؟


(سؤال ۳۸ کنکور ریاضی ۱۳۰۳ - نوبت اول)

۱) ۱۸
 ۲) ۱۲
 ۳) ۸
 ۴) ۴

سؤال اصلی کنکور که این سؤال از درسش شبیه‌سازی شده رو می‌تونن پایین صفحه پاسخنامه ببینید.

Purple Page

- مرسومه که هر سال سؤال های یکی دو تا درس توکنکور سراسری سخت تر (یا خاص تر) طراحی میشن
- مثلاً کنکور سال ۱۴۰۴ تو رشته ریاضی و تجربی درس های ریاضی و شیمی اینجوری بودن و برای رشته انسانی این اتفاق برای علوم و فنون و فلسفه (کمی هم جغرافیا) افتاده بود.
- خیلی سبز این مدل سؤال های خاص رو هم تو هر آزمون شبیه سازی می کنه (۱ یا ۲ سؤال برای هر درس)
- صفحه پاسخ هر کدوم از این سؤال ها رنگ زمینه بنفش داره.
- Purple Page برای همه درس ها نیست و فقط برای درس هایی که سؤال خاص تر (یا سخت تر) تو کنکور همون سال داشتن از این مدل شبیه سازی ها داریم.



ریاضی

۱۱۴ تابع f ثابت و تابع g همانی است. اگر $f(2x-1) + 2g(2x+1) = 6x$ باشد. حاصل $(\frac{g}{f})(3)$ کدام است؟

$\frac{1}{3}$ (۱)
 $\frac{1}{2}$ (۲)
 $-\frac{1}{3}$ (۳)
 $-\frac{1}{2}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ضابطه تابع f را $f(x) = c$ و ضابطه تابع g را $g(x) = x$ در نظر می گیریم. حالا طبق رابطه مفروض داریم:

$$2c + 2(2x+1) = 6x \Rightarrow 6x + 2c + 2 = 6x$$

برای این که تساوی بالا همواره برقرار باشد، لازم است $2c + 2$ برابر صفر باشد:

$$c = -\frac{2}{2}$$

گام دوم: یعنی $f(x) = -\frac{2}{2}$ است و داریم:

$$\left(\frac{g}{f}\right)(3) = \frac{g(3)}{f(3)} = \frac{3}{-\frac{2}{2}} = -2$$

اگر f تابعی همانی و g تابع ثابت بوده و $f(3x) + 2f(3+x) = 3 + 2x$ باشد. مقدار $\frac{f(-1)}{g(4)}$ کدام است؟

(سؤال ۱۱۶ کنکور تهری ۱۴۰۴ - نوبت دوم)

کنکور

$\frac{1}{4}$ (۱)
 $\frac{1}{3}$ (۲)
 $-\frac{1}{4}$ (۳)
 $-\frac{1}{3}$ (۴)

سؤال اصلی کنکور که این سؤال با توجه به اون شبیه سازی شده هم پایین صفحه پاسخنامه سؤال آورده شده که بتونی بلافاصله بعد از حل کردنش سؤال اصلی کنکور رو هم ببینی و این مدل سؤال خاص رو دقیقاً به ذهن بسپری.

پاسخنامه‌های برای تحمیل یادگیری

- پاسخنامه خیلی سبز فقط یک پاسخنامه معمولی نیست، بلکه به مسیره؛ به مسیر فکر شده و مرحله به مرحله برای تکمیل یادگیری.
- هر سؤال و پاسخ رو تو به صفحه میاریم که دسترسی به هر سؤال راحت‌تر باشه.

گاهی وقت‌ها دلیل اینکه نتونستی به جواب برسی اینه که صورت سؤال رو خوب متوجه نشدی، **تعبیر سؤال** (که دقیقاً رو قسمت خاص فهم سؤال نوشته می‌شه) به فهم دقیق سؤال کمک می‌کنه.

صورت سؤال رو دوباره اینجا میاره که حین بررسی پاسخنامه صورت سؤال هم دم دست باشه.

زیست‌شناسی

۱۶ شکل زیر، ترسیمی ساده مربوط به یکی از انواع الگوهای پیشنهادی برای همانندسازی دنا است. کد به این شکل، درست بیان شده است؟ (فرض کنید تمام نوکلئوتیدهای دنا A معمولی هستند. در ف را برابر با یک رشته پلی‌نوکلئوتیدی در نظر بگیرید.)

(۱) شکستن پیوند اشتراکی در این الگو تنها به واسطه فعالیت نوکلئازی دنباسپاراز محتمل است.
 (۲) در این الگو برخلاف الگوی تأییدشده توسط مزلسون و استال، تغییر ساختار رشته الگو محتمل نیست.
 (۳) به دنبال ۲ دور همانندسازی دنا B با این الگو و در شرایطی مشابه با آزمایش مزلسون و استال، تشکیل نوار در میانه لوله محتمل است.
 (۴) در پی ۴ دور همانندسازی دنا C با این الگو و در محیط دارای ^{15}N ، فقط یک نوار در لوله تشکیل می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

زیرمبش، زیست دوازدهم - فصل ۱ - طرح های همانندسازی

شکل، نشان‌دهنده طرح همانندسازی حفاظتی است، چراکه در آن، هر دو رشته دنا اولیه به صورت دست‌نخورده باقی مانده، وارد یکی از یاخته‌های حاصل از تقسیم می‌شوند، دو رشته دنا جدید هم با هم، وارد یاخته دیگر می‌شوند. از طرفی دنا دارای نیتروژن ۱۴ هستند و دنا C هم فقط دارای نیتروژن ۱۵ است.

Hint



حفاظتی: هر دو رشته دنا قبلی (اولیه) به صورت دست‌نخورده باقی مانده، وارد یکی از یاخته‌های حاصل از تقسیم می‌شوند، دو رشته دنا جدید هم وارد یاخته دیگر می‌شوند؛ چون دنا اولیه به صورت دست‌نخورده در یکی از یاخته‌ها حفظ شده است.

نیمه‌حفاظتی: در این طرح در هر یاخته یکی از دو رشته دنا مربوط به دنا اولیه است و رشته دیگر با نوکلئوتیدهای جدید ساخته شده است، چون در هر یاخته حاصل، فقط یکی از دو رشته دنا قبلی وجود دارد.

غیرحفاظتی (پراکنده): هر کدام از رشته‌های دناهای حاصل، قطعاتی از رشته قبلی و صورت پراکنده در خود دارند.

درس‌Box

اگر دنا با نیتروژن ۱۵ (دنا C)، یک بار در محیط دارای نیتروژن ۱۵ به روش حفاظتی همانندسازی شود، دنا با نوکلئوتیدهای حاوی نیتروژن ۱۵ ایجاد می‌شود. اگر این دو دنا جدید دوباره به صورت حفاظتی همانندسازی دناهای دارای نیتروژن ۱۵ ایجاد می‌شود. پس در نهایت، فقط یک نوار در سانتریفیوژ ایجاد می‌شود که دناهای بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): طی همانندسازی دنا، هنگام اضافه شدن هر نوکلئوتید سه‌فسفاته به انتهای رشته پلی‌نوکلئوتیدی در طی فعالیت بسپارازی دنباسپاراز، دوتا از فسفات‌های آن از نوکلئوتید جدا می‌شوند. طی فعالیت نوکلئازی د فسفودی‌استر برای رفع اشتباه شکسته می‌شود. پس هم طی همانندسازی دنا (فعالیت بسپارازی) و هم طی دنباسپاراز شکستن پیوند اشتراکی رخ می‌دهد.

اگر همانندسازی دنا در آزمایش‌های مزلسون و استال با الگوی حفاظتی ممکن باشد، به ازای هر دور همانندسازی تشکیل شده دارای چگالی سبک یا سنگین هستند و در لوله آزمایش هیچ‌گاه دناهایی با چگالی متوسط تشکیل

نکته

هدف اصلی این مدل پاسخنامه اینه که فقط پاسخنامه رو نخونی و رد بشی بلکه مرحله به مرحله بهت کمک بکنه خودت سؤال رو حل کنی. **Hint** به اشاره دقیقیه برای اینکه بدونی برای جواب دادن به این سؤال از کجا شروع کنی و چیکار کنی.

درس‌Box به درسنامه کامل در عین حال جمع‌وجوره برای یادآوری درسنامه مربوط به اون سؤال. اگه تا این مرحله هنوز به جواب نرسیدی درس باکس کمک می‌کنه به یادآوری و تلاش مجدد برای حل سؤال.

پاسخ خیلی تشریحی به پاسخنامه خیلی خیلی تشریحی که هم پاسخ درست رو کامل تشریح می‌کنه و هم تک‌تک گزینه‌ها رو بررسی می‌کنه. معمولاً این پاسخنامه گام به گامه و برای اینکه با خوندن گام اول دوباره سعی کنی ادامه راه حل رو خودت پیدا کنی.

نکته نکته‌های خیلی خاص (کنکوری)



بررسی موارد:

الف) یون‌ها با قرارگیری در مدار الکتریکی به سوی قطب‌های ناهمنام خود حرکت می‌کنند، نه قطب‌های همنام!

ب) گرافیت، رسانای الکترونی است و دو ماده دیگر، رسانای جریان برق نیستند.

ترکیب‌های یونی در حالت جامد، رسانای جریان برق نیستند؛ زیرا یون‌ها در حالت جامد نمی‌توانند آزادانه جابه‌جا شوند.

گول نخوری

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: برای این‌که نمودار سهمی پایین‌تر از خط قرار گیرد باید $(-2, 3)$ مجموعه جواب‌های نامعادله زیر باشد:

$$b < 2ax + 4b \Rightarrow x^2 - 2ax - 5b < 0$$

گام دوم: با توجه به تعیین علامت عبارت درجه ۲، می‌توان نتیجه گرفت که $x = 3$ و $x = -2$ جواب

$$x^2 - 2ax - 5b = 0 \text{ هستند، در نتیجه:}$$

$$\begin{cases} 9a - 5b = 0 \\ 4a - 5b = 0 \end{cases} \xrightarrow[\text{کم می‌کنیم}]{\text{بالایی را از پایینی}} \begin{cases} 9a - 5b = 0 \\ 5a - 15a = 0 \end{cases} \Rightarrow a = \frac{1}{3}, b = \frac{6}{5}$$

$$\frac{1}{3} \times \frac{6}{5} = \frac{2}{5} = 0.4$$

می‌توانستی برای مشخص کردن a و b از S و P استفاده کنی.

په‌چور دیگه

$$3a = 1 \Rightarrow a = \frac{1}{3}$$

$$4a - 5b = -6 \Rightarrow b = \frac{6}{5}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: از جدول تعیین علامت استفاده می‌کنیم؛ زیرا دامنه تابع f مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1-2x}{\sqrt{x}-1} \geq 0$ است.

$$\frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

و بر اساس روابط درس باکس، جدول تعیین علامت عبارت $\sqrt{x}-1$ را می‌نویسیم:

$$\frac{1}{-}$$

$$\frac{1}{+}$$

$$+ \quad - \quad -$$

$$- \quad - \quad +$$

$$- \quad + \quad -$$

گام دوم: حالا جدول هم‌زمان این دو عبارت را داریم:

با توجه به جدول بالا، مجموعه جواب‌های نامعادله $\frac{1-2x}{\sqrt{x}-1} \geq 0$ که همان دامنه تابع f است، بازه $(\frac{1}{2}, 1)$ خواهد بود. هیچ عدد صحیحی را شامل نمی‌شود.

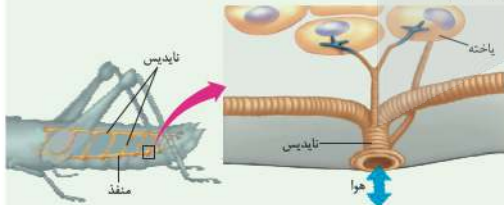
اگر $x \in \mathbb{Z}$ ، آن‌گاه $[x] = x$ و ضابطه تابع f به صورت $f(x) = \sqrt{x}-1$ خواهد شد که غیر قابل قبول است؛ پس شامل هیچ عدد صحیحی نیست.

تیزبازی

شکل‌نامه

۱) قطر نایدیس‌ها با میزان انشعابات آن‌ها، رابطه عکس دارد؛ یعنی هر چه قدر از بخش‌های ابتدایی به سمت انت می‌رویم، قطر کاهش می‌یابد.

۲) جهت جریان هوا درون نایدیس‌ها دوطرفه است.



۳) از یک نایدیس می‌تواند انشعاباتی با قطر متفاوت جدا شود. این انشعابات می‌توانند به بخش‌های مختلف بدن بروند، از به سمت منافذ تنفسی دیگر می‌روند تا با انشعابات آن‌ها یکی شوند، گروهی هم می‌توانند بروند و انشعابات پایانی نایدیس

۴) در مجاورت هر یاخته، ممکن است بیش از یک انشعاب پایانی وجود داشته باشد.

مشاوره

مشاوره تو یکی از سؤال‌های کنکور که تپ مشابهی با سؤال ما داشت، یکی از موارد تو همه گزینه‌ها تکرار شده بود (مثل مورد ۵) تو این‌جا) خب این یعنی این گزینه درسته و لازم نیست بخونیش. پس با خیالت راحت برو سراغ بقیه گزینه‌ها و زمانت رو save کن.

درون سیتوپلاسم کروموزوم کمکی نیز حضور دارد و از نظر تعداد جایگاه آغاز همانندسازی و یک یا دو همانند اغلب پروکاریوت‌ها است.)

الف) ساختاری متشکل از دو رشته موازی است که در جهتی خاص حول محور فرضی پیچیده شده‌اند.

ب) در یک نقطه ویژه از دنا، فرایند همانندسازی، آغاز شده و با رسیدن مجدد به آن پایان می‌یابد.

ج) مشابه دنا، کمکی، از طریق بخش مشترکی به غشای یاخته اتصال می‌یابد.

د) تعداد ساختارهای Y شکل آن‌ها در همانندسازی کم‌تر از دنا، اصلی آغازیان است.

۲) «الف»، «ب» و «د»

۱) «الف» و «د»

۴) «الف»، «ب»، «ج» و «د»

۳) «ب»، «ج» و «د»

گول نخوری سعی کردیم اشتباهات متدوالی که تو هر سؤال اتفاق می‌افته رو تحت عنوان گول نخوری برای هر سؤال بیاریم. این قراره بهت کمک کنه که تو دام سؤال‌ها نیفتی و بعد از به مدتی دام سؤال‌ها رو بشناسی.

په‌چور دیگه اگر سؤال رو درست حل کردی، به راه حل متفاوت هم اینجا ببین. په‌چور دیگه نگاه کردن به هر سؤال کمک زیادی به بالا بردن سرعت حل تست‌ها می‌کنه.

تیزبازی حتی اگر یکی دوتا سؤال رو بتونی سر جلسه آزمون (مخصوصاً کنکور) سریع و خاص حل کنی علاوه بر ذخیره کردن زمان از نظر روحی هم خیلی خیلی بهت کمک می‌کنه. تیزبازی په‌آیتم جذابه برای یاد گرفتن و تمرین کردن حل سؤال‌ها باروش‌های تند و تیز.

شکل‌نامه شکل‌های کتاب تو بعضی از درس‌ها (مخصوصاً زیست‌شناسی) خیلی خیلی مهمه. موشکافی شکل‌های مهم کتاب درسی رو اینجا ببین.

مشاوره اهمیت تست‌ها توی کنکور، پرتکرار بودنشون و توضیحات تخصصی په طراح حرفه‌ای رو توی مشاوره هر تست دقیق بخون.

این همه آیتم توی پاسخنامه به خاطر اینه که هر کسی متناسب با نیاز خودش از اون بهره‌مند بشه.

مثلاً کسی که به په سؤال جواب درست داده فقط می‌تونه په‌چور دیگه یا تیزبازی سؤال رو ببینه نه همه پاسخ‌نامه رو.



آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله چهاردهم

پایه دوازدهم

۲۲/اسفند/۱۴۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره یک

پایه		دوازدهم		از شماره		تعداد سؤال		مواد امتحانی
دهم	یازدهم	فصل ۵ صفحه ۱۱۱ تا ۱۴۴	فصل ۳ (درس ۲) صفحه ۷۷ تا ۸۶	تا شماره	از شماره	۱۸	۱	ریاضیات پایه و حسابان و هندسه
—	فصل ۳ صفحه ۷۱ تا ۹۰	فصل ۳ (درس ۳ و ۴) صفحه ۶۸ تا ۷۵	فصل ۳ صفحه ۵۵ تا ۸۴	۳۰	۱۹	۱۲	۱۹	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
—	فصل ۲ صفحه ۶۸ تا ۳۵	فصل ۳ صفحه ۵۵ تا ۸۴	فصل ۳ صفحه ۵۵ تا ۸۴	۴۰	۳۱	۱۰	۳۱	مجموع
—	—	—	—	مدت پاسخگویی	تا شماره	۷۰ دقیقه	۴۰ سؤال	—

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: کاظم اجلائی - کوروش اسلامی - فرشاد حسن زاده - علی شهبابی محمد گودرزی - میلاد منصوری - سروش موثینی - محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن زاده - محمد گودرزی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - محمد طاهر شعاعی حمید گلزاری - صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: مریم نظری	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب - مریم نظری	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.

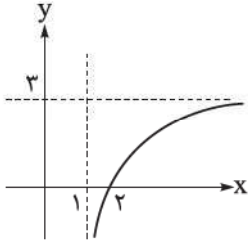




۱- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

- (۱) $(-1, 3)$ (۲) $(-\infty, 1)$ (۳) $(-1, +\infty)$ (۴) $(-3, 3)$

۲- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{2x+d}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a-b+c-d$ کدام است؟



- (۱) -20 (۲) -16 (۳) -14 (۴) -18

۳- اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax+24}{x+a-2}$ روی بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد، مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) 10 (۲) 14 (۳) 15 (۴) 21

۴- جهت تقعر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2-1}{x^2+3}$ روی بازه (a, b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟

- (۱) 4 (۲) 3 (۳) 2 (۴) 1

۵- ضابطه تابع f ، یک چندجمله‌ای درجه سوم است. اگر به ازای هر x ، $f(x) + f(-x) = 8$ باشد، طول نقطه عطف تابع کدام است؟

- (۱) صفر (۲) 2 (۳) 4 (۴) 8

۶- اگر $x=1$ طول نقطه عطف و $x=-2$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 24x$ باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟

- (۱) 1 (۲) 2 (۳) 3 (۴) 4

۷- معادله خط مماس بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 3 & ; x < 2 \end{cases}$ در نقطه عطف آن کدام است؟

(۱) $y = -2x + 7$

(۲) $y = 2x - 7$

(۴) چنین خطی وجود ندارد.

۸- تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{a}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-a)^2}$ در بازه $(2, 4)$ نقطه بحرانی دارد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a شامل چند عدد صحیح است؟

- (۱) 3 (۲) 2 (۳) 1 (۴) صفر

۹- اختلاف بیشترین مقدار و کمترین مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = 4x^3 - 12x|x-1| - 3x$ روی بازه $[\frac{3}{4}, 0]$ کدام است؟

- (۱) 3 (۲) 4 (۳) 5 (۴) 6

محل انجام محاسبات



۱۰- مقدار ماکزیمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^2} |\sqrt{x} - 3|$ کدام است؟

- ۶ (۱) ۸ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

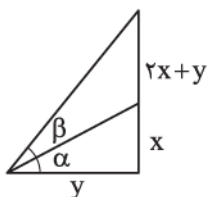
۱۱- اگر اختلاف مقادیر اکسترمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + a}{x+1}$ برابر ۶ باشد، طول نقطه مینیمم نسبی آن کدام است؟ ($a > -1$)

- ۰/۵ (۱) -۰/۵ (۲) ۲/۵ (۳) -۲/۵ (۴)

۱۲- مستطیلی با بیشترین مساحت ممکن، درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است. محیط این مستطیل کدام است؟

- ۴ (۱) ۶ (۲) $3\sqrt{2}$ (۳) $6\sqrt{2}$ (۴)

۱۳- در شکل زیر، به ازای کدام مقدار $\tan \alpha$ ، بیشترین مقدار برای $\tan \beta$ به دست می‌آید؟

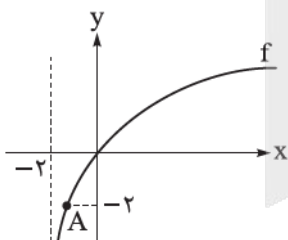


- ۱ (۱) $\frac{4+2\sqrt{5}}{11}$ (۳) $\frac{\sqrt{15}-3}{6}$ (۴) ۳ (۲)

۱۴- تابع f با ضابطه $f(x) = \cos((x - [x])\pi)$ در کدام نقاط زیر دارای نقطه عطف است؟ ($n \in \mathbb{Z}$ و $[]$ نماد جزء صحیح است.)

- $x = n$ (۱) $x = n + \frac{1}{4}$ (۳) $x = n + \frac{1}{2}$ (۲) نقطه عطف ندارد. (۴)

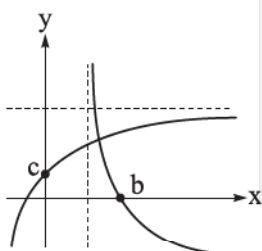
۱۵- مطابق شکل، طول نقطه A واقع بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \log_2(ax + b)$ کدام است؟



- ۱/۷۵ (۱) -۱/۵ (۲) -۱/۲۵ (۳) -۱ (۴)

۱۶- نمودارهای توابع $f(x) = 2a - 2(2a-1)^x$ و $g(x) = \log_a(ax-1)$ در شکل زیر رسم شده‌اند. مجموعه مقادیر

قابل قبول برای $[\frac{a+b}{2}]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ($[]$ نماد جزء صحیح است.)



- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

محل انجام محاسبات



۱۷- اگر یکی از جواب‌های معادله $(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0$ ، برابر $\frac{b}{a}$ باشد، حاصل $\frac{b}{a}$ (۰/۱۲۵) کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۳۰ (۲) ۱۵ (۳) $20\sqrt{5}$ (۴) $40\sqrt{5}$

۱۸- تنها یکی از دو جواب معادله $\log_{8x} 4x + a \log_x 8 = 10$ در بازه $(2, 8)$ قرار دارد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a کدام است؟

- (۱) (۱۳, ۳۱) (۲) (۱۳, ۷۱) (۳) (۳۷, ۱۱۰) (۴) (۳۷, ۷۰)

محل انجام محاسبات



۱۹- حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a} = -\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{c} = -\vec{j} - \vec{k}$ ، کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۲۰- اگر $\vec{a} = (m-1, m^2, m^3+1)$ و $\vec{b} = (2m, 3m-1, 4m-2)$ ، به طوری که $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = m^4$ ، آن گاه طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) $\sqrt{2}$ (۳) $\sqrt{3}$ (۴) ۲

۲۱- اگر $\vec{a} = (1, 0, 2\sqrt{6})$ ، $\vec{b} = (-4, \sqrt{3}, 0)$ و \vec{b}' تصویر قائم بردار \vec{b} بر امتداد بردار \vec{a} باشد، آن گاه حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}'$ کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۴ (۴) -۴

۲۲- در مثلث ABC ، اگر $\vec{BC} = \vec{a}$ ، $\vec{CA} = \vec{b}$ و $\vec{AB} = \vec{c}$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟

- (۱) $\vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} = 0$ (۲) $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$
 (۳) $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a}$ (۴) $\vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} = \vec{0}$

۲۳- مثلث ABC را در نظر بگیرید. اگر $M(4, m, 3)$ ، $N(-k, m, 2)$ و $P(k, m, 4)$ ، به ترتیب نقاطی واقع بر اضلاع

BC ، AB و AC باشند، به طوری که $\frac{AN}{BN} = \frac{BM}{CM} = \frac{CP}{AP} = 2$ ، آن گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

- (۱) ۲۴ (۲) ۱۸ (۳) ۱۲ (۴) ۹

۲۴- اگر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} سه بردار دلخواه و \vec{a}' تصویر بردار \vec{a} بر روی امتداد بردار \vec{b} باشد، آن گاه کدام گزینه همواره درست است؟

- (۱) اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ باشد، آن گاه $\vec{b} = \vec{c}$ است.
 (۲) اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ باشد، آن گاه $\vec{b} = \vec{c}$ است.
 (۳) اندازه بردار \vec{a}' کوچکتر یا مساوی اندازه بردار \vec{a} است.
 (۴) اندازه بردار \vec{a}' کوچکتر یا مساوی اندازه بردار \vec{b} است.

۲۵- اگر \vec{i} ، \vec{j} و \vec{k} بردارهای یک‌محورهای مختصات باشند، حاصل عبارت $2\vec{i} \cdot (3\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (2\vec{i} \times 3\vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (3\vec{i} \times 2\vec{j})$ کدام است؟

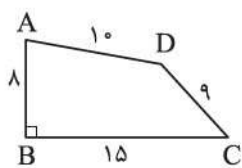
- (۱) صفر (۲) ۱۲ (۳) ۲۴ (۴) ۴۸

۲۶- در مثلثی به طول اضلاع ۶، ۷ و ۹، اختلاف طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه متوسط، بر روی ضلع روبه‌روی خود ایجاد می‌کند، کدام است؟

- (۱) $1/2$ (۲) $1/4$ (۳) $1/6$ (۴) $1/8$

محل انجام محاسبات

۲۷- در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



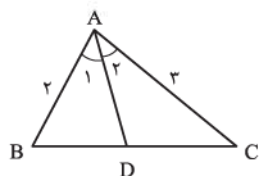
(۱) $48\sqrt{3}$

(۲) ۷۲

(۳) $36\sqrt{3}$

(۴) ۹۶

۲۸- مطابق شکل، اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 30^\circ$ ، آن گاه طول AD کدام است؟



(۱) $1/2\sqrt{3}$

(۲) $1/4\sqrt{3}$

(۳) $1/2$

(۴) $1/8$

۲۹- در مثلث ABC، نقطه M وسط ضلع BC است و نیمساز زوایای AMB و AMC اضلاع AB و AC را به ترتیب

در نقاط P و Q قطع می‌کنند. اگر $BC = 12$ ، $AB = AM = 9$ ، آن گاه طول پاره خط MQ کدام است؟

(۲) $2/4\sqrt{3}$

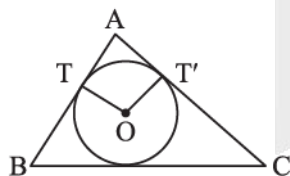
(۱) $2/4\sqrt{6}$

(۴) $3\sqrt{3}$

(۳) $3\sqrt{6}$

۳۰- مطابق شکل، مثلث ABC به اضلاع $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ و دایره محاطی آن رسم شده‌اند. اگر O مرکز

دایره و T و T' نقاط تماس باشند، مساحت چهارضلعی ATOT' کدام است؟



(۱) $\sqrt{1/5}$

(۲) $\sqrt{2}$

(۳) $\sqrt{2/5}$

(۴) $\sqrt{3}$

محل انجام محاسبات



۳۱- در چند جایگشت از ارقام ۴, ۴, ۳, ۲, ۱, ۱, ۱ دو رقم ۳ و ۲ کنار هم هستند؟

(۲) $(6)_3$

(۱) $\binom{6}{3}$

(۴) $(6)_2$

(۳) $\binom{6}{2}$

۳۲- ۲ عدد به صورت تصادفی از مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع این دو عدد نیز یک‌رقمی است، با کدام احتمال دقیقاً یکی از اعداد انتخاب شده اول است؟

(۴) $\frac{5}{8}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{9}{16}$

(۱) $\frac{3}{5}$

۳۳- باران و ستایش هر کدام با احتمال $\frac{3}{5}$ و $\frac{5}{8}$ می‌خواهند در آزمون‌های خیلی سبز ثبت‌نام کنند. اگر ستایش ثبت‌نام کند، باران با احتمال $\frac{4}{5}$ ثبت‌نام می‌کند. اگر ستایش در آزمون ثبت‌نام نکند، با کدام احتمال باران هم در آزمون ثبت‌نام نمی‌کند؟

(۴) $\frac{5}{85}$

(۳) $\frac{5}{8}$

(۲) $\frac{5}{75}$

(۱) $\frac{5}{65}$

۳۴- در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ لامپ وجود دارد که در جعبه اول ۴ و در جعبه دوم ۵ لامپ معیوب هستند. از اولی به تصادف ۶ لامپ برداشته و در جعبه دوم قرار می‌دهیم. سپس از جعبه دوم لامپی انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال معیوب است؟

(۴) $\frac{1}{7}$

(۳) $\frac{2}{7}$

(۲) $\frac{3}{7}$

(۱) $\frac{4}{7}$

۳۵- اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) + P(B) = \frac{1}{3}$ باشد، بیشترین مقدار $P(A' \cap B')$ کدام است؟

(۴) $\frac{5}{6}$

(۳) $\frac{1}{2}$

(۲) $\frac{25}{36}$

(۱) $\frac{11}{36}$

۳۶- سه برادر تقریباً هم‌سن‌وسال در خانه سه کت مشکی، قهوه‌ای و سرمه‌ای و سه پیراهن با همین سه رنگ دارند. آن‌ها می‌خواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد، هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد. اگر بخواهیم برادر بزرگ‌تر در روز اول کت مشکی را با پیراهن مشکی بپوشد، برنامه‌ریزی به چند صورت ممکن است انجام بگیرد؟

(۴) ۸

(۳) ۶

(۲) ۴

(۱) ۲

۳۷- چند تابع یک‌به‌یک $f: \{1, 2, 3\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4, 5\}$ وجود دارد که $f(1) + f(2) + f(3)$ عددی فرد باشد؟

(۴) ۱۸

(۳) ۲۴

(۲) ۱۵

(۱) ۳۶

محل انجام محاسبات



۳۸- معادله $x_1 + \frac{9}{x_2 + x_3} + x_4 + x_5 = 10$ ، چند جواب در مجموعه اعداد صحیح نامنفی دارد؟

- (۴) ۲۶۰
- (۳) ۴۳۶
- (۲) ۶۹۴
- (۱) ۷۰۰

۳۹- چند جایگشت از خانه‌های جدول زیر وجود دارد به طوری که هیچ کدام از ارقام ۱، ۲ و ۳ در مکان فعلی خود

۱	۲	۳
۴	۵	۶

۳	۱	۲
۴	۵	۶

۳	۱	۴
۶	۵	۲

نباشند؟ (مثل)

- (۴) ۴۳۶
- (۳) ۴۲۶
- (۲) ۴۲۸
- (۱) ۲۴۲

۴۰- در هر زیرمجموعه m عضوی از مجموعه اعداد طبیعی یک رقمی مطمئن هستیم که حداقل ۳ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها از ۱۰ کم‌تر است. کم‌ترین مقدار m کدام است؟

- (۴) ۵
- (۳) ۸
- (۲) ۷
- (۱) ۶

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات



آزمون آزمایشی خیلی سبز

دانشگاه ریاضی

مرحله چهاردهم

پایه دوازدهم

۲۲/ اسفند/ ۱۴۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه		دوازدهم	مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
دهم	یازدهم	فصل ۵ و فصل ۶ صفحه ۱۱۵ تا ۱۵۶	۴۵ دقیقه	۷۵	۴۱	۳۵	فیزیک
-	فصل ۳ صفحه ۹۹ تا ۱۳۳	فصل ۴ صفحه ۹۱ تا ۱۲۳	۳۰ دقیقه	۱۰۵	۷۶	۳۰	شیمی
-	-	-	۷۵ دقیقه	-	۶۵ سؤال	-	مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - علیرضا جباری - هادی حمزه پور - رضا سبزمیدانی نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: فرشید ابراهیمی - مهدی براتی - سلیم بهرامی - پیمان خواجوی مجد امیر قاسمی پور - سروش عبادی - یاسر عبداللهی کارشناسان علمی: مرتضی نصیرزاده - یاشار ذریه	یاسر عبداللهی

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون‌های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال‌ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه‌ها، نوع صفحه‌آرایی، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه‌ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می‌شود.



۴۱- شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین W/m^2 ۳۰۰ است. اگر طول موج متوسط فوتون‌های تابیده شده 528 nm باشد، در هر دقیقه چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟ ($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ و $h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$)

- (۱) $2/4 \times 10^{21}$ (۲) $4/8 \times 10^{21}$ (۳) $2/4 \times 10^{22}$ (۴) $4/8 \times 10^{22}$

۴۲- در اتم هیدروژن، محدوده تقریبی بسامدهای رشته بالمر ($n' = 2$) بر حسب تراهرتز کدام است؟

($c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$ و $R = 0.01 \text{ nm}^{-1}$)

- (۱) $416/6$ تا 750 (۲) 500 تا 750
(۳) $416/6$ تا 1500 (۴) 500 تا 1500

۴۳- الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = 5$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اختلاف انرژی پرنرژی‌ترین و کم‌انرژی‌ترین فوتونی که می‌تواند گسیل کند، چند ریذبرگ است؟

- (۱) $21/100$ (۲) $12/25$ (۳) $15/16$ (۴) $3/4$

۴۴- طول موج چهارمین خط طیف اتم هیدروژن در رشته پاشن ($n' = 3$) چند نانومتر است؟ ($R = 0.01 \text{ nm}^{-1}$)

- (۱) $502/5$ (۲) 525 (۳) $1102/5$ (۴) 1125

۴۵- در اتم هیدروژن، الکترون در طی یک گذار، فوتونی با انرژی J $2/04 \times 10^{-18}$ گسیل می‌کند. در این گذار، شعاع مدار الکترون چند پیکومتر تغییر می‌کند؟ ($E_R = 13/6 \text{ eV}$ ، $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$ و $a_0 = 5/29 \times 10^{-11} \text{ m}$)

- (۱) $79/35$ (۲) $793/5$ (۳) $158/7$ (۴) 1587

۴۶- مدل اتمی بور در چه تعداد از موارد زیر، ناموفق است؟

(الف) توجیه طیف گسیلی و جذبی اتم‌های هیدروژن گونه

(ب) محاسبه انرژی یونش اتم‌های هیدروژن گونه

(پ) توجیه تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن

(ت) تبیین پایداری اتم‌های دارای دو الکترون یا بیشتر

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

۴۷- نوری با طول موج 155 nm به سطح فلزی که تابع کار آن $6/2 \text{ eV}$ است، می‌تابد. بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده از فلز، چند متر بر ثانیه است؟ ($hc = 1/24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}$ ، $m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

- (۱) $4\sqrt{2} \times 10^6$ (۲) 8×10^6
(۳) $4\sqrt{2} \times 10^5$ (۴) 8×10^5

محل انجام محاسبات



۴۸- کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) نیروی هسته‌ای، کوتاه‌برد است و تنها در فاصله‌ای کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند.
- (۲) نیروی ربایشی هسته‌ای یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون، یا یک پروتون و یک نوترون وجود دارد.
- (۳) یک پروتون یا یک نوترون، فقط نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاور خود را با نیروی هسته‌ای جذب می‌کند.
- (۴) در هسته‌های پایدار، نیروی دافعه الکتروستاتیکی بین پروتون‌ها با نیروی جاذبه گرانش بین نوکلئون‌ها، موازنه می‌شود.

۴۹- کدام موارد زیر درست است؟

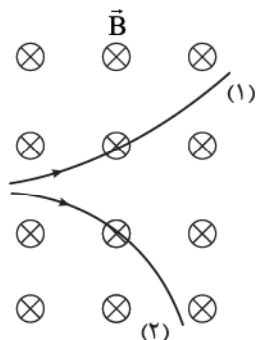
- (الف) جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی بیشتر است.
- (ب) انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند انرژی الکترون‌های وابسته به اتم، کوانتیده‌اند.
- (پ) در همه ایزوتوپ‌های پایدار سبک، تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است.
- (ت) هر چه کاستی جرم هسته ایزوتوپی بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته‌ای آن نیز بیشتر است.

(۱) «الف» و «پ» (۲) «الف» و «ت»

(۳) «ب» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

۵۰- مسیر حرکت دو ذره حاصل از پرتوایی طبیعی، در میدان مغناطیسی یکنواختی به شکل زیر است. مسیرهای (۱) و (۲)،

به ترتیب از راست به چپ، مربوط به کدام ذره‌ها می‌توانند باشند؟



(۱) آلفا، الکترون

(۲) پوزیترون، الکترون

(۳) الکترون، آلفا

(۴) آلفا، پوزیترون

۵۱- عبارتهای «الف»، «ب» و «پ»، به ترتیب از راست به چپ، درباره کدام نوع واپاشی است؟

(الف) در این واپاشی یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.

(ب) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.

(پ) یکی از کاربردهای گسترده این واپاشی، در آشکارسازهای دود است.

(۱) بتای منفی، آلفا، گاما (۲) بتای منفی، بتا، آلفا

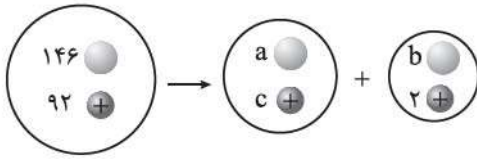
(۳) بتای مثبت، آلفا، گاما (۴) بتای مثبت، بتا، آلفا

۵۲- به ترتیب در کدام واپاشی، عدد اتمی هسته مادر تغییر نمی‌کند و در کدام واپاشی عدد اتمی هسته مادر افزایش می‌یابد؟

(۱) گاما - بتای مثبت (۲) گاما - بتای منفی (۳) بتای مثبت - آلفا (۴) بتای منفی - آلفا

محل انجام محاسبات

۵۳- شکل زیر، واپاشی آلفا برای اورانیوم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در این شکل a و b به ترتیب از راست به چپ، کدام‌اند؟



(۱) ۲، ۱۴۲

(۲) ۲، ۱۴۴

(۳) ۴، ۱۴۲

(۴) ۴، ۱۴۴

۵۴- سرب ${}_{82}^{A}\text{Pb}$ ، هستهٔ دختر پایداری است که می‌تواند حاصل از واپاشی α هستهٔ X یا واپاشی β^- هستهٔ Y باشد. اختلاف تعداد نوترون‌های دو هستهٔ X و Y کدام است؟

(۴) ۴

(۳) ۳

(۲) ۲

(۱) ۱

۵۵- در یک واپاشی α ، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هستهٔ پایدار حاصل برابر ۵۴ است. اگر بار الکتریکی هستهٔ مادر $C = 14/72 \times 10^{-18}$ باشد، عدد جرمی هستهٔ مادر کدام است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(۴) ۲۳۸

(۳) ۲۳۴

(۲) ۲۰۲

(۱) ۱۹۸

۵۶- پس از گذشت ۲۴ روز، ۸۷/۵ درصد از هسته‌های مادر اولیهٔ یک ایزوتوپ پرتوزا، واپاشیده می‌شود. نیمه‌عمر این ایزوتوپ چند روز است؟

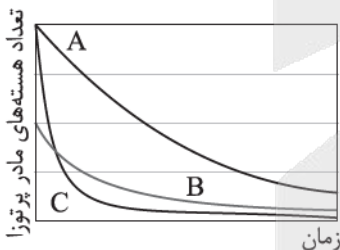
(۴) ۱۲

(۳) ۸

(۲) ۶

(۱) ۴

۵۷- شکل زیر، نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه را بر حسب زمان نشان می‌دهد. در کدام گزینه، این سه نمونه از راست به چپ به ترتیب افزایش نیمه‌عمر مرتب شده‌اند؟



(۱) C, B, A

(۲) B, C, A

(۳) A, C, B

(۴) A, B, C

۵۸- تعداد هسته‌های اولیهٔ نمونهٔ پرتوزای A ، ۴ برابر تعداد هسته‌های اولیهٔ نمونهٔ پرتوزای B است. بعد از گذشت مدتی معین، تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونهٔ B ، ۸ برابر تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونهٔ A می‌شود. اگر در این مدت، تعداد نیمه‌عمرهای سپری‌شده برای دو نمونهٔ A و B به ترتیب n_A و n_B باشد، $n_A - n_B$ برابر کدام است؟

(۴) -۵

(۳) ۵

(۲) -۱

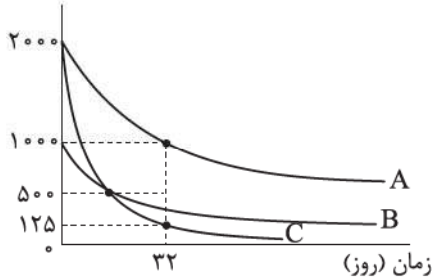
(۱) ۱

محل انجام محاسبات



۵۹- نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه A، B و C بر حسب زمان، به شکل زیر است. پس از چند روز، ۱۲۶ g از یک نمونه اولیه ۱۲۸ گرمی از ماده B، واپاشیده می‌شود؟

تعداد هسته‌های مادر پرتوزا



۱۶ (۱)

۴۸ (۲)

۶۴ (۳)

۹۶ (۴)

۶۰- کدام یک از عبارتهای زیر، درست است؟

الف) در فرایند شکافت اورانیوم ۲۳۵، ترکیب‌های متفاوتی از هسته‌های کوچک‌تر، همراه با تعدادی نوترون تند به وجود می‌آید.

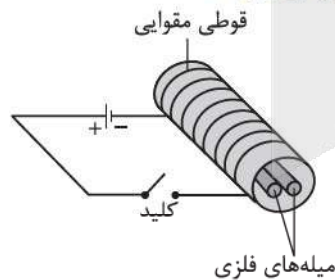
ب) در واکنش گداخت هسته‌ای، برخلاف واکنش شکافت هسته‌ای، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است.

پ) غنی‌سازی، فرایند تبدیل اورانیوم ۲۳۸ به اورانیوم ۲۳۵ در یک نمونه از سنگ معدن اورانیوم است.

ت) آب معمولی، آب سنگین و گرافیت از جمله موادی هستند که به عنوان کندساز نوترون‌ها در واکنش‌های شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

(۱) «الف» و «پ» (۲) «الف» و «ت» (۳) «ب» و «پ» (۴) «ب» و «ت»

۶۱- دو میله فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیملوله‌ای که دور یک قوطی مقاوی پیچیده شده است قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیملوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه باز می‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟



(۱) پارامغناطیسی

(۲) دیامغناطیسی

(۳) فرومغناطیسی نرم

(۴) فرومغناطیسی سخت

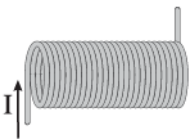
محل انجام محاسبات

۶۲- در شکل زیر، حلقهٔ رسانای حامل جریانی در صفحه قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی حاصل از این حلقه در نقطهٔ M عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه باشد، چه تعداد از موارد زیر الزاماً درست است؟
 الف) میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، عمود بر صفحه و به سمت بیرون صفحه است.
 ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، از اندازهٔ میدان مغناطیسی در نقطهٔ M کوچک تر است.
 پ) جریان عبوری از حلقه ساعتگرد است.



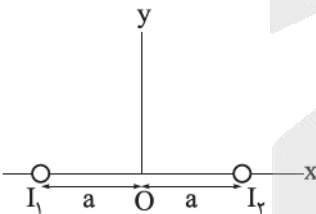
- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴) صفر

۶۳- در شکل زیر، سیملولهٔ آرمانی به طول ۱۵ cm دارای ۳۰ حلقهٔ سیم نزدیک به هم است. اگر جریان $I = ۸۰۰ \text{ mA}$ از سیملوله بگذرد، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای درون سیملوله و دور از لبه‌های آن چند گاوس و در چه جهتی است؟
 ($\mu_0 = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷} \text{ T.m / A}$)



- ، ۲ (۱)
- ← ، ۲ (۲)
- ، ۲۰ (۳)
- ← ، ۲۰ (۴)

۶۴- در شکل زیر، دو سیم حامل جریان الکتریکی هم‌اندازهٔ I_1 و I_2 ، عمود بر صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی خالص در هر نقطهٔ دلخواه بر روی قسمت مثبت محور y، در جهت محور x باشد، I_1 در چه جهتی است و نوع نیروی مغناطیسی‌ای که دو سیم به یکدیگر وارد می‌کنند، کدام است؟



- ⊗، ربایشی (۱)
- ⊗، رانشی (۲)
- ⊙، ربایشی (۳)
- ⊙، رانشی (۴)

۶۵- با استفاده از سیم بلندی با طول معین، در حالت اول پیچهٔ مسطحی به شعاع R و در حالت دوم پیچهٔ مسطحی به شعاع ۲R درست می‌کنیم. اگر در هر دو حالت جریان الکتریکی یکسانی از دو پیچه عبور کند، اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه در حالت اول، چند برابر اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز پیچه در حالت دوم است؟

- ۴ (۱)
- ۱/۴ (۲)
- ۲ (۳)
- ۱/۲ (۴)

محل انجام محاسبات

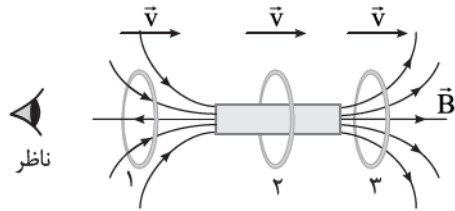


۶۶- زاویه بین خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی با سطح یک حلقه برابر 53° است. این زاویه چند درجه و چگونه تغییر کند تا شار مغناطیسی عبوری از حلقه ۲۵ درصد کاهش یابد؟ ($\cos 53^\circ = 0.6$)

(۱) ۱۶، کاهش یابد. (۲) ۳۷، کاهش یابد.

(۳) ۱۶، افزایش یابد. (۴) ۳۷، افزایش یابد.

۶۷- حلقهٔ رسانایی به طرف یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر، حلقه را در سه وضعیت نسبت به آهنربا نشان می‌دهد. اگر جریان القاشده در حلقه در وضعیت‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب I_1 ، I_2 و I_3 باشد، از دید ناظر مشخص شده در شکل، کدام درست است؟



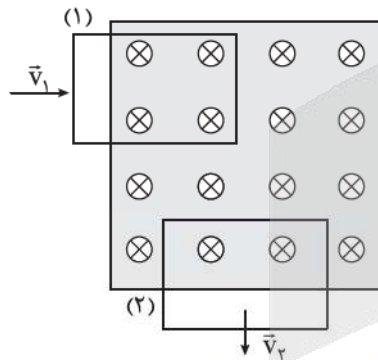
(۱) I_1 ، I_2 و I_3 هر سه ساعتگردند.

(۲) I_1 ، I_2 و I_3 هر سه پادساعتگردند.

(۳) I_1 ساعتگرد، I_2 پادساعتگرد و I_3 برابر صفر است.

(۴) I_1 ساعتگرد، I_2 پادساعتگرد و I_3 برابر صفر است.

۶۸- در شکل زیر، قاب مستطیل شکل رسانایی در حالت (۱)، در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه و در حالت (۲)، در حال خروج از آن است. اگر تندی قاب در دو حالت یکسان باشد، کدام یک از موارد زیر درست است؟



(الف) جریان القاشده در قاب در حالت (۱) ساعتگرد است.

(ب) جریان القاشده در قاب در حالت (۲) ساعتگرد است.

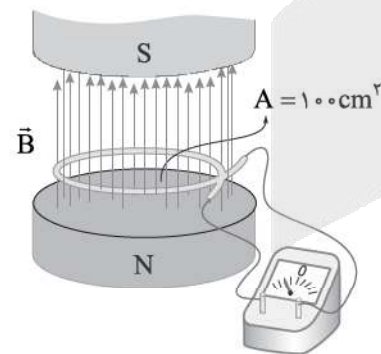
(پ) اندازهٔ جریان القاشده در قاب در حالت (۲) بیشتر از حالت (۱) است.

(ت) اندازهٔ جریان القاشده در قاب در دو حالت، یکسان است.

(۱) الف و پ (۲) الف و ت

(۳) ب و پ (۴) ب و ت

۶۹- در شکل زیر، میدان مغناطیسی بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدتی معین از 3 T / رو به بالا به 2 T / رو به پایین می‌رسد. اگر مقاومت الکتریکی حلقه 20Ω باشد، در این مدت بار شارش یافته در حلقه چند میلی‌کولن است؟



(۱) ۰/۰۵

(۲) ۰/۲۵

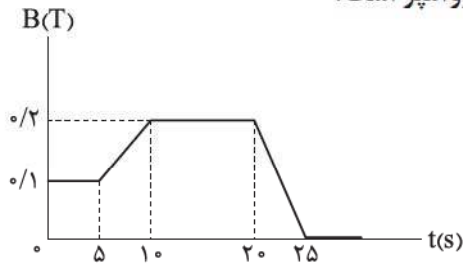
(۳) ۰/۵

(۴) ۲/۵

محل انجام محاسبات

۷۰- یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع 3 cm و مقاومت الکتریکی $1\ \Omega$ در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد به طوری که خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می کند.

جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t = 9\text{ s}$ تا $t = 24\text{ s}$ چند میکروآمپر است؟



۷۲ (۱)

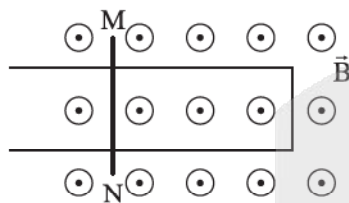
۸۴ (۲)

۷۲۰ (۳)

۸۴۰ (۴)

۷۱- شکل زیر، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} به اندازه 18 T نشان می دهد. میدان \vec{B} عمود بر صفحهٔ شکل و رو به بیرون است. میلهٔ فلزی MN بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می دهد.

میله با تندی ثابت روی دو بازوی رسانا حرکت می کند. اگر نیروی محرکه القاشده در مدار برابر 9 mV و جهت جریان القاشده در میله از M به N باشد، به ترتیب آهنگ تغییر مساحت مدار در SI و جهت حرکت میله کدام است؟



(۱) 0.05 ، راست

(۲) 0.05 ، چپ

(۳) 5 ، راست

(۴) 5 ، چپ

۷۲- طول سیملولهٔ حامل جریانی برابر 50 cm و سطح مقطع آن برابر 10 cm^2 است. اگر اندازهٔ میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله در نقطه‌ای روی محور آن برابر 30 G باشد، انرژی ذخیره شده در آن چند میلی ژول است؟

$(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7}\text{ T.m/A})$

(۲) $3/6$

(۱) ۳۶

(۴) $1/8$

(۳) ۱۸

۷۳- معادلهٔ جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر با ضریب القاوری 40 mH برحسب زمان در SI به صورت $I = 5\sin(100\pi t)$ است. انرژی ذخیره شده در القاگر در لحظهٔ $t = 7/5\text{ ms}$ چند ژول است؟

(۲) 0.25

(۱) 0.1

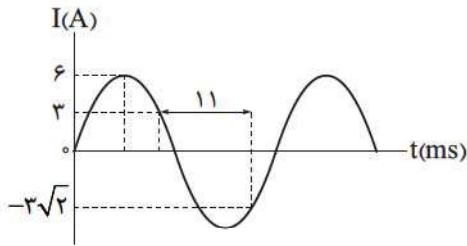
(۴) $2/5$

(۳) ۱

محل انجام محاسبات



۷۴- نمودار جریان متناوب سینوسی حاصل از یک مولد جریان متناوب بر حسب زمان به شکل زیر است. اندازه جریان الکتریکی عبوری از این مولد در لحظه $t = 16 \text{ ms}$ چند آمپر است؟



۳ (۱)

$3\sqrt{2}$ (۲)

$3\sqrt{3}$ (۳)

۶ (۴)

۷۵- تعداد دورهای اولیه و ثانویه یک مبدل به ترتیب برابر 75° و 15° است. اگر دو سر پیچۀ اولیه آن به ولتاژ 150 V وصل شود، از یک لامپ 15 اهمی که به دو سر پیچۀ ثانویه مبدل متصل شده است، جریان چند آمپری می‌گذرد؟

۵ (۴)

$0/5$ (۳)

۲ (۲)

$0/2$ (۱)

محل انجام محاسبات

۷۶- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

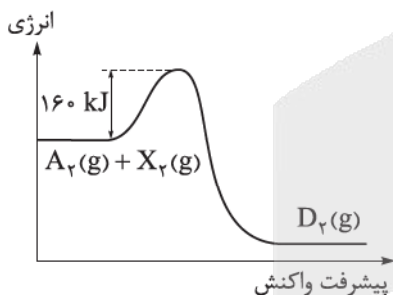
(۱) اوره و آمونیاک، هر دو از کودهای شیمیایی نیتروژن دار هستند و در مقیاس صنعتی، آمونیاک زودتر از اوره تولید شده است.
 (۲) در نمودار انرژی - پیشرفت واکنش‌های گرماده، انرژی فعال سازی واکنش از اختلاف سطح انرژی فرآورده‌ها و سد انرژی بیشتر است.

(۳) در مبدل کاتالیستی، در سطح سرامیک‌ها که به شکل توری هستند، فلزهای Pt, Pd و Ru نشانده شده است.
 (۴) دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود یکی از اکسیدهای نیتروژن است که عدد اکسایش اتم نیتروژن در آن برابر +۲ است.

۷۷- اگر انرژی فعال سازی واکنش‌های (۱)، (۲) و (۳) در شرایط یکسان به ترتیب برابر a ، $a - x$ و $a + x$ کیلوژول باشد، در صورت تأمین کیلوژول انرژی، انجام می‌شود. (X عددی مثبت است.)

- (۱) a ، واکنش‌های (۱) و (۲) با سرعت برابری
 (۲) $a + x$ ، به یقین هر سه واکنش با سرعت بسیار زیاد
 (۳) $a - x$ ، فقط واکنش (۲)
 (۴) $a - 2x$ ، به یقین واکنش (۱)

۷۸- با توجه به نمودار انرژی - پیشرفت زیر، اگر مجموع آنتالپی پیوندها در A_p ، X_p و D_p بر حسب kJ.mol^{-1} به ترتیب برابر ۱۷۱۹، ۴۳۶ و ۲۳۳۴ باشد، در صورتی که کاتالیزگر واکنش، انرژی فعال سازی را ۴۰ درصد کاهش دهد، فاصله سد انرژی و سطح انرژی فرآورده واکنش در حالتی که از کاتالیزگر استفاده می‌کنیم، چند کیلوژول خواهد بود؟



- (۱) ۲۳۴
 (۲) ۲۴۳
 (۳) ۲۵۷
 (۴) ۲۷۵

۷۹- کاربرد کاتالیزگر در واکنش شیمیایی، موجب چه تعداد از تغییرهای زیر می‌شود؟

- تغییر مسیر انجام واکنش
- افزایش سرعت واکنش
- کاهش سطح انرژی واکنش دهنده‌ها
- افزایش پایداری فرآورده‌ها
- کاهش ΔH (آنتالپی) واکنش
- افزایش مقدار فرآورده‌ها

- (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۶

محل انجام محاسبات

۸۰- با توجه به جدول داده شده، با طی مسافت ۱۰۰ کیلومتر توسط یک خودرو، به تقریب چند گرم کربن دی اکسید از طریق واکنش‌های انجام شده در مبدل کاتالیستی خودرو وارد هوا می‌شود؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

NO	C_8H_{18}	CO		فرمول شیمیایی آلاینده
۱/۰۴	۱/۶۷	۵/۹۹	بدون کاتالیزگر	مقدار گرم آلاینده به ازای
۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۶۱	با کاتالیزگر	طی یک کیلومتر مسافت

۷۲۵ (۲)

۴۹۴ (۱)

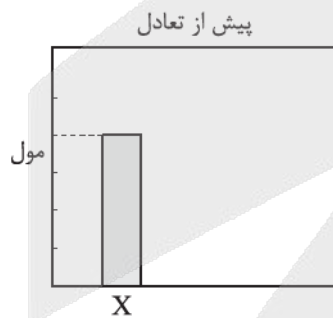
۱۳۳۹ (۴)

۸۶۹ (۳)

۸۱- کدام مورد، جمله داده شده را به درستی تکمیل نمی‌کند؟

«در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی،»

- (۱) بین دو محفظه، مخزن آمونیاک وجود داشته و در هر دو محفظه، بخار آب تولید می‌شود.
 - (۲) فرآورده کربن‌دار واکنش سوختن ناقص سوخت‌های فسیلی به عنوان واکنش‌دهنده در محفظه اول مصرف می‌شود.
 - (۳) در محفظه دوم، فرآورده هابر به عنوان واکنش‌دهنده و یکی از واکنش‌دهنده‌های فرایند هابر، به عنوان فرآورده می‌باشد.
 - (۴) همانند خودروهای بنزینی، ۳ نوع ماده در واکنش‌های شیمیایی مربوط به حذف آلاینده‌ها تولید می‌شود.
- ۸۲- با توجه به شکل زیر که مربوط به یک واکنش تعادلی است، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟ (همه مواد به حالت گازند و حجم ظرف واکنش، ۵ / ۰ لیتر و شمار مول‌های اولیه X برابر ۲ است.)



۱۶ (۴)

$\frac{1}{4}$ (۳)

$\frac{1}{16}$ (۲)

۴ (۱)

محل انجام محاسبات

۸۳- با توجه به جدول زیر و واکنش تعادلی $2B(g) \rightleftharpoons 2A(g) + Z(g)$ ، کدام موارد درست است؟

$\theta(^{\circ}C)$	K
۴۳۵	4×10^{-5}
۲۲۵	4×10^{-11}
۲۵	$2/5 \times 10^{-25}$

الف) واکنشی گرماگیر بوده و در آن، مجموع آنتالپی پیوند واکنش دهنده‌ها بزرگ‌تر از مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها است.

ب) اثر افزایش غلظت B، مشابه اثر افزایش دما، تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

پ) طبق معادله واکنش، غلظت تعادلی B دو برابر غلظت تعادلی Z است.

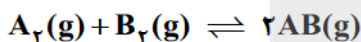
ت) اگر حجم سامانه را از ۳ لیتر به ۱ لیتر تغییر دهیم، مقدار ثابت تعادل واکنش کاهش می‌یابد.

(۱) ب - ت (۲) الف - ب (۳) الف - پ (۴) پ - ت

۸۴- در ظرفی دربسته به حجم دو لیتر، ۵ مول AB به همراه دو مول از هر یک از گازهای A و B در تعادل هستند. اگر

به این ظرف در دمای ثابت، چهار مول AB بیفزاییم، در لحظه برقراری تعادل، اختلاف غلظت مولی گازهای AB و A به تقریب

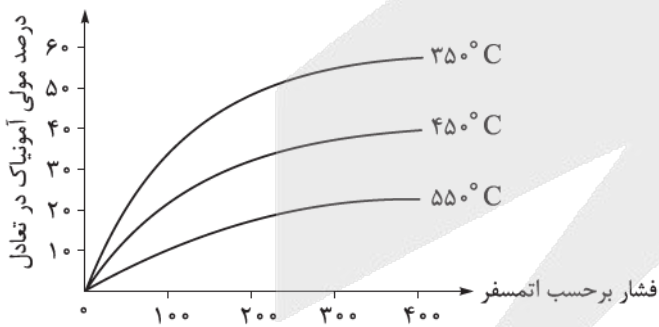
چه قدر خواهد بود؟



(۱) ۲/۱۷ (۲) ۳/۱۴ (۳) ۵/۲۳ (۴) ۶/۲۶

۸۵- نمودار زیر، تأثیر تغییر دما و فشار را بر درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی فرایند هابر نشان می‌دهد. با توجه

به نمودار، کدام مورد زیر درست است؟



(۱) مناسب‌ترین شرایط برای تولید آمونیاک، فشار

کم و دمای بالا است.

(۲) با افزایش دما، شمار مولکول‌های آمونیاک موجود

در مخلوط افزایش می‌یابد.

(۳) در دو آزمایش با دما و فشار متفاوت، ممکن نیست

درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی یکسان باشد.

(۴) در فشار ۳۰۰ atm و دمای $35^{\circ}C$ ، از هر ۱۰۰ مولکول موجود در ظرف، ۵۰ مولکول، آمونیاک است.

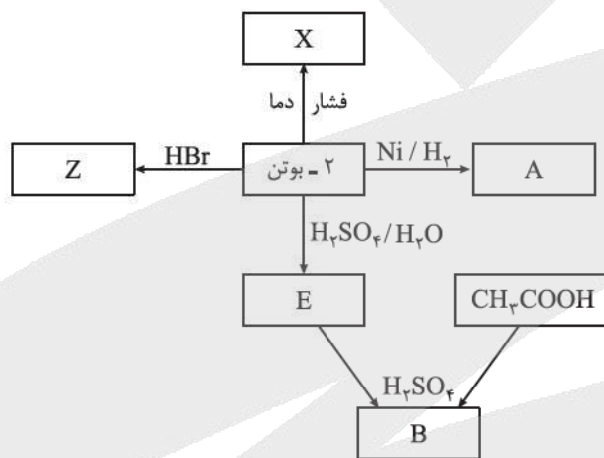
محل انجام محاسبات

۸۶- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) آمونیاک، سولفوریک اسید، متانول و بنزین، جزء فراورده‌های پتروشیمیایی هستند که پس از پالایش نفت خام به دست می‌آیند.
- (۲) خام‌فروشی، تنها برای منابع شیمیایی مانند نفت خام، گاز و زغال سنگ و منابع معدنی مانند سنگ آهن، مس و روی صادق است.
- (۳) انرژی و فناوری شیمیایی از جمله عوامل لازم برای تهیه مواد اولیه مهم و پرکاربرد در صنایع از مواد خام است.
- (۴) سنتز مواد جدید از مواد خام، به دانش شناخت ساختار و رفتار گروه‌های عاملی، شرایط انجام واکنش و عوامل مؤثر بر انجام واکنش نیاز دارد.

۸۷- نمودار زیر مربوط به سنتز مواد مختلف از ۲- بوتن است. کدام موارد زیر درست‌اند؟

($H = 1, C = 12, O = 16, Br = 80 : g \cdot mol^{-1}$)



- (الف) ترکیب E و دی‌اتیل اتر، ایزومر یکدیگرند.
- (ب) تفاوت جرم مولی B و Z، کم‌تر از $\frac{1}{4}$ جرم مولی A است.
- (پ) هر مولکول از B دارای ۲۰ پیوند اشتراکی است.
- (ت) ترکیب X برخلاف Z، ترکیبی سیرشده است.

(۱) الف - پ (۲) ب - ت (۳) پ - ت (۴) الف - ب - پ

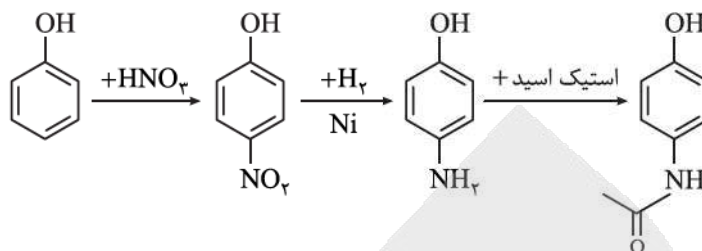
۸۸- با توجه به مطالب کتاب درسی، مولکول حلال چسب و مولکولی که در تهیهٔ افشانهٔ بی‌حس‌کنندهٔ موضعی کاربرد دارد، در کدام مورد مشابه هستند؟

- (۱) سنتز مستقیم از اتن
- (۲) مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن
- (۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی
- (۴) شمار پیوندهای C-H

محل انجام محاسبات



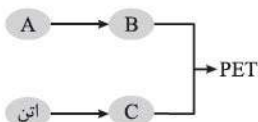
۸۹- با توجه به مراحل سنتز استامینوفن، کدام مطلب نادرست است؟



(۱) فرمول مولکولی استامینوفن، به صورت $C_8H_9NO_2$ بوده و دارای گروه‌های هیدروکسیل و آمیدی است.
 (۲) سنتز دارو، شامل سه مرحله است که در هر سه مرحله، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در حلقه آروماتیک تغییر می‌کند.

(۳) اگر بازده مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب ۸۰، ۸۰ و ۵۰ درصد باشد، بازده کلی فرایند، ۳۲ درصد است.
 (۴) مرحله دوم این سنتز، دارای انرژی فعال‌سازی بالایی است و برای کاهش آن از کاتالیزگر نیکل استفاده می‌شود.

۹۰- با توجه به شکل زیر که مربوط به فرایند کلی تولید PET می‌باشد، کدام موارد درست است؟



(الف) شماره اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی B با شماره اتم‌های هیدروژن در مولکول پروپن برابر است.

(ب) اگر در تبدیل A به B، از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات استفاده شود، بازده واکنش بالاتر از زمانی است که از O_2 و کاتالیزگر استفاده می‌شود.

(پ) بر اثر واکنش C با استیک اسید، می‌توان دی‌استر تولید کرد.

(ت) تفاوت جرم مولی B و معروف‌ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک، برابر جرم مولی CO_2 است.

(۱) الف - ت (۲) ب - پ (۳) الف - پ - ت (۴) الف - ب - ت

۹۱- کدام مورد نادرست است؟

(۱) پلاستیک‌ها به دلیل چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان بودن و مقاومت در برابر خوردگی، کاربردهای وسیعی در زندگی دارند.

(۲) PET برخلاف پلیمرهای طبیعی، ماندگاری زیادی دارد و در طبیعت به کندی تجزیه می‌شود.

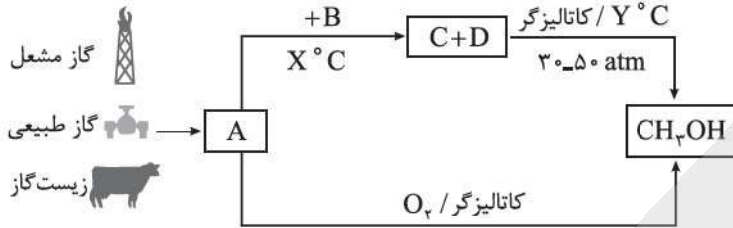
(۳) در بازیافت شیمیایی PET با متانول، مونومرهای اولیه این پلیمر بازتولید می‌شوند.

(۴) جمع‌آوری، شست‌وشو، ذوب‌کردن و ساخت ابزارهای جدید، مراحل بازیافت پلی‌اتیلن ترفتالات هستند.

محل انجام محاسبات



۹۲- با توجه به شکل که به روش های تولید متانول مربوط است، اگر نقطه جوش C از D بالاتر باشد، کدام مطلب درست است؟



(۱) X، دمای کمتری نسبت به Y است.

(۲) گاز C را می توان از واکنش هیدروکلریک اسید با فلز منیزیم نیز تهیه کرد.

(۳) شمار پیوندهای کووالانسی A دوبرابر B است و B یکی از محصولات سوختن کامل متانول است.

(۴) در دمای اتاق گازهای نیتروژن و D با هم واکنش می دهند و نقطه جوش فرآورده از نقطه جوش A بالاتر است.

۹۳- درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه ها متفاوت است؟

- (۱) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیشتری از واکنش دهنده ها به فرآورده تبدیل شوند.
- (۲) از ترفتالیک اسید می توان به عنوان مونومر در تولید برخی از پلی استرها و پلی آمیدها استفاده کرد.
- (۳) از زیست گاز می توان به عنوان ماده اولیه فرایند بازیافت شیمیایی PET استفاده کرد.
- (۴) شمار اتم های کربن مولکول پارازایلن و مولکول استیرن، برابرند.

۹۴- کدام مورد درباره سلولز و نشاسته، نادرست است؟

- (۱) هر دو، جزء درشت مولکول های طبیعی بوده و شمار اتم های سازنده هر مولکول از آن ها، زیاد است.
- (۲) مولکول های نشاسته در محیط گرم و مرطوب، به سرعت به مونومر های سازنده خود، تبدیل می شود.
- (۳) الیاف پنبه از سلولز و سه عنصر کربن، هیدروژن و اکسیژن ساخته شده است.
- (۴) هر دو پلیمر مانند پلی سیانواتن، فقط از یک نوع مونومر ساخته شده اند.

۹۵- اگر در مولکول وینیل کلرید به جای کلر، قرار گیرد، به ترکیبی تبدیل می شود که

($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

- (۱) گروه متیل - برای سوختن کامل هر مول از آن، ۴ مول گاز اکسیژن لازم است.
- (۲) حلقه بنزن - درصد جرمی کربن در آن دوازده برابر درصد جرمی هیدروژن آن است.
- (۳) گروه CN - بر اثر بسپارش به ترکیبی تبدیل می شود که در تولید سرنگ کاربرد دارد.
- (۴) اتم فلئور - بین مولکول های آن مانند مولکول آمونیاک، پیوند هیدروژنی برقرار می شود.

۹۶- در یک نمونه از پلی پروپن، جرم اتم های کربن، ۶ گرم بیشتر از جرم اتم های هیدروژن است. جرم این نمونه چند

گرم است؟ ($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

۸ / ۴ (۴)

۵ / ۰ (۳)

۴ / ۲ (۲)

۰ / ۲ (۱)

محل انجام محاسبات

۹۷- در واکنش پلیمری شدن اتن، جرم مولی میانگین پلیمر به مقدار کاتالیزگرهای به کاررفته بستگی دارد. اگر در واکنش بسپارش اتن به ازای مصرف هر گرم کاتالیزگر دارای آلومینیم به تقریب ۳/۱۵ گرم کاتالیزگر دارای تیتانیم مصرف شود، شمار میانگین واحدهای تکرارشونده (n) برای پلیمر ایجادشده کدام است؟ (کاتالیزگرهای به کاررفته دارای فرمولهای $TiCl_4$ (با جرم مولی ۱۹۰ گرم) و $AlCl_3(C_2H_5)_2$ (با جرم مولی ۱۲۰/۵ گرم) می‌باشند.)

شمار مول کاتالیزگر حاوی تیتانیم	شمار مول کاتالیزگر حاوی آلومینیم	جرم مولی پلیمر ($g \cdot mol^{-1}$)
۱	۲	۲۹۴۰۰۰
۱	۱	۲۸۲۸۰۰
۱	۰/۵	۲۱۰۰۰
۱	۰/۲	۳۰۸۰۰

(۱) ۱۰۵۰۰ (۲) ۱۰۱۰۰ (۳) ۷۵۰ (۴) ۱۱۰۰

۹۸- کدام موارد زیر دربارهٔ الکل‌های یک‌عاملی سیرشده و غیرحلقوی (ROH)، درست است؟

($H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

(الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، خاصیت چربی دوستی افزایش می‌یابد.

(ب) در هر مولکول از آن‌ها با n اتم کربن، $\frac{3n+2}{2}$ پیوند اشتراکی وجود دارد.

(پ) نیروی بین مولکولی غالب در الکلی با جرم مولی $60 g \cdot mol^{-1}$ پیوند هیدروژنی است.

(ت) اولین عضو این خانواده بر اثر گزش مورچهٔ سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش می‌شود.

(۱) الف - ت (۲) ب - پ (۳) الف - پ (۴) ب - ت

۹۹- اگر A، آشناترین عضو خانوادهٔ اسیدهای آلی و B، استر عامل طعم و بوی آناناس باشد، تفاوت جرم مولی A و B با جرم مولی کدام ماده برابر است؟

(۱) بوتن (۲) بوتان (۳) پنتن (۴) پنتان

۱۰۰- کدام مورد نادرست است؟

(۱) جرم مولی گلوکز، ۳ برابر جرم مولی ساده‌ترین استر است.

(۲) ممکن است در ساختار یک پلیمر، هیچ اتم هیدروژنی وجود نداشته باشد.

(۳) در کربوکسیلیک اسیدها، اتم کربن گروه کربوکسیل، حداقل به یک اتم کربن دیگر متصل است.

(۴) با افزایش شمار اتم‌های کربن در الکان‌های راست‌زنجیر، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب تغییر محسوسی ندارد.

محل انجام محاسبات



۱۰۱- اگر جرم مولی الکل و اسید سازنده استری با فرمول مولکولی $C_9H_{18}O_2$ برابر باشد، کدام مورد درست است؟ (استر، یک عاملی، سیر شده و غیر حلقوی است.)

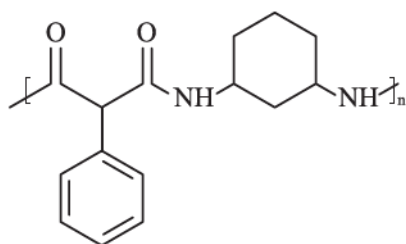
(۱) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی الکل و اسید برابر ۲ است.

(۲) الکل سازنده به هر نسبتی در آب حل می‌شود.

(۳) نام استر می‌تواند پنتیل بوتانات باشد.

(۴) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اسید سازنده برابر ۱۷ است.

۱۰۲- اختلاف تعداد پیوندهای کووالانسی در مولکول دی‌آمین سازنده پلیمر زیر با تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در دی‌اسید سازنده این پلیمر کدام است؟



(۱) ۱۴

(۲) ۲۴

(۳) ۱۸

(۴) ۲۰

۱۰۳- آسپارام یک شیرین‌کننده مصنوعی است که در صنایع نانوایی و محصولات قنادی به کار می‌رود. با توجه به ساختار

این ماده، کدام عبارت‌ها درست اند؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

(الف) بر اثر آبکافت آن متانول تولید می‌شود.

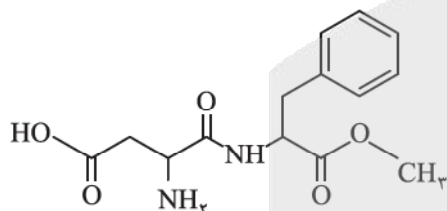
(ب) جرم مولی آن 292 g.mol^{-1} است و دارای یک حلقه آروماتیک است.

(پ) دارای دو گروه آمینی است و بین مولکول‌های آن پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

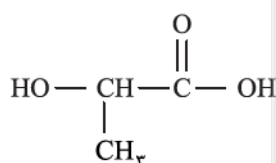
(ت) نسبت شمار الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول آن برابر ۷/۵ است.

(ث) سه اتم کربن در آن دارای عدد اکسایش صفر هستند.

(۱) الف - ب - ث (۲) ب - پ - ت (۳) الف - ت (۴) الف - ت - ث



۱۰۴- با توجه به شکل زیر که فرمول ساختاری لاکتیک اسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) برای تهیه پلی‌لاکتیک‌اسید، نخست نشاسته موجود در فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر را به این ماده تبدیل می‌کنند.

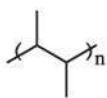
(۲) پلیمر حاصل از آن، پلیمر سبز بوده و در تهیه ظروف پلاستیکی یک‌بارمصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله و کیسه پلاستیکی و ... کاربرد دارد.

(۳) پلیمر حاصل از آن، پلی‌استر بوده و برای تهیه آن نیازی به کربوکسیلیک اسید دوعاملی و الکل دوعاملی نیست.

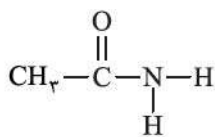
(۴) در فرایند پلیمری شدن آن، مجموع جرم مونومرها با جرم پلیمر حاصل برابر است.

محل انجام محاسبات

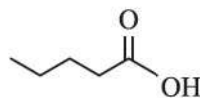
۱۰۵- با توجه به ساختارهای داده شده، کدام مورد نا درست است؟



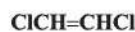
(۱)



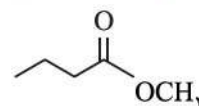
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

(۱) نقطه جوش ترکیب (۳) از ترکیب (۵) بالاتر است.

(۲) ساختار پلیمر حاصل از ترکیب (۴) به صورت $\left[\text{CH}_2-\underset{\text{Cl}}{\text{CH}}-\underset{\text{Cl}}{\text{CH}}-\text{CH}_2 \right]_n$ است.

(۳) نام مونومر سازنده پلیمر (۱)، ۲- بوتن است.

(۴) ترکیب (۲) یک آمید است که از واکنش ساده ترین آمین و استیک اسید تولید شده است.



پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۶ از صفحه
شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می توانید
از طریق آیدی @Kheilisabz_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



آزمون‌های تشریحی خیلی سبز



۵ مرحله در طول سال

شبیه‌سازی کامل امتحان نهایی

- منطبق بر بارم‌بندی آموزش و پرورش
- تشابه کامل فرم برگه سوال، پاسخ‌برگ، کلید، پاسخنامه و حتی فونت سوال‌ها با امتحان نهایی
- پوشش همه مطالب و انواع سوالات
- ارائه یک یا دو تست عینا مشابه امتحان نهایی
- هم‌سطح با دشواری سوالات امتحان نهایی



پاسخنامه‌های خیلی تشریحی

- ارائه پاسخ کامل و مرحله به مرحله
- محتوای یاددهنده شامل درسنامه
- ارائه نکات کلیدی هر سوال

تصحیح کاملا مکانیزه

- تصحیح کاملا حرفه‌ای توسط دو مصحح
- تصحیح سوم در صورت اختلاف نظر دو مصحح قبل
- تصحیح به صورت بررسی یک سوال برای گروهی از دانش‌آموزان
- امکان کامنت‌گذاری مصحح در فرایند تصحیح
- امکان درخواست تصحیح مجدد در پنل ثبت اعتراض

کارنامه‌های بسیار کاربردی

- کارنامه تحلیلی و مقایسه‌ای
- نمره به تفکیک سوال
- کارنامه مبحثی

آزمون



کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



جزوه



فیلم



مشاوره



www.
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف





پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله چهاردهم

پایه دوازدهم

۲۲/اسفند/۱۴۰۴

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	کاظم اجلائی - کوروش اسلامی - فرشاد حسنزاده - علی شهبابی - محمد گودرزی - میلاد منصوری سروش موئینی - محمدسجاد نقیه
هندسه	امیرحسین ابومحبوب - سید محمدرضا حسینی فرد - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری صبا مهدوی - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - سوگند روشنی - عطا صادقی
فیزیک	یاشار انگوتی - علیرضا جبیری - هادی حمزه پور - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	فرشید ابراهیمی - مهدی براتی - سلیم بهرامی - پیمان خواجوی مجد - امیر قاسمی پور سروش عبادی - یاسر عبداللہی

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	فرشاد حسنزاده محمد گودرزی	فهیمة تورانی عادل حسینی منصور زرکش اصفهانی
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	مریم نظری	زهرآ جالینوسی ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	منصور زرکش اصفهانی ابوالفضل ناصری مریم نظری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جبیری مریم گلی حسنلو	علیرضا جبیری سعید محبی	آیدین طهماسقلی زاده پوریا علاقه مند امیر محمودی انزلی سعید محبی محمدرضا یاری
شیمی	یاسر عبداللہی	یاسر عبداللہی	نیلوفر درخشان	مرتضی نصیرزاده یاشار ذریه	هادی عبادی محمدرضا بیاتلو یلدا رزاق زاده رامین رزمجو آرمین عظیمی

مدیرتألیف آزمون: فاطمه آقاچانپور



Azmoon.kheilisabz.com



آزمون آزمایشی خیلی سبز

بیتا ابراهیمی - علیرضا جعفری - عادل حسینی

تیم اجرایی و تألیف آزمون

الناز علی یاری زاده

سرپرست تولید

نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی
 زهرا صفری - الهه صفری - فاطمه علی اکبری
 محیا غنی فرد - زهرا فرهادی مهر - نادره ناز آوری
 ساعده نمازی

ویراستاران فنی

ندا فخاری
 سارا گنجی آزادپور

رسام

صدف امام - مریم حسین زاده
 سیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق نژاد
 مائده صبیری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند
 مهدیه گل پور - دریا لطفی

صفحه آرایی



تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x-1}{x^2+3}$ ، روی کدام بازه اکیداً صعودی است؟

(۲) $(-\infty, 1)$

(۱) $(-1, 3)$

(۴) $(-3, 3)$

پاسخ: گزینه ۱

نامعادله $f'(x) \geq 0$ رو حل کن.



فرض کنید تابع f روی بازه (a, b) مشتق پذیر باشد. اگر روی این بازه $f'(x) \leq 0$ باشد، تابع f اکیداً نزولی و اگر $f'(x) \geq 0$ باشد، تابع f اکیداً صعودی است؛ فقط با این شرط که تابع f در هیچ جای این بازه برابر یک تابع ثابت نشود.



گام اول: ابتدا ضابطه تابع f' را به دست می آوریم:



$$f'(x) = \frac{x^2+3-2x(x-1)}{(x^2+3)^2} = \frac{-x^2+2x+3}{(x^2+3)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{(x+1)(x-3)}{(x^2+3)^2}$$

گام دوم: تابع f روی بازه‌ای اکیداً صعودی است که به ازای آن $f'(x) \geq 0$ است.

$$\xrightarrow{f'(x) \geq 0} (x+1)(x-3) \leq 0 \Rightarrow x \in [-1, 3]$$

تابع f روی بازه $[-1, 3]$ و هر زیرمجموعه از آن اکیداً نزولی است.

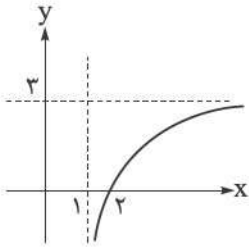
در توابع گویا با ضابطه $h(x) = \frac{f(x)}{g(x)}$ ، طول نقاط بحرانی تابع h ، جواب‌های معادله $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$ هستند، بنابراین در این سؤال داریم:



$$\xrightarrow{f'(x)=0} \frac{x-1}{x^2+3} = \frac{1}{2x} \Rightarrow 2x^2-2x = x^2+3 \Rightarrow x^2-2x-3 = (x+1)(x-3) = 0$$



شکل زیر قسمتی از نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax^2 + bx + c}{2x + d}$ را نمایش می‌دهد. حاصل $a - b + c - d$ کدام است؟



- (۱) -۲۰
- (۲) -۱۶
- (۳) -۱۴
- (۴) -۱۸

پاسخ: گزینه ۲

(چک لیست نمودارشناسی):

(۱) گام‌های مقدماتی (دامنه و برخوردها):

برای تشخیص رفتار کلی نمودار، ابتدا موارد زیر را چک کنید:

- دامنه و برد: اولین فیلتر برای حذف گزینه‌های نادرست، بررسی دامنه تعریف تابع است.
- برخورد با محور y : قراردادن $x = 0$ (عرض از مبدأ)
- برخورد با محور x (ریشه‌ها): حل معادله $f(x) = 0$.

رفتار نمودار در ریشه‌ها به توان آن‌ها بستگی دارد:

- ریشه ساده (مرتبه ۱): نمودار محور را با شیب غیرصفر قطع می‌کند (مثل خط راست).
- ریشه مضاعف (مکرر زوج): نمودار بر محور مماس می‌شود و برمی‌گردد (مثل x^2 در $x = 0$).
- ریشه مکرر فرد (مرتبه ۳ به بالا): نمودار مماس می‌شود و عبور می‌کند (مثل x^3 در $x = 0$).

(۲) مجانب‌ها (قائم و افقی):

رفتار تابع در مرزهای دامنه و بی‌نهایت، اسکلت اصلی نمودار را می‌سازد:

الف) مجانب قائم: خط $x = a$ است که معمولاً ریشهٔ مخرج کسر (بعد از ساده‌سازی) است. در اطراف این خط، نمودار به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می‌کند.

ب) مجانب افقی: خط $y = b$ است. اگر وقتی $x \rightarrow \pm\infty$ می‌رود، مقدار تابع به عدد ثابت b نزدیک شود.

گام اول: با توجه به شکل وقتی $x \rightarrow +\infty$ ، $f(x) \rightarrow 3$ ؛ پس صورت و مخرج هم‌درجه‌اند؛ در نتیجه $a = 0$ و داریم:

$$\frac{f(x) = \frac{bx+c}{2x+d}}{\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 3} \Rightarrow \frac{b}{2} = 3 \Rightarrow b = 6$$

گام دوم: هم‌چنین $x = 1$ خط مجانب قائم است؛ در نتیجه:

$$2(1) + d = 0 \Rightarrow d = -2$$

گام سوم: نقطه $x = 2$ نیز محل برخورد نمودار تابع با محور x است:

$$\frac{f(x) = \frac{6x+c}{2x-2}}{f(2) = \frac{6(2)+c}{2(2)-2} = 0} \Rightarrow \frac{12+c}{2} = 0 \Rightarrow 12+c = 0 \Rightarrow c = -12$$

گام چهارم: حاصل $a - b + c - d$ برابر است با:

$$0 - 6 - 12 - (-2) = -16$$

درکس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۳ اگر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{ax+24}{x+a-2}$ روی بازه $(1, +\infty)$ اکیداً نزولی باشد، مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای a کدام است؟

۲۱ (۴)

۱۵ (۳)

۱۴ (۲)

۱۰ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

تابع هموگرافیک:

(۱) شناسنامه تابع:

تابع کسری به فرم کلی $f(x) = \frac{ax+b}{cx+d}$ را هموگرافیک می‌نامیم. به شرطی که دو حالت خاص رخ ندهد:

(الف) $c \neq 0$ (اگر صفر باشد، تابع خطی می‌شود).

(ب) $ad - bc \neq 0$ (اگر صفر باشد، صورت و مخرج ساده شده و تابع با یک تابع ثابت با دامنه $\mathbb{R} - \{-\frac{d}{c}\}$ مساوی می‌شود).

(۲) خطوط مجانب و مرکز تقارن:

این تابع همیشه دارای دو مجانب (یکی قائم و یکی افقی) است که در نقطه‌ای یکدیگر را قطع می‌کنند:

$$x = -\frac{d}{c}$$

مجانب قائم (ریشه مخرج):

$$y = \frac{a}{c}$$

مجانب افقی (حد در بی‌نهایت):

محل برخورد مجانب‌ها، یعنی نقطه $W(-\frac{d}{c}, \frac{a}{c})$ ، مرکز تقارن نمودار است.

(۳) مشتق و یکنوایی:

$$f'(x) = \frac{ad - bc}{(cx + d)^2}$$

ضابطه تابع مشتق این تابع برابر است با:

از آن‌جا که مخرج همیشه مثبت است، علامت مشتق فقط به صورت کسر $(ad - bc)$ بستگی دارد:

● اگر $ad - bc > 0$: تابع روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً صعودی است.

● اگر $ad - bc < 0$: تابع روی هر بازه از دامنه‌اش اکیداً نزولی است.

گام اول: ابتدا باید مقادیر a را که در آن $f'(x) < 0$ است، به دست آوریم:

$$f'(x) = \frac{a(a-2)-24}{(x+a-2)^2} < 0 \Rightarrow a^2 - 2a - 24 < 0 \Rightarrow -4 < a < 6$$

گام دوم: هم‌چنین باید بررسی کنیم مجانب قائم تابع در فاصله $(1, +\infty)$ قرار نگیرد:

$$x + a - 2 = 0 \Rightarrow x = 2 - a \leq 1 \Rightarrow a \geq 1$$

گام سوم: از اشتراک مقادیر بدست‌آمده داریم: $1 \leq a < 6$. مجموع مقادیر صحیح قابل قبول برای a برابر است با:

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 = 15$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گول نخوری ✗

تابع هموگرافیک:

● اکسترمم ندارد: چون صورت مشتق عدد ثابت است و هرگز صفر نمی‌شود.

● نقطه عطف ندارد: تقعر نمودار تغییر نمی‌کند (مگر در مجانب قائم که در دامنه نیست).

دام بیان یکنوایی: هرگز نگوئید این تابع «روی \mathbb{R} صعودی است». باید بگوئید «روی هر بازه دامنه خود صعودی است» (زیرا ریشه مخرج در دامنه تابع حضور ندارد و نمی‌تواند عضو یک بازه باشد).



جهت تقعر تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x^2 + 3}$ روی بازه (a, b) رو به بالا است. بیشترین مقدار $b - a$ کدام است؟

۴

۱ (۴)

۲ (۳)

۳ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

آزمون تعیین جهت تقعر:

فرض کنید تابع f روی بازه (a, b) دو بار مشتق پذیر باشد، علامت f'' جهت گودی (تقعر) نمودار را مشخص می‌کند:

● تقعر رو به بالا (U): اگر در سراسر بازه $f''(x) > 0$ باشد.

● تقعر رو به پایین (∩): اگر در سراسر بازه $f''(x) < 0$ باشد.

اگر در بازه‌ای $f''(x) \geq 0$ باشد و نقاطی که $f''(x) = 0$ است، تشکیل یک بازه ندهند (یعنی نقاط تک‌افتاده باشند)، باز هم تقعر آن بازه رو به بالا است.

مثال تابع $y = x^4$ در $x = 0$ مشتق دومش صفر است، اما چون فقط در یک نقطه صفر شده، کل نمودار تقعر رو به بالا دارد.

گام اول: ابتدا مشتق دوم تابع f را حساب می‌کنیم:

$$f(x) = 1 - \frac{4}{x^2 + 3} \Rightarrow f'(x) = \frac{8x}{(x^2 + 3)^2} \Rightarrow f''(x) = \frac{24(1 - x^2)}{(x^2 + 3)^3}$$

صفرهای تابع f'' برابر -1 و 1 هستند.

گام دوم: $f''(x)$ را تعیین علامت می‌کنیم:

مخرج همیشه مثبت	x	-1	1
→	f''(x)	-	+
		-	-

گام سوم: با توجه به جدول تعیین علامت، در بازه $[-1, 1]$ ، $f''(x) > 0$ است، پس نمودار تابع f تقعر رو به بالا دارد و بیشترین

مقدار $b - a$ برابر است با:

$$1 - (-1) = 2$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

ضابطه تابع f ، یک چندجمله‌ای درجه سوم است. اگر به ازای هر x ، $f(x) + f(-x) = 8$ باشد، طول نقطه عطف تابع

کدام است؟

۸ (۴)

۴ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱) صفر

پاسخ: گزینه ۱

تعریف نقطه عطف:

درس Box

نقطه $(c, f(c))$ روی نمودار تابع را نقطه عطف می‌نامیم، اگر و تنها اگر هر دو شرط زیر هم برقرار باشند:

(۱) تابع در این نقطه دارای خط مماس باشد.

(۲) جهت تقعر نمودار در این نقطه تغییر کند.

در نقطه عطف مقدار $f''(x) = 0$ یا $f''(x)$ وجود ندارد.

نکته

گام اول: ابتدا فرض می‌کنیم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ؛ در نتیجه:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) + f(-x) = (ax^3 + bx^2 + cx + d) + (-ax^3 + bx^2 - cx + d)$$

$$\Rightarrow f(x) + f(-x) = 2bx^2 + 2d$$

چون تساوی به دست آمده همواره برابر با عددی ثابت است، داریم:

$$\begin{cases} 2b = 0 \Rightarrow b = 0 \\ 2d = 8 \Rightarrow d = 4 \end{cases}$$

در تابع درجه سوم $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ، طول نقطه عطف برابر $x = -\frac{b}{3a}$ است.

نکته

گام دوم: طبق نکته، طول نقطه عطف f ، صفر به دست می‌آید.



۶

اگر $x = 1$ طول نقطه عطف و $x = -2$ طول یکی از نقاط بحرانی تابع f با ضابطه $f(x) = ax^3 + bx^2 + 24x$ باشد،

$f'(-2) = 0$

$f'(1) = 0$

حاصل $a + b$ کدام است؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: $x = -2$ طول نقطه بحرانی تابع f است، پس مقدار تابع f' در این نقطه برابر صفر است:

$f'(x) = 3ax^2 + 2bx + 24$

$f'(-2) = 0 \rightarrow 12a - 4b + 24 = 0 \xrightarrow{+4} 3a - b = -6 \quad (1)$

گام دوم: $x = 1$ طول نقطه عطف تابع است، پس طبق نکته پاسخ قبل داریم:

$\frac{b}{3a} = 1 \Rightarrow 3a + b = 0 \quad (2)$

گام سوم: دستگاه معادلات به دست آمده را حل می‌کنیم:

$$\begin{cases} 3a - b = -6 \\ 3a + b = 0 \end{cases} \xrightarrow{\text{جمع}} 6a = -6 \Rightarrow a = -1 \xrightarrow{\text{جای‌گذاری}} b = 3$$

در نتیجه $a + b = 2$ است.

در تابع درجه سوم، طول نقطه عطف میانگین طول‌های نقاط اکسترمم نسبی است؛ یعنی:

یادآور دیگره

$\frac{x_{\min} + x_{\max}}{2} = -\frac{b}{3a}$

بنابراین داریم:

$\frac{-2 + x_p}{2} = 1 \Rightarrow x_p = 4$

طول نقطه بحرانی دیگر ۴ است.

$f'(x) = 0 \rightarrow 3ax^2 + 2bx + 24 = 0 \xrightarrow{P=x_1x_2=-8} \frac{24}{3a} = -8 \Rightarrow a = -1$

$\frac{S=x_1+x_2=2}{a=-1} \rightarrow \frac{-2b}{-3} = 2 \Rightarrow b = 3$

$\Rightarrow a + b = -1 + 3 = 2$



معادله خط مماس بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \begin{cases} x^2 - 6x + 11 & ; x \geq 2 \\ -x^2 + 2x + 3 & ; x < 2 \end{cases}$ در نقطه عطف آن کدام است؟

۷

$$y = 2x - 7 \quad (2)$$

$$y = -2x + 7 \quad (1)$$

(۴) چنین خطی وجود ندارد.

$$y = -2x - 7 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

(۱) ملزومات نوشتن معادله خط:



برای نوشتن معادله هر خطی در صفحه مختصات، به دو چیز نیاز داریم: «یک نقطه» و «شیب خط». در مبحث کاربرد مشتق، این دو جزء به صورت زیر استخراج می‌شوند:

● نقطه تماس: اگر طول نقطه تماس $x = a$ باشد، عرض آن $y = f(a)$ است، پس نقطه ما $A(a, f(a))$ خواهد بود.

● شیب خط (m): شیب خط مماس بر نمودار تابع f در هر نقطه روی آن، همان مقدار مشتق تابع در آن نقطه است؛ یعنی $m = f'(a)$.

(۲) فرمول معادله خط مماس:

با داشتن شیب $m = f'(a)$ و نقطه تماس $(a, f(a))$ ، معادله خط از رابطه معروف زیر به دست می‌آید:

$$y - f(a) = f'(a) \cdot (x - a)$$

گام اول: ابتدا نقطه عطف تابع f را مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f'(x) = \begin{cases} 2x - 6 & ; x \geq 2 \\ -2x + 2 & ; x < 2 \end{cases} \Rightarrow f''(x) = \begin{cases} 2 & ; x > 2 \\ -2 & ; x < 2 \end{cases}$$

در نقطه $x = 2$ ، تابع f پیوسته و مشتق‌پذیر است. در این نقطه $f''(x)$ تعریف نمی‌شود اما علامت آن تغییر کرده است، پس طول نقطه عطف برابر $x = 2$ است.

گام دوم: عرض نقطه عطف و شیب خط مماس بر تابع f در $x = 2$ را مشخص می‌کنیم و سپس معادله خط مماس در این نقطه را می‌نویسیم:

$$f(2) = 3, f'(2) = -2$$

$$\Rightarrow y - 3 = -2(x - 2) \Rightarrow y = -2x + 7$$



تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x}{\sqrt[3]{a}} - \frac{3}{2}\sqrt[3]{(x-a)^2}$ در بازه $(2, 4)$ نقطه بحرانی دارد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای a شامل چند عدد صحیح است؟

۴) صفر

۳) ۱

۲) ۲

۱) ۳

پاسخ: گزینه ۲

نقطه بحرانی چیست؟

درس Box

نقطه $x = c$ عضو دامنه تابع f را نقطه بحرانی می‌نامیم، هرگاه یکی از دو حالت زیر رخ دهد:

- مشتق تابع در آن نقطه برابر صفر باشد: $f'(c) = 0$ (مماس افقی).
- تابع در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد: $f'(c)$ وجود ندارد (مانند نقاط گوشه یا بازگشتی).

تذکر: نقطه بحرانی حتماً باید عضو دامنه تابع باشد.

گام اول: ابتدا ضابطه تابع f' را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{a}}x - \frac{3}{2}(x-a)^{\frac{2}{3}} \Rightarrow f'(x) = \frac{1}{\sqrt[3]{a}} - \frac{1}{\sqrt[3]{x-a}}$$

و سپس برابر صفر قرار می‌دهیم:

$$\xrightarrow{f'(x)=0} \sqrt[3]{a} = \sqrt[3]{x-a} \Rightarrow a = x-a \Rightarrow x = 2a$$

هم‌چنین تابع f در $x = a$ مشتق‌ناپذیر است، پس مجموعه طول نقاط بحرانی تابع f ، $\{a, 2a\}$ است.

گام دوم: برای این‌که تابع f در بازه $(2, 4)$ نقطه بحرانی داشته باشد، یکی از مقادیر a و $2a$ باید عضو این بازه باشد.

$$\begin{cases} 2 < a < 4 \\ 2 < 2a < 4 \end{cases} \xrightarrow{\text{اجتماع}} a \in (1, 2) \cup (2, 4)$$

در این محدوده تابع f نقطه بحرانی دارد و تنها مقدار صحیح برای a ، $a = 3$ است.



اختلاف بیشترین مقدار و کم‌ترین مقدار تابع f با ضابطه $f(x) = 4x^3 - 12x|x-1| - 3x$ روی بازه $[0, \frac{3}{4}]$ کدام است؟

۶ (۴)

۵ (۳)

۴ (۲)

۳ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

(۱) تعریف ماکزیمم و مینیمم مطلق:

برخلاف اکسترم‌های نسبی که فقط در یک همسایگی، کوچک‌ترین هستند، اکسترم‌های مطلق در کل دامنه بررسی می‌شوند:

- ماکزیمم مطلق: نقطه‌ای که عرض (y) آن از تمام نقاط دیگر تابع بیشتر یا مساوی باشد $f(c) \geq f(x)$ برای هر x در دامنه.
- مینیمم مطلق: نقطه‌ای که عرض (y) آن از تمام نقاط دیگر تابع کم‌تر یا مساوی باشد $f(c) \leq f(x)$ برای هر x در دامنه.

(۲) الگوریتم پیدا کردن اکسترم مطلق روی بازه $[a, b]$:

اگر تابع f روی بازه $[a, b]$ پیوسته باشد، حتماً دارای ماکزیمم و مینیمم مطلق است. برای یافتن آن‌ها مراحل زیر را طی کنید:
الف) یافتن نقاط بحرانی: ابتدا مشتق بگیرید و طول نقاط بحرانی تابع را که درون بازه (a, b) هستند، پیدا کنید.

ب) محاسبه مقادیر: مقدار تابع را در نقاط زیر حساب کنید:

- در نقاط بحرانی به دست آمده در مرحله قبل
- در ابتدا و انتهای بازه (یعنی $f(a)$ و $f(b)$)

پ) مقایسه: اعداد به دست آمده را با هم مقایسه کنید:

- بزرگ‌ترین عدد ← ماکزیمم مطلق
- کوچک‌ترین عدد ← مینیمم مطلق

(۳) اکسترم مطلق در بازه‌های باز یا نامتناهی:

اگر بازه مورد نظر بسته نباشد (مانند (a, b) یا $(-\infty, +\infty)$ ، روش کاندیداها به تنهایی کارساز نیست، چون سر و ته بازه را نداریم. در این حالت:

الف) نقاط بحرانی درون بازه را بیابید و مقدار تابع را در آن‌ها حساب کنید.

ب) به جای $f(a)$ و $f(b)$ ، حد تابع را در مرزها حساب کنید $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow b^-} f(x)$ یا $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$.

پ) تحلیل نتایج:

- اگر یکی از حدها $+\infty$ شد. ← فاقد ماکزیمم مطلق
- اگر یکی از حدها $-\infty$ شد. ← فاقد مینیمم مطلق

● اگر حاصل حدها عددی حقیقی شدند، آن‌ها را با مقادیر نقاط بحرانی مقایسه کنید (دقت کنید که مقادیر حدی هرگز انتخاب نمی‌شوند، فقط برای مقایسه هستند).

گام اول: ابتدا ضابطه تابع f را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 12x(x-1) - 3x & ; x \geq 1 \\ 4x^3 + 12x(x-1) - 3x & ; x < 1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4x^3 - 12x^2 + 9x & ; x \geq 1 \\ 4x^3 + 12x^2 - 15x & ; x < 1 \end{cases}$$

گام دوم: حال نقاط بحرانی تابع f را به کمک مشتق آن مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = \begin{cases} 12x^2 - 24x + 9 & ; x > 1 \\ 12x^2 + 24x - 15 & ; x < 1 \end{cases}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



توجه کنید که $f'_+(1) = -3 \neq f'_-(1) = 21$ است، پس $x = 1$ یکی از نقاط بحرانی است، هم‌چنین:

$$f'(x) = 0 \rightarrow \begin{cases} 12x^2 - 24x + 9 = 0 \Rightarrow 3(2x - 3)(2x - 1) = 0 \Rightarrow x = \frac{3}{2}, x = \frac{1}{2} \text{ غق} \\ 12x^2 + 24x - 15 = 0 \Rightarrow 3(2x - 1)(2x + 5) = 0 \Rightarrow x = \frac{1}{2}, x = -\frac{5}{2} \text{ غق} \end{cases}$$

گام سوم: طول نقاط بحرانی بازه $(0, \frac{3}{2})$ ، $x = \frac{1}{2}$ و $x = 1$ هستند. مقادیر تابع را در این نقاط به همراه ابتدا و انتهای بازه

$$f(0) = f(\frac{3}{2}) = 0, f(\frac{1}{2}) = -4, f(1) \text{ به دست می‌آوریم:}$$

پس کم‌ترین مقدار تابع -4 و بیشترین مقدار آن 1 است، اختلاف این دو مقدار 5 است.



مقدار ماکزیمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \sqrt[3]{x^2} | \sqrt[3]{x} - 3 |$ کدام است؟

۱۰

۴ (۴)

۳ (۳)

۸ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درسی Box

۱) اکسترم‌های نسبی:

اگر تابع f در یک همسایگی $x = c$ تعریف شده باشد، در شرایط زیر $x = c$ طول اکسترمم نسبی نمودار تابع f است:

• ماکزیمم نسبی: در این همسایگی $f(c) \geq f(x)$ باشد.

• مینیمم نسبی: در این همسایگی $f(c) \leq f(x)$ باشد.

۲) آزمون مشتق اول (تشخیص نوع اکسترمم):

برای تشخیص نوع نقطه بحرانی c ، علامت f' را در اطراف آن بررسی می‌کنیم:

تغییر علامت f'	وضعیت نمودار	نشانه در جدول	نتیجه
از + به -	صعودی \leftarrow نزولی	$\nearrow \cdot \searrow$	ماکزیمم نسبی
از - به +	نزولی \leftarrow صعودی	$\searrow \cdot \nearrow$	مینیمم نسبی
بدون تغییر	یکنوا باقی می‌ماند.	$\searrow \cdot \searrow$ یا $\nearrow \cdot \nearrow$	اکسترمم نیست.

گام اول: ریشه عبارت داخل قدرمطلق $x = 27$ است و براساس آن داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$f(x) = \begin{cases} -(x - 3\sqrt[3]{x^2}) & ; x < 27 \\ x - 3\sqrt[3]{x^2} & ; x \geq 27 \end{cases}$$

و سپس ضابطه تابع f' را به دست می‌آوریم:

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 & ; x < 27 \\ 1 - \frac{2}{\sqrt[3]{x}} & ; x \geq 27 \end{cases}$$

گام دوم: تابع f در $x = 0$ و $x = 27$ مشتق‌ناپذیر است و مقدار مشتق آن در $x = 8$ برابر صفر است، زیرا:

$$\frac{2}{\sqrt[3]{x}} - 1 = 0 \Rightarrow \sqrt[3]{x} = 2 \Rightarrow x = 8$$

گام سوم: حالا با استفاده از جدول تغییرات رفتار تابع، مقدار ماکزیمم نسبی آن را پیدا می‌کنیم:

x		۰	۸	۲۷	
f'	-		+		-
f	\searrow		\nearrow		\searrow

max نسبی

پس طول نقطه ماکزیمم نسبی تابع، ۸ و مقدار آن $f(8) = 4$ است.



۱۱

اگر اختلاف مقادیر اکسترمم نسبی تابع f با ضابطه $f(x) = \frac{x^2 + a}{x+1}$ برابر ۶ باشد، طول نقطهٔ مینیمم نسبی آن کدام

است؟ $(a > -1)$

-۲/۵ (۴)

۲/۵ (۳)

-۵/۵ (۲)

۰/۵ (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا نقاط بحرانی تابع f را مشخص می‌کنیم:

$$f'(x) = \frac{2x(x+1) - 1(x^2 + a)}{(x+1)^2} = \frac{x^2 + 2x - a}{(x+1)^2}; x \neq -1$$

$$\frac{f'(x)=0}{\rightarrow} x^2 + 2x - a = 0 \Rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4+4a}}{2} = -1 \pm \sqrt{1+a}$$

گام دوم: حال جدول تغییرات رفتار تابع را به کمک آزمون مشتق اول می‌نویسیم:

x	$-1 - \sqrt{1+a}$	$-1 + \sqrt{1+a}$
$f'(x)$	+	-
$f(x)$	↗	↘
	max نسبی	min نسبی

گام سوم: مقادیر اکسترمم‌های نسبی تابع f را به دست می‌آوریم. توجه کنید که در نقاط بحرانی $x^2 = a - 2x$:

$$f(-1 + \sqrt{1+a}) = \frac{a + 2 - 2\sqrt{1+a} + a}{\sqrt{1+a}} = 2\sqrt{1+a} - 2$$

$$f(-1 - \sqrt{1+a}) = \frac{a + 2 + 2\sqrt{1+a} + a}{-\sqrt{1+a}} = -2\sqrt{1+a} - 2$$

$$\Rightarrow \text{اختلاف مقادیر اکسترمم} = (2\sqrt{1+a} - 2) - (-2\sqrt{1+a} - 2) = 4\sqrt{1+a} = 6 \Rightarrow \sqrt{1+a} = \frac{3}{2}$$

گام چهارم: طول نقطهٔ مینیمم نسبی برابر است با:

$$x_{\min} = -1 + \sqrt{1+a} = -1 + \frac{3}{2} = \frac{1}{2}$$



مستطیلی با بیشترین مساحت ممکن، درون نیم‌دایره‌ای به شعاع ۲ محاط شده است. محیط این مستطیل کدام است؟

$$6\sqrt{2} \quad (4)$$

$$3\sqrt{2} \quad (3)$$

$$6 \quad (2)$$

$$4 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

الگوریتم ۵ مرحله‌ای حل مسائل بهینه‌سازی:

برای یافتن بیشترین یا کم‌ترین مقدار یک کمیت (حجم، مساحت، سود و ...) مراحل زیر را به ترتیب طی کنید:

(۱) مدل‌سازی و رسم شکل: ابتدا متغیرهای مسئله (طول، عرض، شعاع و ...) را نام‌گذاری کنید. کشیدن یک شکل ساده هندسی بسیار کمک‌کننده است.

(۲) تشکیل تابع هدف: تابعی که سؤال از شما «ماکزیم» یا «مینیم» آن را خواسته بنویسید (مثلاً $V = \pi r^2 h$).

(۳) تک‌متغیره کردن (مهم‌ترین گام): تابع هدف معمولاً دو متغیر دارد. با استفاده از اطلاعات جانبی مسئله (مثل محیط ثابت یا روابط هندسی)، یکی از متغیرها را حذف کنید تا تابع فقط بر حسب یک متغیر (مثلاً x) شود.

(۴) تعیین دامنه متغیر: مشخص کنید متغیر x در چه بازه‌ای معنا دارد (مثلاً طول نمی‌تواند منفی باشد: $x > 0$).

(۵) مشتق و اکسترم: از تابع تک‌متغیره مشتق بگیرید ($f'(x) = 0$) تا نقاط بحرانی پیدا شوند. اکسترم مطلق در این نقاط یا سر و ته بازه اتفاق می‌افتد.

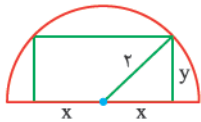
نکات کلیدی و میانبر:

● جواب کجاست؟ در ۹۹٪ مسائل بهینه‌سازی، پاسخ نهایی همان ریشه مشتق (نقطه بحرانی) است. معمولاً نیازی به چک کردن نقاط ابتدایی و انتهایی بازه نیست، مگر این‌که بازه بسته و محدود به اعداد خاصی باشد.

● تشخیص نوع اکسترم: اگر تنها یک نقطه بحرانی به دست آمد، همان نقطه جواب مسئله (ماکزیم یا مینیمم خواسته شده) است، اما اگر چندین نقطه داشتید، با تعیین علامت مشتق یا مشتق دوم، نوع آن را مشخص کنید.

● فرمول‌های کمکی: در گام سوم (تک‌متغیره کردن)، معمولاً از قضیه فیثاغورس، تشابه مثلث‌ها یا فرمول‌های محیط و مساحت به عنوان رابطه کمکی (قید) استفاده می‌شود.

گام اول: با توجه به شکل مقابل داریم:



$$x^2 + y^2 = 4 \quad (*)$$

گام دوم: حال تابع مساحت مستطیل را می‌نویسیم:

$$S = 2xy \xrightarrow{(*)} S(x) = 2x\sqrt{4-x^2}; \quad 0 < x < 2$$

گام سوم: بیشترین مقدار تابع S را مشخص می‌کنیم:

$$S'(x) = \frac{4-4x^2}{\sqrt{4-x^2}} \xrightarrow{S'(x)=0} 4-4x^2=0 \Rightarrow x=\sqrt{2}$$

بنابراین به ازای $x = \sqrt{2}$ و $y = \sqrt{2}$ مقدار مساحت مستطیل بیشترین مقدار است.

گام چهارم: محیط مستطیل برابر است با:

$$P = 4x + 2y = 4\sqrt{2} + 2\sqrt{2} = 6\sqrt{2}$$

مساحت مستطیل زمانی بیشترین مقدار خود را دارد که x و y مساوی باشند:

$$\xrightarrow{x^2+y^2=4} x^2=y^2=2 \Rightarrow x=y=\sqrt{2} \Rightarrow P=6\sqrt{2}$$

درس‌Box

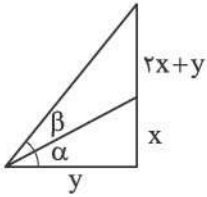
پاسخ خیلی تشریحی

تیزبازی



۱۳

در شکل زیر، به ازای کدام مقدار $\tan \alpha$ ، بیشترین مقدار برای $\tan \beta$ به دست می‌آید؟



۱ (۱)

۳ (۲)

$\frac{4+2\sqrt{5}}{11}$ (۳)

$\frac{\sqrt{15}-3}{6}$ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا مقدار $\tan \beta$ را بر حسب $\tan \alpha$ مشخص می‌کنیم:

$$\tan \alpha = \frac{x}{y}, \quad \tan(\alpha + \beta) = \frac{2x+y}{y} = \frac{2x}{y} + 1 = 2 \tan \alpha + 1, \quad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

$$\tan \beta = \tan((\alpha + \beta) - \alpha) \rightarrow \tan \beta = \frac{\tan(\alpha + \beta) - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha \tan(\alpha + \beta)} = \frac{2 \tan \alpha + 1 - \tan \alpha}{1 + \tan \alpha (2 \tan \alpha + 1)}$$

$$\Rightarrow \tan \beta = \frac{2 \tan \alpha + 1}{3 \tan^2 \alpha + 2 \tan \alpha + 1}$$

گام دوم: حال با تغییر متغیر $x = \tan \alpha$ و $y = \tan \beta$ ، باید بیشترین مقدار تابع f با ضابطه $x > 0$ را به دست آوریم:

$$f'(x) = \frac{2(3x^2 + x + 1) - (2x + 1)(6x + 1)}{(3x^2 + x + 1)^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{6x^2 + 6x - 1}{(3x^2 + x + 1)^2}$$

$$f'(x) = 0 \rightarrow 6x^2 + 6x - 1 = 0 \rightarrow x > 0 \rightarrow x = \frac{\sqrt{15} - 3}{6}$$

گام سوم: حال با بررسی مقادیر زیر برای بیشترین مقدار تابع f داریم:

$$\begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = 1 \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 0 \\ f\left(\frac{\sqrt{15} - 3}{6}\right) = \frac{4 + 2\sqrt{15}}{11} > 1 \end{cases}$$

پس بیشترین مقدار ممکن برای $\tan \beta$ به ازای $\tan \alpha = \frac{\sqrt{15} - 3}{6}$ به دست می‌آید.



تابع f با ضابطه $f(x) = \cos((x - [x])\pi)$ در کدام نقاط زیر دارای نقطه عطف است؟ ($n \in \mathbb{Z}$ و $[]$ نماد جزء صحیح است).

$$x = n + \frac{1}{4} \quad (۲)$$

$$x = n \quad (۱)$$

(۴) نقطه عطف ندارد.

$$x = n + \frac{1}{4} \quad (۳)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی

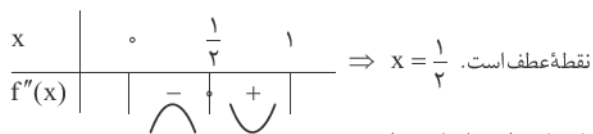
گام اول: با توجه به این که f تابعی متناوب با دوره تناوب ۱ است، رفتار تابع را در بازه $[0, 1)$ بررسی می‌کنیم و نتیجه را تعمیم می‌دهیم:

$$f(x) = \cos(\pi x), \quad 0 \leq x < 1$$

$$f'(x) = -\pi \sin(\pi x)$$

$$f''(x) = -\pi^2 \cos(\pi x) \xrightarrow{f''(x)=0} -\pi^2 \cos(\pi x) = 0 \Rightarrow \cos(\pi x) = 0 \xrightarrow{0 \leq x < 1} \pi x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{1}{2}$$

گام دوم: مشتق دوم را در اطراف $x = \frac{1}{2}$ تعیین علامت می‌کنیم:

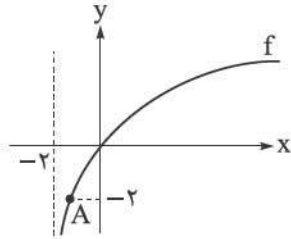


گام سوم: حال چون دوره تناوب تابع برابر ۱ است، نقاط عطف تابع برابر است با:

$$x = n + \frac{1}{2}; \quad n \in \mathbb{Z}$$



مطابق شکل، طول نقطه A واقع بر نمودار تابع f با ضابطه $f(x) = \log_2(ax + b)$ کدام است؟



(۱) $-1/25$

(۲) $-1/5$

(۳) $-1/25$

(۴) -1

پاسخ: گزینه ۲

درتین Box

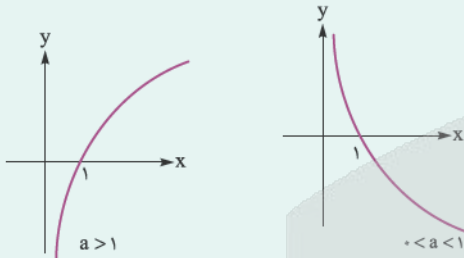
تعریف و نمودار تابع لگاریتمی:

تابع لگاریتمی با ضابطه $f(x) = \log_a x$ وارون تابع نمایی $g(x) = a^x$ است، به طوری که $a > 0$ و $a \neq 1$.

• دامنه تابع لگاریتمی بازه $(0, +\infty)$ است.

• برد این تابع مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است.

نمودار آن قرینه نمودار تابع نمایی نسبت به خط $y = x$ است و شکل آن به مقدار a بستگی دارد:



دامنه توابع لگاریتمی:

برای تعیین دامنه یک تابع لگاریتمی کلی به صورت $f(x) = \log_{g(x)}$ باید اشتراک مجموعه جواب‌های سه نامعادله زیر را پیدا کنیم:

۱) $f(x) > 0$

۲) $g(x) > 0$

۳) $g(x) \neq 1$

گام اول: ابتدا توجه کنید که نمودار تابع از مبدأ مختصات عبور می‌کند:

$$f(0) = 0 \Rightarrow \log_2 b = 0 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow f(x) = \log_2(ax + 1)$$

گام دوم: همچنین دامنه تابع f برابر $(-2, +\infty)$ است؛ پس:

$$D_f = (-\frac{1}{a}, +\infty) \Rightarrow -\frac{1}{a} = -2 \Rightarrow a = \frac{1}{2} \Rightarrow f(x) = \log_2(\frac{x}{2} + 1)$$

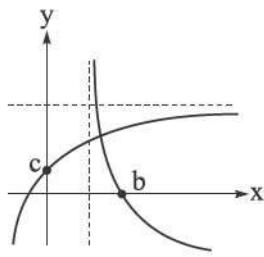
گام سوم: حال طول نقطه A را مشخص می‌کنیم:

$$f(x_A) = -2 \Rightarrow \log_2(\frac{x_A}{2} + 1) = -2 \Rightarrow \frac{x_A}{2} + 1 = \frac{1}{4} \Rightarrow x_A = -\frac{3}{2}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



نمودارهای توابع $f(x) = 3a - 2(2a - 1)^x$ و $g(x) = \log_a(ax - 1)$ در شکل زیر رسم شده‌اند. مجموعه مقادیر



قابل قبول برای $\left[\frac{a+b}{3}\right]$ شامل چند عدد صحیح است؟ ([] نماد جزء صحیح است.)

- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

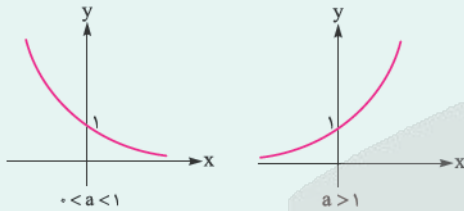
نموداری که مجانب افقی دارد نمایی و نموداری که مجانب قائم دارد لگاریتمیه.



تابعی با ضابطه $f(x) = a^x$ را یک تابع نمایی می‌نامیم. در این تابع، a یک عدد حقیقی مثبت و مخالف ۱ است ($a > 0, a \neq 1$).

- دامنه این تابع مجموعه اعداد حقیقی (\mathbb{R}) است.
- برد آن بازه $(0, +\infty)$ است.

شکل نمودار تابع نمایی به مقدار پایه a بستگی دارد:



- اگر $a > 1$ باشد، تابع اکیداً صعودی است.
- اگر $0 < a < 1$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

گام اول: با توجه به نمودارها، روشن است که $0 < a < 1$ و $0 < 2a - 1 < 1$ زیرا نمودار تابع لگاریتمی g اکیداً نزولی و نمودار تابع نمایی f اکیداً صعودی است. در نتیجه:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left(\frac{1}{3}, 1\right) \cap (0, 1) = \left(\frac{1}{3}, 1\right) \Rightarrow \frac{1}{3} < a < 1$$

گام دوم: هم‌چنین $0 < c < 3a$ و با توجه به این که $c = f(0) = 3a - 2$ است، می‌توان نوشت:

$$3a - 2 > 0 \Rightarrow a > \frac{2}{3} \Rightarrow \frac{2}{3} < a < 1$$

گام سوم: از روی نمودار داریم:

$$g(b) = \log_a(ab - 1) = 0 \Rightarrow ab - 1 = a^0 = 1 \Rightarrow ab = 2 \Rightarrow b = \frac{2}{a}$$

حالا چون محدوده a را در گام قبلی به دست آورده‌ایم، براساس آن محدوده b را به دست می‌آوریم:

$$\frac{2}{3} < a < 1 \xrightarrow{\text{معکوس}} 1 < \frac{1}{a} < \frac{3}{2} \xrightarrow{\times 2} 2 < \frac{2}{a} < 3 \Rightarrow 2 < b < 3$$

گام چهارم: پس $\frac{1}{3} < a + b < 4$ است و داریم:

$$\frac{4}{3} < \frac{a+b}{2} < 2 \Rightarrow \left[\frac{a+b}{2}\right] = 1$$

۱۷ اگر یکی از جواب‌های معادله $(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0$ ، برابر $\frac{b}{a}$ باشد، حاصل $(\frac{b}{a})^{2a}$ کدام می‌تواند باشد؟

$$40\sqrt{5} \quad (4)$$

$$20\sqrt{5} \quad (3)$$

$$15 \quad (2)$$

$$30 \quad (1)$$

پاسخ: گزینه ۴

از حاصل ضرب جواب‌ها استفاده کن.

Hint

ویژگی‌های توان‌های حقیقی:

درس Box

با فرض این که a, b اعداد حقیقی مثبت و مخالف ۱ و x, y اعداد حقیقی باشند، روابط زیر برقرار است:

$$1) a^0 = 1$$

$$5) (ab)^x = a^x b^x$$

$$2) a^{-x} = \frac{1}{a^x}$$

$$6) \left(\frac{a}{b}\right)^x = \frac{a^x}{b^x}$$

$$3) a^x \cdot a^y = a^{x+y}$$

$$7) \frac{a^x}{a^y} = a^{x-y}$$

$$4) (a^x)^y = a^{xy}$$

تعریف و ویژگی‌های لگاریتم:

لگاریتم عدد b در مبنای a (با فرض $a, b > 0, a \neq 1$) برابر x است، اگر و تنها اگر $a^x = b$ باشد.

$$\log_a b = x \Leftrightarrow a^x = b$$

مهم‌ترین ویژگی‌های لگاریتم (به شرط معنی‌دار بودن عبارت‌ها):

$$1) \log_a 1 = 0, \log_a a = 1$$

$$2) \log_a (xy) = \log_a x + \log_a y$$

$$3) \log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$

$$4) \log_a x^n = n \log_a x$$

$$5) \log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a} \quad (\text{تغییر مبنای})$$

$$6) \log_a x = \frac{1}{\log_x a}$$

$$7) {}_a \log_a x = x \Rightarrow b^{\log_a x} = x^{\log_a b}$$

گام اول: ابتدا با توجه به حاصل ضرب جواب‌ها می‌توان نوشت:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$x_1 x_2 = \frac{b \log 2}{a \log 2} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} x_2 = \frac{b}{a} \xrightarrow{b \neq 0} x_2 = 1$$

دقت کنید که اگر $b = 0$ باشد، خواسته سؤال برابر $1 = (\frac{b}{a})^0$ می‌شود که در گزینه‌ها دیده نمی‌شود.

گام دوم: بنابراین جواب دیگر معادله، $X = 1$ است و داریم:

$$a \log 2 + a + b \log 2 = 0 \Rightarrow \log 2 = -\frac{a}{a+b}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\log 2} = -\frac{a+b}{a} \Rightarrow 1 + \frac{1}{\log 2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{1 + \log 2}{\log 2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{\log 2^0}{\log 2} = -\frac{b}{a} \Rightarrow \frac{b}{a} = -\log_2 2^0$$

$$\Rightarrow \frac{b}{2a} = -\frac{1}{2} \log_2 2^0$$

گام سوم: مقدار خواسته شده برابر است با:

$$\left(\frac{b}{2a}\right)^{\frac{1}{2}} = (2^{-3})^{-\frac{1}{2}} \log_2 2^0 = 2^{\frac{3}{2}} \log_2 2^0 = (2^{\log_2 2^0})^{\frac{3}{2}} = (2^0 \cdot \log_2 2^0)^{\frac{3}{2}} = (2^0)^{\frac{3}{2}} = 2^0 \times \sqrt{2^0} = 40\sqrt{5}$$

اگر یکی از ریشه‌های معادله درجه دوم $(a \log 2)x^2 + ax + b \log 2 = 0$ ، برابر -1 باشد، مقدار $(\sqrt{2})^{\frac{b}{a}}$ کدام است؟

(سؤال ۶ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (پارچ از کشور))

۱۰ (۴)

۵ (۳)

$\sqrt{5}$ (۲)

$\sqrt{10}$ (۱)

کنکور



۱۸

تنها یکی از دو جواب معادله $\log_{8x} 4x + a \log_x 8 = 10$ در بازه $(2, 8)$ قرار دارد. مجموعه مقادیر قابل قبول برای $12a$ کدام است؟

(۲) $(13, 71)$

(۱) $(13, 31)$

(۴) $(37, 70)$

(۳) $(37, 110)$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

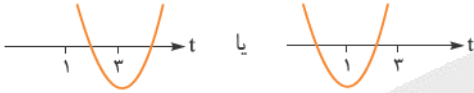
گام اول: ابتدا معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{\log_2 4x}{\log_2 8x} + \frac{a}{\log_8 x} = 10 \Rightarrow \frac{2 + \log_2 x}{3 + \log_2 x} + \frac{a}{\frac{1}{3} \log_2 x} = 10$$

گام دوم: با فرض $t = \log_2 x$ که $1 < t < 3$ ، معادله را بازنویسی می‌کنیم:

$$\frac{t+2}{t+3} + \frac{3a}{t} = 10 \Rightarrow t^2 + 2t + 3at + 9a = 10t^2 + 30t \Rightarrow 9t^2 + (28-3a)t - 9a = 0$$

گام سوم: با فرض $g(t) = 9t^2 + (28-3a)t - 9a$ ، برای این که فقط یکی از جواب‌های معادله $g(t) = 0$ در بازه $(1, 3)$ قرار داشته باشد، باید نمودار $y = g(t)$ به صورت زیر باشد:



گام چهارم: با توجه به نمودارها، در هر دو حالت $g(1)g(3) < 0$ است:

$$\Rightarrow \frac{(37-12a)(165-18a)}{g(1)g(3)} < 0 \Rightarrow \frac{37}{12} < a < \frac{165}{18} = \frac{110}{12} \Rightarrow 37 < 12a < 110$$

دقت کنید که اگر $g(1)g(3) < 0$ باشد، Δ ی معادله $g(t) = 0$ همواره مثبت می‌شود و نیازی به بررسی آن نیست.

۱۹ حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a} = -\vec{j} + \vec{k}$ ، $\vec{b} = \vec{i} - \vec{k}$ و $\vec{c} = -\vec{j} - \vec{k}$ ، کدام است؟

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

مشاوره این مدل سؤال‌ها (محاسبه حجم متوازی السطوح) از پرتکرارترین مدل‌های سؤال‌های فصل سوم هندسه (۳) در امتحان‌های نهایی هستند.

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) برای هر سه بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ ، $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ و $\vec{c} = (c_1, c_2, c_3)$ داریم:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

(۲) حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} برابر است با $|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})|$.

با توجه به درس باکس، حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط سه بردار $\vec{a} = (0, -1, 1)$ ، $\vec{b} = (1, 0, -1)$ و $\vec{c} = (0, -1, -1)$

برابر است با:

$$|\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c})| = \begin{vmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{vmatrix} = |0 + 1 \times (-1 - 0) + 1(-1 - 0)| = |-2| = 2$$

توجه کنید که دترمینان را برحسب سطر اول محاسبه کرده‌ایم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

حجم متوازی السطوح ایجاد شده توسط بردارهای $\vec{a} = (0, -1, 1)$ ، $\vec{b} = (1, 0, -1)$ و $\vec{c} = (0, -1, -1)$ را بیابید.

(سؤال ۱۶ - امتحان نهایی شوریور ۱۴۰۳)



۲۰ اگر $\vec{a} = (m-1, m^2, m^3+1)$ و $\vec{b} = (2m, 3m-1, 4m-2)$ ، به طوری که $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = m^4$ ، آن گاه طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$

کدام است؟

۲ (۴)

$\sqrt{3}$ (۳)

$\sqrt{2}$ (۲)

۱ (۱)

مشاوره این سؤال، با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های امتحان نهایی طرح شده است.

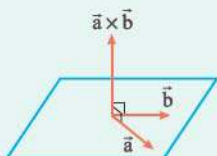
پاسخ: گزینه ۳

بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ بر \vec{a} و \vec{b} عمود است.

Hint

(۱) برای هر دو بردار مانند \vec{a} و \vec{b} ، بردار $\vec{a} \times \vec{b}$ برداری است که بر صفحه شامل دو بردار \vec{a} و \vec{b} و در نتیجه بر هر دو بردار \vec{a} و \vec{b} عمود است.

درس Box



(۲) حاصل ضرب داخلی دو بردار عمود بر هم، صفر است.

گام اول: با توجه به درس باکس از $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b}) = m^4$ نتیجه می‌گیریم $m^4 = 0$ ، پس $m = 0$.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: اگر $m = 0$ ، آن گاه $\vec{a} = (-1, 0, 1)$ و $\vec{b} = (0, -1, -2)$ پس $\vec{a} + \vec{b} = (-1, -1, -1)$.

گام سوم: طول بردار $\vec{a} + \vec{b}$ برابر است با:

$$|\vec{a} + \vec{b}| = \sqrt{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2} = \sqrt{3}$$

(سؤال ۱۳ (قسمت ب) - امتحان نوایی شهریور ۱۴۰۳)

جاهای خالی را با عبارت یا اعداد مناسب کامل کنید.

برای هر دو بردار دلخواه \vec{a} و \vec{b} ، حاصل $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$ برابر می‌باشد.

امتحان
نهایی



۲۱ اگر $\vec{a} = (1, 0, 2\sqrt{6})$ و $\vec{b} = (-4, \sqrt{3}, 0)$ و \vec{b}' تصویر قائم بردار \vec{b} بر امتداد بردار \vec{a} باشد، آن گاه حاصل $\vec{a} \cdot \vec{b}'$ کدام است؟

۱ (۲)

۱ (۱)

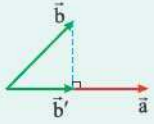
۴ (۴)

۴ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

درس Box

(۱) مطابق شکل، اگر \vec{b}' تصویر قائم بردار \vec{b} بر امتداد بردار \vec{a} باشد، آن گاه داریم:



$$\vec{b}' = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a}$$

(۲) برای هر دو بردار مانند $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ داریم: $\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$

(۳) برای هر بردار مانند \vec{a} داریم $\vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$

با توجه به قسمت (۱) درس بآکس، برای دو بردار $\vec{a} = (1, 0, 2\sqrt{6})$ و $\vec{b} = (-4, \sqrt{3}, 0)$ داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\vec{b}' = \frac{\vec{b} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \vec{a} \Rightarrow \vec{b}' = \frac{-4 + 0 + 0}{|a|^2} \vec{a} \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b}' = \vec{a} \cdot \left(\frac{-4}{|a|^2} \vec{a} \right) = \frac{-4}{|a|^2} (\vec{a} \cdot \vec{a}) = -4 \frac{|a|^2}{|a|^2} = -4$$



۲۲ در مثلث ABC ، اگر $\overline{BC} = \vec{a}$ ، $\overline{CA} = \vec{b}$ و $\overline{AB} = \vec{c}$ باشد، آن گاه کدام گزینه صحیح است؟

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a} \quad (۲) \\ \vec{a} \times \vec{b} + \vec{b} \times \vec{c} + \vec{c} \times \vec{a} &= \vec{0} \quad (۴) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{b} \cdot \vec{c} + \vec{c} \cdot \vec{a} &= 0 \quad (۱) \\ \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{c} = \vec{c} \cdot \vec{a} \quad (۳) \end{aligned}$$

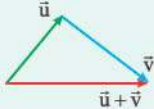
پاسخ: گزینه ۲

اگر شکل مناسب را رسم کنید، می بینید که $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$.

Hint

درس Box

(۱) مطابق شکل، اگر نقطه ابتدای بردار \vec{v} را بر نقطه انتهای بردار \vec{u} قرار دهیم، بنا به قاعده مثلثی در جمع بردارها، بردار $\vec{u} + \vec{v}$ برداری است که ابتدای \vec{u} را به انتهای \vec{v} وصل می کند:



(۲) حاصل ضرب خارجی هر بردار در خودش، برابر با بردار صفر است، یعنی $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$.

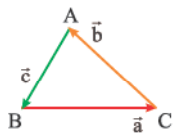
(۳) برای سه بردار \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} داریم:

$$\begin{aligned} \vec{a} \times (\vec{b} + \vec{c}) &= \vec{a} \times \vec{b} + \vec{a} \times \vec{c} \\ (\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{c} &= \vec{a} \times \vec{c} + \vec{b} \times \vec{c} \end{aligned}$$

(۴) برای هر دو بردار \vec{a} و \vec{b} داریم: $-\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{a}$.

گام اول: شکل مناسب را رسم می کنیم. با توجه به شکل، داریم: $\vec{a} + \vec{b} = -\vec{c}$ (*)

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: طرفین تساوی (*) را از سمت چپ در \vec{a} ضرب خارجی می کنیم:

$$\vec{a} \times (\vec{a} + \vec{b}) = \vec{a} \times (-\vec{c}) \Rightarrow \underbrace{\vec{a} \times \vec{a}}_{\vec{0}} + \vec{a} \times \vec{b} = -\vec{a} \times \vec{c} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{c} \times \vec{a} \quad (۱)$$

گام سوم: طرفین تساوی (*) را از سمت راست در \vec{b} ضرب خارجی می کنیم:

$$(\vec{a} + \vec{b}) \times \vec{b} = -\vec{c} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} + \underbrace{\vec{b} \times \vec{b}}_{\vec{0}} = -\vec{c} \times \vec{b} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} \quad (۲)$$

گام چهارم: از تساوی های (۱) و (۲) نتیجه می گیریم:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{b} \times \vec{c} = \vec{c} \times \vec{a}$$



مثلت ABC را در نظر بگیرید. اگر $M(4, m, 3)$ ، $N(-k, m, 2)$ و $P(k, m, 4)$ ، به ترتیب نقاطی واقع بر اضلاع

BC، AB و AC باشند، به طوری که $\frac{AN}{BN} = \frac{BM}{CM} = \frac{CP}{AP} = 2$ آن گاه مساحت مثلث ABC کدام است؟

- ۹ (۴) ۱۲ (۳) ۱۸ (۲) ۲۴ (۱)

مشاوره این سؤال با ایده گرفتن از یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۳ ولی با سطح دشوارتر از آن طرح شده است.

پاسخ: گزینه ۳

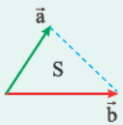
شکل فرضی را رسم کرده و ابتدا نشان دهید $S_{ANP} = S_{BMN} = S_{CMP} = \frac{2}{9} S_{ABC}$.



(۱) اگر $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$ و $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$ ، آن گاه:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k}$$

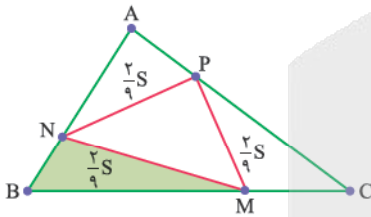
(۲) مساحت مثلثی که روی دو بردار \vec{a} و \vec{b} بنا می‌شود، برابر است با:



$$S = \frac{1}{2} |\vec{a} \times \vec{b}|$$

گام اول: با توجه به شکل فرضی زیر و بنا به رابطه سینوسی مساحت مثلث داریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$S_{ANP} = \frac{1}{2} AN \times AP \times \sin \hat{A} = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} AB \times \frac{1}{3} AC \times \sin A = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

$$S_{MBN} = S_{PCM} = \frac{2}{9} S_{ABC}$$

با توجه به شکل به همین ترتیب ثابت می‌شود:

گام دوم: با توجه به شکل داریم:

$$S_{MNP} = S_{ABC} - 3\left(\frac{2}{9} S_{ABC}\right) \Rightarrow S_{MNP} = \frac{1}{3} S_{ABC} \Rightarrow S_{ABC} = 3 S_{MNP} \quad (1)$$

گام سوم: می‌دانیم مساحت یک مثلث، نصف اندازه ضرب خارجی دو برداری است که منطبق بر دو ضلع آن مثلث باشد، پس داریم:

$$S_{MNP} = \frac{1}{2} |\overline{MP} \times \overline{NP}| = \frac{1}{2} |(k-4, 0, 1) \times (2k, 0, 2)| = \frac{1}{2} |(0, 8, 0)| = 4$$

$$S_{ABC} = 3 \times 4 = 12$$

پس با استفاده از رابطه (۱) نتیجه می‌شود:



- اگر \vec{a} ، \vec{b} و \vec{c} سه بردار دلخواه و \vec{a}' تصویر بردار \vec{a} بر روی امتداد بردار \vec{b} باشد، آن گاه کدام گزینه همواره درست است؟
- (۱) اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ باشد، آن گاه $\vec{b} = \vec{c}$ است.
 - (۲) اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ باشد، آن گاه $\vec{b} = \vec{c}$ است.
 - (۳) اندازه بردار \vec{a}' کوچکتر یا مساوی اندازه بردار \vec{a} است.
 - (۴) اندازه بردار \vec{a}' کوچکتر یا مساوی اندازه بردار \vec{b} است.

پاسخ: گزینه ۳

امکان حذف یک بردار از طرفین یک تساوی در ضرب داخلی یا خارجی بردارها وجود ندارد.



درس Box

- (۱) اگر $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ باشد، آن گاه $\vec{a} = \vec{0}$ یا $\vec{b} = \vec{c}$ یا $\vec{a} \perp \vec{b} - \vec{c}$.
- (۲) اگر $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ باشد، آن گاه $\vec{a} = \vec{0}$ یا $\vec{b} = \vec{c}$ یا $\vec{a} \parallel \vec{b} - \vec{c}$.
- (۳) اگر \vec{a}' تصویر بردار \vec{a} بر روی امتداد بردار \vec{b} باشد، آن گاه $\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|} \vec{b}$ است.

گزینه‌ها را به طور جداگانه بررسی کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): فرض کنید $\vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$ باشد. در این صورت $\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = 0$ است و برای برقراری این رابطه، کافی است $\vec{a} \perp (\vec{b} - \vec{c})$ و لزومی ندارد $\vec{b} = \vec{c}$ باشد. به عنوان مثال داریم:

$$\vec{a} = (1, 2, 3), \vec{b} = (2, -1, 4), \vec{c} = (3, 0, 3) \Rightarrow \vec{b} - \vec{c} = (-1, -1, 1)$$

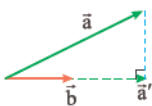
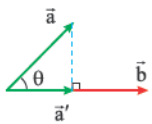
$$\vec{a} \cdot (\vec{b} - \vec{c}) = (1, 2, 3) \cdot (-1, -1, 1) = -1 - 2 + 3 = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - \vec{a} \cdot \vec{c} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{a} \cdot \vec{c}$$

گزینه (۲): فرض کنید $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$ باشد. در این صورت $\vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0}$ است و برای برقراری این رابطه، کافی است $\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c})$ و لزومی ندارد $\vec{b} = \vec{c}$ باشد. به عنوان مثال داریم:

$$\vec{a} = (1, 1, 2), \vec{b} = (2, 1, 0), \vec{c} = (0, -1, -4) \Rightarrow \vec{b} - \vec{c} = (2, 2, 4)$$

$$\vec{a} \parallel (\vec{b} - \vec{c}) \Rightarrow \vec{a} \times (\vec{b} - \vec{c}) = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} - \vec{a} \times \vec{c} = \vec{0} \Rightarrow \vec{a} \times \vec{b} = \vec{a} \times \vec{c}$$

گزینه (۳): مطابق شکل، اگر زاویه بین دو بردار \vec{a} و \vec{b} ، برابر θ باشد، آن گاه $|\vec{a}'| = |\vec{a}| |\cos \theta|$ و چون $|\cos \theta| \leq 1$ ، پس همواره $|\vec{a}'| \leq |\vec{a}|$:



گزینه (۴): اندازه بردار \vec{a}' می‌تواند بزرگتر از اندازه بردار \vec{b} باشد:



۲۵ اگر \vec{i} ، \vec{j} و \vec{k} بردارهای یک‌محوره‌ای مختصات باشند، حاصل عبارت $2\vec{i} \cdot (3\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (2\vec{i} \times 3\vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (3\vec{i} \times 2\vec{j})$ کدام است؟

۴۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۲ (۲)

۱) صفر

پاسخ: گزینه ۲

ضرب خارجی بردارها خاصیت جابه‌جایی ندارد، پس به ترتیب بردارها در هنگام ضرب خارجی دقت کنید.

Hint

درس‌نویس Box

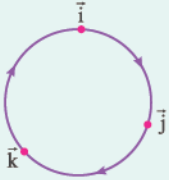
۱) بردارهای یک‌محوره‌ای مختصات، دویبه‌دو بر هم عمودند؛ پس ضرب داخلی هر دو بردار از بین آن‌ها همواره برابر صفر است:

$$\vec{i} \cdot \vec{j} = \vec{j} \cdot \vec{k} = \vec{k} \cdot \vec{i} = 0$$

از طرفی ضرب داخلی هر بردار یک‌محوره در خودش همواره برابر یک است:

$$\vec{i} \cdot \vec{i} = |\vec{i}|^2 = 1, \vec{j} \cdot \vec{j} = |\vec{j}|^2 = 1, \vec{k} \cdot \vec{k} = |\vec{k}|^2 = 1$$

۲) مطابق شکل اگر بردارهای \vec{i} ، \vec{j} و \vec{k} را بر روی یک دایره قرار دهیم، حاصل ضرب خارجی هر دو بردار در جهت ساعتگرد، برابر بردار بعدی و در جهت پادساعتگرد، برابر قرینه بردار بعدی است:



$$\begin{cases} \vec{i} \times \vec{j} = \vec{k} \\ \vec{j} \times \vec{k} = \vec{i} \\ \vec{k} \times \vec{i} = \vec{j} \end{cases} \quad \begin{cases} \vec{j} \times \vec{i} = -\vec{k} \\ \vec{k} \times \vec{j} = -\vec{i} \\ \vec{i} \times \vec{k} = -\vec{j} \end{cases}$$

گام اول: ابتدا با توجه به مورد (۲) درس‌بکس، حاصل عبارت‌های درون پرانتزها را محاسبه می‌کنیم:

$$3\vec{j} \times \vec{k} = 3(\vec{j} \times \vec{k}) = 3\vec{i}$$

$$2\vec{i} \times 3\vec{k} = 6(\vec{i} \times \vec{k}) = 6(-\vec{j}) = -6\vec{j}$$

$$4\vec{k} \times 3\vec{i} = 12(\vec{k} \times \vec{i}) = 12\vec{j}$$

گام دوم: با جای‌گذاری مقادیر به‌دست‌آمده از گام اول در عبارت صورت سؤال داریم:

$$2\vec{i} \cdot (3\vec{j} \times \vec{k}) + 3\vec{j} \cdot (2\vec{i} \times 3\vec{k}) + 4\vec{k} \cdot (3\vec{i} \times 2\vec{j}) = 2\vec{i} \cdot 3\vec{i} + 3\vec{j} \cdot (-6\vec{j}) + 4\vec{k} \cdot (12\vec{j}) = 6|\vec{i}|^2 - 18|\vec{j}|^2 + 48|\vec{k}|^2 = 6 - 18 + 48 = 36$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در مثلثی به طول اضلاع ۶، ۷ و ۹، اختلاف طول دو قطعه‌ای که نیمساز زاویه متوسط، بر روی ضلع روبه‌روی خود ایجاد می‌کند، کدام است؟

۱/۴ (۲)

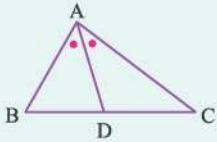
۱/۲ (۱)

۱/۸ (۴)

۱/۶ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

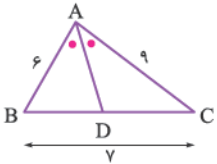
(۱) در شکل زیر که AD نیمساز زاویه داخلی A است، داریم:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

$$\begin{cases} a = mk \\ b = nk \end{cases} \text{ اگر } \frac{a}{b} = \frac{m}{n} \text{ می‌توانیم در نظر بگیریم:}$$

گام اول: با توجه به آن که زاویه متوسط مثلث، روبه‌روی ضلع متوسط آن است، شکل مناسب را رسم می‌کنیم. با توجه به قسمت (۱) درس باکس، داریم:



$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{6}{9} \Rightarrow \frac{BD}{CD} = \frac{2}{3}$$

$$\begin{cases} BD = 2k \\ CD = 3k \end{cases} \text{ گام دوم: با توجه به قسمت (۲) درس باکس، از } \frac{BD}{CD} = \frac{2}{3} \text{، می‌توانیم نتیجه بگیریم:}$$

گام سوم: با توجه به شکل، داریم:

$$BD + CD = BC \Rightarrow 2k + 3k = 7 \Rightarrow 5k = 7 \Rightarrow k = \frac{7}{5} = 1\frac{2}{5} \Rightarrow CD - BD = 3k - 2k = k = 1\frac{2}{5}$$

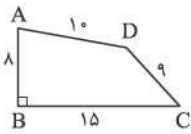
درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۲۷

در شکل زیر، با توجه به اندازه‌های روی آن، مساحت چهارضلعی ABCD کدام است؟



- (۱) $48\sqrt{3}$
- (۲) ۷۲
- (۳) $36\sqrt{3}$
- (۴) ۹۶

مشاوره این سؤال، مشابه کار در کلاس صفحه ۷۲ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۴

قطر AC را رسم کنید.

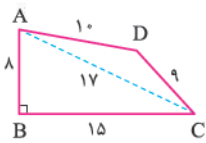
Hint

درسی Box

قضیه هرون: اگر محیط مثلثی به طول اضلاع a، b و c را برابر با ۲P در نظر بگیریم، مساحت آن برابر است با:

$$S = \sqrt{P(P-a)(P-b)(P-c)}$$

گام اول: قطر AC را رسم می‌کنیم، داریم $S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD}$.



گام دوم: در مثلث قائم‌الزاویه ABC با استفاده از رابطه فیثاغورس نتیجه می‌شود $AC = 17$ ، ضمن آن‌که:

$$S_{ABC} = \frac{1}{2} AB \times BC = \frac{1}{2} \times 8 \times 15 = 60$$

گام سوم: محیط مثلث ACD برابر $9 + 10 + 17 = 36$ است، در نتیجه $P = \frac{36}{2} = 18$ است. با استفاده از رابطه هرون در مثلث ACD، داریم:

$$S_{ACD} = \sqrt{18(18-9)(18-10)(18-17)} = \sqrt{18 \times 9 \times 8 \times 1} = 36$$

در نتیجه:

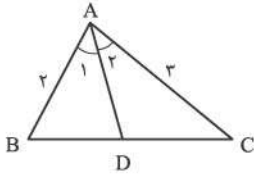
$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = 60 + 36 = 96$$

پاسخ خیلی تشریحی



۲۸

مطابق شکل، اگر $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 3^\circ$ ، آن گاه طول AD کدام است؟



(۱) $1/2\sqrt{3}$

(۲) $1/4\sqrt{3}$

(۳) $1/2$

(۴) $1/8$

مشاوره این سؤال، بر مبنای تمرین ۵ در صفحه‌های ۷۳ و ۷۴ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است. توجه کنید که باید تمام روابطی را که در فصل سوم کتاب هندسه (۲) آمده است، فراگیرید.

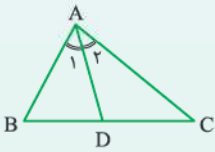
پاسخ: گزینه ۱

پاره‌خط AD، نیمساز \hat{A} در مثلث ABC است.



درسی Box

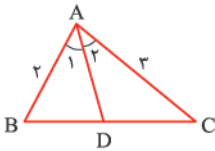
مطابق شکل، در مثلث ABC، نیمساز زاویه داخلی A رسم شده است ($\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = \frac{\hat{A}}{2}$)، داریم:



$$AD = \frac{2AB \times AC \times \cos \frac{\hat{A}}{2}}{AB + AC}$$

با توجه به درس باکس، در شکل مقابل، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی



$$AD = \frac{2 \times 2 \times 3 \times \cos 3^\circ}{2 + 3} = \frac{6\sqrt{3}}{5} = 1/2\sqrt{3}$$



۲۹

در مثلث ABC ، نقطه M وسط ضلع BC است و نیمساز زوایای $\hat{A}MB$ و $\hat{A}MC$ اضلاع AB و AC را به ترتیب در نقاط P و Q قطع می‌کنند. اگر $BC = 12$ ، $AB = AM = 9$ ، آن‌گاه طول پاره خط PQ کدام است؟

۲ / $4\sqrt{3}$ (۲)
۳ / $\sqrt{3}$ (۴)

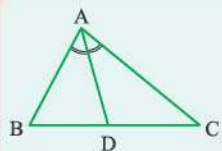
۲ / $4\sqrt{6}$ (۱)
۳ / $\sqrt{6}$ (۳)

مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی تیرماه ۱۴۰۳، براساس تمرین ۱ در صفحه ۷۰ کتاب درسی هندسه (۲) طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

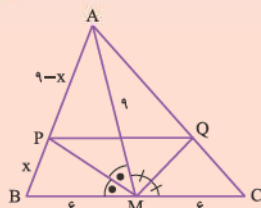
مطابق شکل در مثلث ABC ، اگر AD نیمساز زاویه داخلی A باشد، داریم:



$AD^2 = AB \times AC - BD \times CD$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: با توجه به شکل، در مثلث ABM داریم:



الف) $\frac{PA}{PB} = \frac{AM}{BM} \Rightarrow \frac{9-x}{x} = \frac{9}{6} = \frac{3}{2} \Rightarrow \frac{9}{x} = \frac{5}{2} \Rightarrow x = \frac{18}{5}$

ب) $PM^2 = AM \times BM - PA \times PB = 9 \times 6 - (9 - \frac{18}{5}) \times \frac{18}{5} = 54(1 - \frac{9}{25}) = \frac{54 \times 16}{25} \Rightarrow PM = \frac{12}{5}\sqrt{6}$

گام دوم: در دو مثلث AMB و AMC ، داریم:

$$\begin{cases} \Delta AMB : \hat{A}MB \text{ زاویه نیمساز } MP \Rightarrow \frac{PA}{PB} = \frac{AM}{BM} \\ \Delta AMC : \hat{A}MC \text{ زاویه نیمساز } MQ \Rightarrow \frac{AQ}{QC} = \frac{AM}{CM} \end{cases} \xrightarrow{BM=CM} \frac{PA}{PB} = \frac{AQ}{QC} \xrightarrow{\text{عکس قضیه تالس}} PQ \parallel BC$$

$\xrightarrow{\text{قضیه تالس}} \frac{PQ}{BC} = \frac{PA}{AB} \Rightarrow PQ = 12 \times \frac{9 - \frac{18}{5}}{9} = \frac{36}{5}$

گام سوم: مثلث PMQ قائم‌الزاویه است؛ زیرا:

$\hat{A}MB + \hat{A}MC = 180^\circ \Rightarrow 2\hat{A}MP + 2\hat{A}MQ = 180^\circ \Rightarrow \hat{A}MP + \hat{A}MQ = 90^\circ \Rightarrow \hat{P}MQ = 90^\circ$

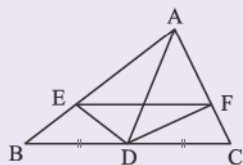
گام چهارم: قضیه فیثاغورس را در مثلث PMQ می‌نویسیم:

$MQ^2 + PM^2 = PQ^2 \Rightarrow MQ^2 = (\frac{36}{5})^2 - (\frac{12}{5}\sqrt{6})^2 \times 6 = \frac{4^2 \times 9^2 - 4^2 \times 9 \times 6}{25} = \frac{4^2 \times 9(9-6)}{25} = \frac{12^2 \times 3}{25}$
 $\Rightarrow MQ = \frac{12}{5}\sqrt{3} = 2/4\sqrt{3}$



در مثلث ABC ، DE نیمساز زاویه $\hat{A}DB$ و $EF \parallel BC$ است. اگر $AC = 8$ ، $BC = 14$ و $AD = 3$ باشد، اندازه DF کدام است؟

(سؤال ۳۰ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت دوم)



$\sqrt{7}$ (۱)

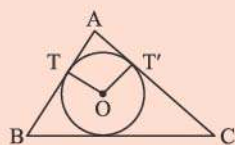
$0/9\sqrt{7}$ (۲)

$0/5\sqrt{21}$ (۳)

$0/6\sqrt{21}$ (۴)

۳۰

مطابق شکل، مثلث ABC به اضلاع $AB = 4$ ، $AC = 5$ و $BC = 7$ و دایرهٔ محاطی آن رسم شده‌اند. اگر O مرکز دایره و T و T' نقاط تماس باشند، مساحت چهارضلعی $ATOT'$ کدام است؟



$$\sqrt{1/5} \quad (1)$$

$$\sqrt{2} \quad (2)$$

$$\sqrt{2/5} \quad (3)$$

$$\sqrt{3} \quad (4)$$

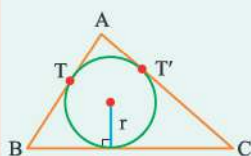
مشاوره این سؤال، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور ریاضی اردیبهشت ۱۴۰۴ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۱
درس Box

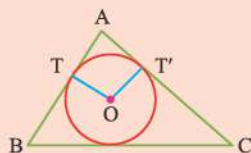
در شکل زیر که دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC ، با محیط $2P$ و مساحت S رسم شده است، داریم:

$$\text{الف) } r = \frac{S}{P} \quad (\text{شعاع دایره})$$

$$\text{ب) } AT = AT' = P - BC$$



گام اول: محیط مثلث ABC برابر است با $2P = 4 + 5 + 7 = 16$ ، پس $P = 8$.

پاسخ خیلی تشریحی


گام دوم: با توجه به درس باکس، داریم:

$$AT = AT' = P - BC = 8 - 7 = 1$$

گام سوم: مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S = \sqrt{8(8-7)(8-5)(8-4)} = \sqrt{8 \times 1 \times 3 \times 4} = 4\sqrt{6}$$

پس:

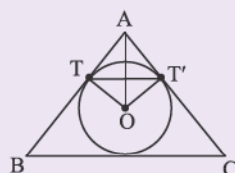
$$r = \frac{S}{P} = \frac{4\sqrt{6}}{8} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

گام چهارم:

به دلیل هم‌نهشتی دو مثلث قائم‌الزاویه $AT'O$ و ATO داریم:

$$S_{ATOT'} = 2S_{ATO} = 2\left(\frac{1}{2}OT \times AT\right) = OT \times AT = r \times AT = \frac{\sqrt{6}}{2} \times 1 = \frac{\sqrt{6}}{2} = \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{4}} = \sqrt{1/5}$$

در مثلث محیطی شکل زیر، اضلاع $AB = 4$ و $AC = 5$ به ترتیب در نقاط T و T' بر محیط دایرهٔ محاطی، مماس هستند. اگر $BC = 7$ باشد، اندازهٔ وتر TT' کدام است؟



$$0/2\sqrt{15} \quad (1)$$

$$0/4\sqrt{15} \quad (2)$$

$$0/2\sqrt{5} \quad (3)$$

$$0/4\sqrt{5} \quad (4)$$

کنکور

۳۱ در چند جایگشت از ارقام ۱, ۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۴ دو رقم ۳ و ۲ کنار هم هستند؟

$$\begin{aligned} (1) & \binom{6}{3} \\ (2) & \binom{6}{3} \\ (3) & \binom{6}{2} \\ (4) & \binom{6}{2} \end{aligned}$$

مشاوره از فصل سوم گسسته، معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید. در سال‌های اخیر بیشتر از اصل لانه کبوتری، تعداد تابع‌ها و معادله سیاله خطی سؤال آمده است.

پاسخ: گزینه ۲

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{(n-r)!}$$

۲ و ۳ را در یک بسته قرار دهید. حواستان باشد:

Hint

قضیه جایگشت با تکرار:

درس Box

فرض کنید Π شیء داریم، به طوری که Π_1 تای آن‌ها از نوع اول (مثل هم)، Π_2 تای آن‌ها از نوع دوم (مثل هم)، ... و Π_k تای آن‌ها از نوع k ام (مثل هم) باشند، تعداد کل جایگشت‌های اشیا برابر است با:

$$\frac{n!}{n_1! \times n_2! \times \dots \times n_k!}$$

جمع‌بندی جایگشت‌ها:

توضیح فارسی	تعداد	انواع جایگشت
جایگاه اول n حالت، جایگاه بعدی $n-1$ حالت و ...	$n!$	n شیء متمایز
آن اشیا را در یک دسته قرار داده و یک شیء فرض می‌کنیم. جایگشت دسته به همراه بقیه اشیا را در جایگشت اعضای دسته بین خودشان ضرب می‌کنیم.	-	تعدادی شیء خاص کنار هم باشند.
با اشیا B باید شروع کنیم $B \times A \times B \times \dots \times B$ $(n+1)!$ جایگشت اشیا B بین خودشان و $n!$ جایگشت گروه A بین خودشان	n شیء متمایز دسته A و $n+1$ شیء متمایز دسته B $n! \times (n+1)! =$	یک در میان
می‌توانیم با گروه A یا گروه B شروع کنیم.	دو گروه n تایی از اشیا متمایز $2! \times n! \times n! =$	
n شیء داریم، ولی جایگشت r تایی از آن‌ها را می‌خواهیم. (ترتیب هم مهم است).	$\binom{n}{r} = P(n, r) = \frac{n!}{(n-r)!}$	r تایی از n شیء
n شیء داریم، ولی k تا مثل هم هستند.	$\frac{n!}{k!}$	با تکرار
ابتدا n شیء را می‌چینیم و بعد k شیء را بین یا کناره‌های n شیء قرار می‌دهیم. (مثال توپ‌ها)	-	فاصله‌دار (n شیء و k شیء متمایز داریم که هیچ کدام از k شیء کنار هم نیستند).

گام اول: دو رقم ۳ و ۲ را در یک بسته قرار می‌دهیم، پس ۶ شیء به صورت ۱, ۱, ۱, ۲, ۳, ۴, ۴ داریم.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: ۶ شیء بالا ۶! جایگشت دارند، ولی ۳ تا از آن‌ها مثل هم و ۲ تای دیگر نیز مثل هم هستند، پس تعداد جایگشت‌ها برابر $\frac{6!}{3! \times 2!}$ می‌شود.

گام سوم: دقت کنید که خود ارقام ۳ و ۲ نیز بین خودشان ۲! جابه‌جا می‌شوند، پس تعداد جایگشت‌ها در کل برابر است با:

$$\frac{6!}{3! \times 2!} \times 2! = \frac{6!}{3!} = \binom{6}{3}$$

با ارقام ۳، ۲، ۱، ۳، ۲، ۱، ۴، ۳، ۲، ۲ چند عدد ۱۰ رقمی می توان نوشت؟ (محاسبه جواب آخر الزامی نیست.)

(سوال ۱۳ - امتحان نوبتی فروردین ۱۴۰۳)





۲ عدد به صورت تصادفی از مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی انتخاب می‌کنیم. اگر بدانیم مجموع این دو عدد نیز یک‌رقمی است، با کدام احتمال دقیقاً یکی از اعداد انتخاب شده اول است؟

$$\frac{5}{8} \text{ (۴)}$$

$$\frac{1}{2} \text{ (۳)}$$

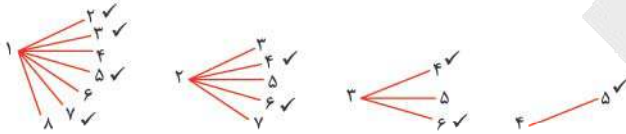
$$\frac{9}{16} \text{ (۲)}$$

$$\frac{3}{5} \text{ (۱)}$$

پاسخ: گزینه ۲

حالت‌هایی که مجموع دو عدد کم‌تر از 10 هستند را بنویس و بین در چند حالت فقط یکی عدد اول است.

گام اول: با احتمال شرطی مواجه هستیم. فضای نمونه کاهش یافته (جدید) حالت‌هایی که مجموع دو عدد یک‌رقمی باشد. چون داریم ۲ عدد را انتخاب می‌کنیم، پس ترتیب مهم نیست. حالت‌های زیر را داریم:



پس در کل ۱۶ حالت داریم.

گام دوم: حالت‌هایی که کنار آن‌ها تیک زده‌ایم مطلوب هستند (یعنی دقیقاً یکی از اعداد اول است).

گام سوم: از ۱۶ حالت ۹ حالت مطلوب داریم؛ پس احتمال برابر $\frac{9}{16}$ می‌شود.



پاسخ خیلی تشریحی



باران و ستایش هر کدام با احتمال $\frac{3}{5}$ و $\frac{4}{5}$ می‌خواهند در آزمون‌های خیلی سبز ثبت‌نام کنند. اگر ستایش ثبت‌نام کند، باران با احتمال $\frac{4}{5}$ ثبت‌نام می‌کند. اگر ستایش در آزمون ثبت‌نام نکند، با کدام احتمال باران هم در آزمون ثبت‌نام نمی‌کند؟

$\frac{4}{85}$

$\frac{3}{8}$

$\frac{2}{75}$

$\frac{1}{65}$

مشاوره از احتمال، معمولاً دو سؤال در کنکور می‌آید. معمولاً یک سؤال از احتمال دهم و سؤال دیگر از درس سوم (احتمال شرطی و احتمال کل و بیز) است.

پاسخ: گزینه ۳

$P(A|B)$ را داده و $P(A'|B')$ را می‌خواهد.



قوانین احتمال:

۱	احتمال رخ دادن A یا B	$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
۲	احتمال رخداد A و عدم رخداد B	$P(A \cap B') = P(A - B) = P(A) - P(A \cap B)$
۳	احتمال آن که A رخ ندهد	$P(A') = 1 - P(A)$
۴	احتمال آن که فقط یکی از A و B رخ بدهد	$P(A - B) \cup P(B - A) = P(A) + P(B) - 2P(A \cap B)$
۵	احتمال آن که نه A رخ بدهد و نه B	$P(A' \cap B') = P((A \cup B)') = 1 - P(A \cup B)$
۶	احتمال آن که حداکثر یکی از A و B رخ بدهد	$P(A' \cup B') = 1 - P(A \cap B)$
۷	احتمال رخ دادن B به شرط آن که بدانیم A رخ داده	$P(B A) = \frac{P(B \cap A)}{P(A)}$

گام اول: پیشامد ثبت‌نام باران و ستایش را به ترتیب B و S می‌گیریم، پس داریم:

$$\begin{cases} P(B) = \frac{3}{5} \\ P(S) = \frac{4}{5} \end{cases}$$

گام دوم: اگر ستایش ثبت‌نام کند، باران با احتمال $\frac{4}{5}$ ثبت‌نام می‌کند، پس $P(B|S) = \frac{4}{5}$. از فرمول احتمال شرطی داریم:

$$P(B|S) = \frac{4}{5} \Rightarrow \frac{P(B \cap S)}{P(S)} = \frac{4}{5} \Rightarrow P(B \cap S) = \frac{12}{25}$$

گام سوم: حالا خواسته مسئله می‌شود:

ستایش ثبت‌نام باران ثبت‌نام

نمی‌کند کند

$$P(B'|S') = \frac{P(B' \cap S')}{P(S')} = \frac{1 - P(B \cup S)}{1 - P(S)} = \frac{1 - (P(B) + P(S) - P(B \cap S))}{1 - P(S)}$$

به شرط آن که

$$= \frac{1 - (\frac{3}{5} + \frac{4}{5} - \frac{12}{25})}{1 - \frac{4}{5}} = \frac{\frac{4}{5}}{\frac{1}{5}} = \frac{4}{1} = 4$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۳۴

در دو جعبه به ترتیب ۲۴ و ۱۵ لامپ وجود دارد که در جعبه اول ۴ و در جعبه دوم ۵ لامپ معیوب هستند. از اولی به تصادف ۶ لامپ برداشته و در جعبه دوم قرار می‌دهیم. سپس از جعبه دوم لامپی انتخاب می‌کنیم، با کدام احتمال معیوب است؟

$$\frac{1}{7} (۴)$$

$$\frac{2}{7} (۳)$$

$$\frac{3}{7} (۲)$$

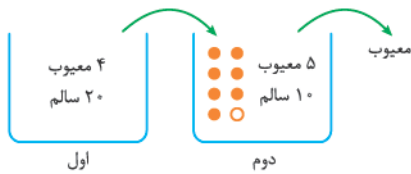
$$\frac{4}{7} (۱)$$

پاسخ: گزینه ۳

ببینید لامپی که از جعبه دوم بیرون می‌آید، با چه احتمالی متعلق به جعبه اول بوده و با چه احتمالی متعلق به جعبه دوم.

- **قانون احتمال کل:** برخی از مواقع برای به دست آوردن یک احتمال، مجبوریم چند حالت در نظر بگیریم (نمودار شاخه‌ای). در هر حالت یا شاخه احتمالها را ضرب کرده و سپس آنها را با هم جمع می‌کنیم.
- **قانون بیز:** اگر در یک مسئله شاخه‌ای، احتمال شرطی را بخواهیم (یعنی احتمال کل رخ داده و یکی از شاخه‌ها را بخواهیم)، از قانون بیز استفاده می‌کنیم. در این قانون سهم احتمال یک شاخه را بر مجموع شاخه‌ها (احتمال کل) تقسیم می‌کنیم.

گام اول: حالت‌بندی ۶ لامپ انتقالی طولانی است، پس باید جور دیگری به مسئله نگاه کنیم:



گام دوم: درون جعبه دوم $6 + 15 = 21$ لامپ وجود دارد. لامپی که از جعبه دوم بیرون می‌آوریم با احتمال $\frac{6}{21}$ از جعبه اول آمده و با احتمال $\frac{15}{21}$ در خود جعبه دوم بوده است.

گام سوم: لامپ در جعبه اول با احتمال $\frac{4}{24}$ معیوب و لامپ در جعبه دوم با احتمال $\frac{5}{15}$ معیوب است. طبق قانون احتمال کل داریم:

$$P(\text{معیوب}) = \frac{6}{21} \times \frac{4}{24} + \frac{15}{21} \times \frac{5}{15} = \frac{1}{21} + \frac{5}{21} = \frac{6}{21} = \frac{2}{7}$$

مشاوره این سؤال مشابه تمرین کتاب درسی و دشوار شده آن است. احتمال آن که این سؤال را در کنکور ببینید زیاد است.

Hint

درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی



۲۵ اگر A و B دو پیشامد مستقل باشند و $P(A) + P(B) = \frac{1}{3}$ باشد، بیشترین مقدار $P(A' \cap B')$ کدام است؟

۴) $\frac{5}{6}$

۳) $\frac{1}{2}$

۲) $\frac{25}{36}$

۱) $\frac{11}{36}$

پاسخ: گزینه ۲

$P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$ و بعد فرمول احتمال اجتماع را بنویسید.

Hint

پیشامدهای مستقل و وابسته:

نکته

A و B را دو پیشامد مستقل می‌گوییم، هرگاه رخداد یا عدم رخداد یکی تأثیری در محاسبه احتمال دیگری نداشته باشد.

تعریف ریاضی مستقل بودن دو پیشامد: $P(A \cap B) = P(A) \times P(B) \iff A$ و B مستقل‌اند.

۱) اگر A و B مستقل نباشند (تساوی بالا برقرار نباشد)، دو پیشامد را وابسته می‌گوییم.

۲) اگر A و B مستقل باشند، رخداد یا عدم رخداد A تأثیری در محاسبه احتمال B ندارد؛ یعنی:

$$P(B | A) = P(B | A') = P(B) \quad (P(A) \neq 0)$$

۳) اگر A و B مستقل باشند: الف) A و B' مستقل، ب) A' و B مستقل، و پ) A' و B' هم مستقل هستند؛
 $P(A \cap B) = P(A) \times P(B)$ $P(A \cap B') = P(A) \times P(B')$ $P(A' \cap B) = P(A') \times P(B)$ $P(A' \cap B') = P(A') \times P(B')$

یعنی احتمال اشتراک هر دوتایی از آن‌ها برابر ضرب احتمال آن‌ها می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: $P(A' \cap B') = 1 - P(A \cup B)$ ، در نتیجه زمانی $P(A' \cap B')$ بیشترین مقدار خود را دارد که $P(A \cup B)$ کمترین مقدار خود را داشته باشد.

گام دوم: $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B) = \frac{1}{3} - P(A \cap B)$ ؛ بنابراین $P(A \cap B)$ باید max باشد تا $P(A \cup B)$ به کمترین مقدار خود برسد.

گام سوم: چون A و B مستقل هستند، پس $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. از طرفی جمع دو مقدار $P(A)$ و $P(B)$ ثابت است، پس ضرب آن‌ها وقتی max می‌شود که مساوی باشند، یعنی $P(A) = P(B) = \frac{1}{6}$ می‌گیریم.

گام چهارم: $\min(P(A \cup B)) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} - \frac{1}{36} = \frac{11}{36}$

گام پنجم: $\max(P(A' \cap B')) = 1 - \frac{11}{36} = \frac{25}{36}$

مشاوره از مربع لاتین متعامد تا حالا سوآلی در کنکور نیامده است، بعید نیست امسال نوبت آن باشد.

سه برادر تقریباً هم سن و سال در خانه سه کت مشکی، قهوه‌ای و سرمه‌ای و سه پیراهن با همین سه رنگ دارند. آن‌ها می‌خواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد، هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت با هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد. اگر بخواهیم برادر بزرگ‌تر در روز اول کت مشکی را با پیراهن مشکی بپوشد، برنامه‌ریزی به چند صورت ممکن است انجام بگیرد؟

۸ (۴)

۶ (۳)

۴ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

ببینید چند مربع لاتین متعامد 3×3 داریم که درایه سطر اول و ستون اول هر دو مربع برابر ۱ است.

Hint
درس Box

تعریف دو مربع لاتین متعامد: A و B دو مربع لاتین هم‌مرتبه هستند. از کنار هم قرار دادن درایه‌های نظیر از این دو مربع، مربع جدیدی از همان مرتبه حاصل می‌شود که هر خانه آن شامل یک عدد دورقمی است که رقم سمت چپ مربوط به A و رقم سمت راست مربوط به B است (یا برعکس). اگر هیچ‌یک از اعداد دورقمی موجود در خانه‌های مربع تکرار نشده باشند، می‌گوییم A و B متعامد هستند.

ساختار مربع‌های لاتین 3×3 :

به راحتی می‌توانیم ثابت کنیم تعداد ۱۲ مربع لاتین 3×3 وجود دارد. این‌ها را می‌توانیم به دو گروه ۶ تایی (گروه A و گروه B) تقسیم کنیم:

۱	۲	۳
۲	۳	۱
۳	۱	۲

 گروه $B =$ روی قطر اصلی یکسان (۶تا)

۱	۲	۳
۳	۱	۲
۲	۳	۱

 گروه $A =$ روی قطر فرعی یکسان (۶تا)

مثال

۲	۳	۱
۱	۲	۳
۳	۱	۲

۳	۲	۱
۲	۱	۳
۱	۳	۲

هر کدام از مربع‌های گروه A یا B با خودشان متعامد نیستند، ولی با مربع‌های گروه دیگر متعامد هستند.

برای هر مربع لاتین 3×3 تعداد ۶ مربع لاتین متعامد با آن وجود دارد.

نکته

در مربع‌های لاتین 3×3 اگر دو سطر (یا دو ستون) را جابه‌جا کنیم، مربع به دست آمده با مربع اول متعامد است. (در واقع آله مربع تو گروه A باشه با این کار مربع به دیگری تو گروه B).

نکته

گام اول: کافی است دو مربع لاتین متعامد 3×3 به صورت زیر معرفی کنیم و بررسی کنیم چندتا از این جفت مربع‌ها وجود دارد:

پاسخ خیلی تشریحی

 برادر سوم
 برادر دوم
 برادر اول

روز اول	۱		
روز دوم			
روز سوم			

B

 قهوه‌ای
 ↑
 کت‌ها: ۱, ۲, ۳
 ↓
 سرمه‌ای
 ↓
 مشکی

 برادر سوم
 برادر دوم
 برادر اول

روز اول	۱		
روز دوم			
روز سوم			

A

 قهوه‌ای
 ↑
 پیراهن‌ها: ۱, ۲, ۳
 ↓
 سرمه‌ای
 ↓
 مشکی

گام دوم: طبق درس باکس در یکی از مربع‌ها اعداد قطر اصلی یکسان هستند و در دیگری اعداد قطر فرعی. فرض کنیم در مربع سمت چپی اعداد روی قطر اصلی یکسان باشند، پس همگی باید برابر ۱ باشد. خود همین مربع را به ۲ صورت می‌توانیم تکمیل کنیم.

۱		
	۱	
		۱

درست است که این مربع با ۶ مربع لاتین دیگر متعامد است، اما چون قرار است درایهٔ سطر اول و ستون اول مربع سمت راستی برابر ۱ باشد، فقط ۲ مربع در گروه دیگر وجود دارد که مربع A با آن‌ها متعامد باشد. پس تا این جا $2 \times 2 = 4$ جفت مربع لاتین داریم.

۱		۲
	۲	
۲		

۱		۳
	۳	
۳		

گام سوم: دقیقاً شبیه همین اگر اعداد روی قطر اصلی مربع B نیز همگی برابر ۱ باشد، ۴ مربع لاتین متعامد با آن به دست می‌آید، پس در کل ۸ جفت مربع لاتین متعامد داریم، یعنی برنامه‌ریزی به ۸ صورت ممکن است انجام شود.

اگر سه برادر تقریباً هم‌سن و سال در خانه سه کت و سه پیراهن داشته باشند و بخواهند در سه روز اول هفته از این لباس‌ها به گونه‌ای استفاده کنند که هر فرد هر یک از کت‌ها و هر یک از پیراهن‌ها را دقیقاً یک بار استفاده کرده باشد و هر کت یا هر پیراهن نیز دقیقاً یک بار مورد استفاده قرار بگیرد، چگونه می‌توانند این کار را انجام دهند؟
 (ریاضیات گسسته - کاردرکلاس صفحه ۶۹ کتاب درسی)





چند تابع یک به یک $\{1, 2, 3, 4, 5\} \rightarrow \{1, 2, 3\}$ وجود دارد که $f(1) + f(2) + f(3)$ عددی فرد باشد؟

۱۸ (۴)

۲۴ (۳)

۱۵ (۲)

۳۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

ببینید مجموع ۳ عدد در چه صورتی فرد می شود.

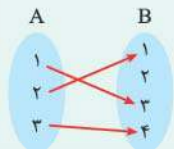


تابع های یک به یک:



تابعی یک به یک است که هر عضو A دقیقاً به یک عضو منحصر به فرد از B نظیر شود؛ یعنی دوتا عضو از A به یک عضو B نظیر نشوند. به زبان دیگر به هیچ عضو B دوتا فلش وارد نشده باشد.

مثال تابع مقابل یک به یک است.



۱) در حالت کلی تعداد تابع های یک به یک از مجموعه m عضوی A به مجموعه k عضوی B که $m \leq k$ برابر است با:

$$P(k, m) = (k)_m = \frac{k!}{(k-m)!} = (k)(k-1) \dots (k-(m-1))$$

۲) تعداد تابع های یک به یک از مجموعه m عضوی به مجموعه m عضوی برابر $m!$ می شود.

۳) اگر تعداد عضوهای A بیشتر از B باشد، تابع یک به یک از A به B وجود ندارد. (وقتی سمت چپ بیشتره فتماً به بعضی عضوهای B بیشتر از یک دونه فلش وارد می شه.)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: چون تابع یک به یک است، پس $f(1), f(2), f(3)$ باید به ۳ عدد مختلف نظیر شوند.

گام دوم: مجموع $f(1) + f(2) + f(3)$ وقتی فرد است که هر سه تایی $f(1), f(2)$ و $f(3)$ فرد باشند یا این که دقیقاً یکی فرد و دوتا زوج باشند.

گام سوم: تنها اعداد فرد مجموعه دوم (هم دامنه) ۵ و ۳ و ۱ هستند، پس ۱ و ۲ و ۳ به $3! = 6$ روش می توانند به این ۳ عدد نظیر شوند.

گام چهارم: اگر قرار باشد یکی از $f(1), f(2), f(3)$ فرد و دوتای دیگر زوج باشد، تعداد حالتها به صورت زیر به دست می آید:

دوتای باقی مانده از $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ انتخاب یکی از $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ که حاصل زوج دارند.

$$\binom{3}{1} \times \binom{2}{1} \times 2! = 3 \times 2 \times 2 = 12$$

نظیر کردن یکی از $f(1)$ و $f(2)$ و $f(3)$ که در مرحله قبلی انتخاب شده به یکی از ۱ یا ۲ یا ۵

$$12 + 6 = 18$$

گام پنجم: تعداد تابعها برابر است با:

چند تابع $\{1, 2, 4\} \rightarrow \{1, 2, 3, 4\}$ می توان تعریف کرد به طوری که مجموع مقادیر تابع، عددی فرد باشد؟

(سوال ۳۹ کنکور ریاضی ۱۳۰۴ - نوبت اول)

۲۷ (۴)

۲۸ (۳)

۴۰ (۲)

۴۱ (۱)





معادله $x_1 + \frac{9}{x_2 + x_3} + x_4 + x_5 = 10$ ، چند جواب در مجموعه اعداد صحیح نامنفی دارد؟

۳۸

۶۹۴ (۲)

۷۰۰ (۱)

۲۶۰ (۴)

۴۳۶ (۳)

مشاوره سؤال بسیار خوب ترکیب معادلات خاص و دستگاه معادله، حتماً آن را تحلیل کنید.

پاسخ: گزینه ۱

$x_2 + x_3$ را حالت بندی کنید.

Hint

تعداد جواب های معادله سیاله خطی در حالت های مختلف:

درس Box

معادله	تعداد جواب های صحیح نامنفی	تعبیر یا روش حل
$x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$ k تا متغیر	$\binom{n+k-1}{k-1}$	توزیع n شیء یکسان بین k نفر انتخاب n شاخه گل از بین k نوع گل
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \geq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1-a}{k-1}$	اگر متغیری شرط بزرگ تر یا مساوی (حداقلی) داشته باشد، آن را از n کم می کنیم.
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_i \geq 1, i = 1, 2, \dots, n \end{cases}$	$\binom{n-1}{k-1}$	جواب های طبیعی معادله
$\begin{cases} x_1 + x_2 + \dots + x_k = n \\ x_1 \leq a \end{cases}$	$\binom{n+k-1}{k-1} - \binom{n-(a+1)+k-1}{k-1}$	کل جواب ها را از جواب های با شرط $x_1 \geq a+1$ کم می کنیم.
$x_1 + x_2 + \dots + x_k \leq n$	$\binom{n+k}{k}$	متغیر نامنفی x_{k+1} را اضافه کرده تا نامعادله تبدیل به معادله $x_1 + x_2 + \dots + x_{k+1} = n$ گردد.
$\begin{cases} ax_1 + \dots + x_k = n \\ x_1^n + \dots + x_k = n \\ \sqrt{x} + \dots + x_k = n \end{cases}$	-	متغیر دارای ضرب، توان، رادیکال و ... را حالت بندی می کنیم.

گام اول: باید عددی صحیح باشد، پس $x_2 + x_3$ باید مقسوم علیه ۹ باشد، پس حالت های زیر به وجود می آید:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: $x_2 + x_3 = 1 \rightarrow x_1 + \frac{9}{1} + x_4 + x_5 = 10 \rightarrow x_1 + x_4 + x_5 = 1$

معادله $x_2 + x_3 = 1$ دارای $\binom{2}{1}$ جواب صحیح نامنفی و معادله $x_1 + x_4 + x_5 = 1$ نیز دارای $\binom{3}{2}$ جواب صحیح نامنفی است.

پس در این حالت $\binom{2}{1} \times \binom{3}{2} = 2 \times 3 = 6$ جواب به وجود می آید.

گام سوم:

$x_2 + x_3 = 3 \Rightarrow x_1 + \frac{9}{3} + x_4 + x_5 = 10 \Rightarrow x_1 + x_4 + x_5 = 7 \Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{4}{1} \times \binom{9}{2} = 4 \times 36 = 144$

گام چهارم:

$x_2 + x_3 = 9 \Rightarrow x_1 + \frac{9}{9} + x_4 + x_5 = 10 \Rightarrow x_1 + x_4 + x_5 = 9 \Rightarrow$ تعداد جواب ها $= \binom{10}{1} \times \binom{11}{2} = 10 \times 55 = 550$

گام پنجم: $\text{تعداد کل جواب ها} = 6 + 144 + 550 = 700$



چند جایگشت از خانه‌های جدول زیر وجود دارد به طوری که هیچ کدام از ارقام ۱، ۲ و ۳ در مکان فعلی خود نباشند؟

۱	۲	۳
۴	۵	۶

(مثل)

۳	۱	۲
۴	۵	۶

 یا

۳	۱	۴
۶	۵	۲

۴۳۶ (۴)

۴۲۶ (۳)

۴۲۸ (۲)

۲۴۲ (۱)

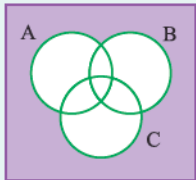
پاسخ: گزینه ۳

A_i که $1 \leq i \leq 3$ را به این صورت تعریف کنید که i در مکان فعلی خود باشد.

اگر A, B و C سه مجموعه باشند:

$$|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$$

یعنی برای به دست آوردن تعداد عضوهای $A \cup B \cup C$ کافی است تعداد عضوهای تک تک را جمع کرده، منهای اشتراک دوتادوتا کنیم بعد با اشتراک سه مجموعه جمع کنیم. شبیه چیزی که قبلاً گفتیم:



$$|\overline{A} \cap \overline{B} \cap \overline{C}| = |\overline{A \cup B \cup C}| = |S| - |A \cup B \cup C|$$

(یعنی در هیچ کدام)

گام اول: تعداد کل جایگشت‌ها برابر است با $6!$.

گام دوم: A_1, A_2 و A_3 را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_1 = \{ \text{مکان فعلی باشد } 1 \} \Rightarrow |A_1| = 5!$$

$$A_2 = \{ \text{مکان فعلی باشد } 2 \} \Rightarrow |A_2| = 5!$$

$$A_3 = \{ \text{مکان فعلی باشد } 3 \} \Rightarrow |A_3| = 5!$$

گام سوم: تعداد عضوهای $A_1 \cap A_2, A_1 \cap A_3, A_2 \cap A_3$ نیز برابر $4!$ است، چون ۲ و ۱ در مکان فعلی خود قرار می‌گیرند اما سایر ارقام $4!$ جایگشت دارند. شبیه همین:

$$|A_1 \cap A_2 \cap A_3| = 3!$$

گام چهارم:

$$|A'_1 \cap A'_2 \cap A'_3| = |S| - |A_1 \cup A_2 \cup A_3| =$$

۳ در مکان خود نباشد
۲ در مکان خود نباشد
۱ در مکان خود نباشد

$$|S| - [|A_1| + |A_2| + |A_3| - |A_1 \cap A_2| - |A_1 \cap A_3| - |A_2 \cap A_3| + |A_1 \cap A_2 \cap A_3|]$$

$$= 6! - [5! + 5! + 5! - 4! - 4! - 4! + 3!] = 720 - [3 \times 120 - 3 \times 24 + 6] = 426$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓



۴۰

در هر زیرمجموعه m عضوی از مجموعه اعداد طبیعی یک‌رقمی مطمئن هستیم که حداقل ۳ عضو وجود دارد که مجموع آن‌ها از 10 کم‌تر است. کم‌ترین مقدار m کدام است؟

۷ (۲)

۶ (۱)

۵ (۴)

۸ (۳)

مشاوره طراحان کنکور علاقه زیادی به موضوع اصل لانه‌کبوتری دارند. تمرین‌های کتاب و سؤال‌های سال‌های اخیر در این بخش را حتماً بررسی کنید.

پاسخ: گزینه ۳

زیرمجموعه را با بیشترین تعداد عضو، جوری بگیرید که شرط داده‌شده، برقرار نشود.

Hint

گام اول: بدترین حالت ممکن را در نظر بگیرید؛ یعنی تا حد امکان زیرمجموعه، تعداد عضوهای بیشتری داشته باشد ولی جمع هیچ ۳ عددی کم‌تر از 10 نشود.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: زیرمجموعه را به صورت $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots, 9\}$ در نظر بگیرید. کم‌ترین جمع ۳ عدد برابر $1+2+3=6$ است، پس اگر زیرمجموعه ۷ عضو داشته باشد، هنوز مطمئن نیستیم که جمع ۳ عدد کم‌تر از 10 بشود.

گام سوم: اگر یک عدد به مجموعه بالا اضافه کنیم (حالا چه ۱، چه ۲، سه عدد وجود دارند (۲ و ۳ و ۴ یا ۱ و ۳ و ۴) که جمع آن‌ها کم‌تر از 10 می‌شود، پس اگر زیرمجموعه، حداقل ۸ عضو داشته باشد، مطمئن هستیم که جمع ۳ عضو کم‌تر از 10 می‌شود.



شدت تابشی متوسط خورشید در سطح زمین 300 W/m^2 است. اگر طول موج متوسط فوتون‌های تابیده شده 528 nm باشد، در هر دقیقه چند فوتون به هر متر مربع از سطح زمین می‌رسد؟ ($h = 6.6 \times 10^{-34} \text{ J.s}$ و $c = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$)

$$4/8 \times 10^{21} \quad (2)$$

$$2/4 \times 10^{21} \quad (1)$$

$$4/8 \times 10^{22} \quad (4)$$

$$2/4 \times 10^{22} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

۱) تابش کوانتیده است. یعنی تابش نور (مرئی و غیرمرئی) با بسامد f را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از بسته‌های انرژی در نظر گرفت. هر بسته انرژی که بعدها فوتون نامیده شد، دارای انرژی‌ای است که از رابطه $E = hf$ به دست می‌آید.

$$E = \text{انرژی (J)}$$

$$h = \text{ثابت پلانک (J.s)} = 6.6 \times 10^{-34}$$

$$f = \text{بسامد (Hz)}$$

بنابراین انرژی کل موج الکترومغناطیس برای شمار n فوتون، از رابطه $E = nhf = nh \frac{c}{\lambda}$ به دست می‌آید.

$$c = \text{تندی نور در خلأ} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \text{طول موج (m)}$$

۲) شدت تابشی یک موج الکترومغناطیس به کمک رابطه زیر، محاسبه می‌شود:

$$I = \frac{P}{A} \xrightarrow{P = \frac{E}{\Delta t}} I = \frac{E}{A \Delta t}$$

$$I = \text{شدت تابشی (W/m}^2\text{)}$$

$$P = \text{توان تابشی (W)}$$

$$E = \text{انرژی تابشی (J)}$$

$$A = \text{مساحت سطحی که موج بر آن می‌تابد. (m}^2\text{)}$$

$$\Delta t = \text{بازه زمانی تابش (s)}$$

گام اول: اندازه انرژی تابشی خورشید را که در هر دقیقه بر یک متر مربع از سطح زمین می‌تابد، حساب می‌کنیم:

$$I = \frac{E}{A \Delta t} \Rightarrow E = I A \Delta t \xrightarrow{I=300 \text{ W/m}^2, A=1 \text{ m}^2, \Delta t=1 \text{ min}=60 \text{ s}} E = 300 \times 1 \times 60 = 18 \times 10^3 \text{ J}$$

گام دوم: با استفاده از رابطه کوانتومی بودن انرژی موج الکترومغناطیس، تعداد فوتون‌ها را به دست می‌آوریم.

$$E = nh \frac{c}{\lambda} \Rightarrow n = \frac{E \lambda}{hc} = \frac{18 \times 10^3 \times 528 \times 10^{-9}}{6.6 \times 10^{-34} \times 3 \times 10^8} = \frac{528}{1/1} \times 10^{20} \Rightarrow n = 480 \times 10^{20} = 4/8 \times 10^{22}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در اتم هیدروژن، محدوده تقریبی بسامدهای رشته بالمر ($n' = 2$) بر حسب تراهرتز کدام است؟

$$(c = 3 \times 10^8 \text{ m/s و } R = 0.01 \text{ nm}^{-1})$$

$$750 \text{ تا } 500 \text{ (۲)}$$

$$750 \text{ تا } 416/6 \text{ (۱)}$$

$$1500 \text{ تا } 500 \text{ (۴)}$$

$$1500 \text{ تا } 416/6 \text{ (۳)}$$

پاسخ: گزینه ۱

معادله ریذبرگ:

درس Box

طول موج تمامی خطهای طیف گسیلی اتم هیدروژن از رابطه زیر به دست می آید. به طوری که اگر الکترون اتم هیدروژن از تراز n به تراز n' برود طول موج λ را تابش می کند و اگر از n' به n برود طول موج λ را جذب می کند.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right)$$

$$\lambda = \text{طول موج (nm)}$$

$$n = \text{شماره مدار بزرگتر}$$

$$n' = \text{شماره مدار کوچکتر}$$

$$R = \text{ثابت ریذبرگ} = 0.011 \text{ (nm)}^{-1} \approx 0.01097 \text{ (nm)}^{-1}$$

کمترین طول موج هر رشته، مربوط به بیشترین بسامد و بیشترین انرژی مبادله شده است، یعنی گذار بین ترازهای $n' = \infty$ و n .
همچنین بیشترین طول موج هر رشته، مربوط به کمترین بسامد و کمترین انرژی مبادله شده است، یعنی گذار بین ترازهای n' و $n = n' + 1$.

بسامد هر موج الکترومغناطیس از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$f = \frac{c}{\lambda}$$

$$f = \text{بسامد (Hz)}$$

$$c = \text{تندی نور در خلأ} = 3 \times 10^8 \text{ m/s}$$

$$\lambda = \text{طول موج نور (m)}$$

گام اول: به کمک رابطه ریذبرگ، بیشترین و کمترین طول موج مربوط به رشته بالمر ($n' = 2$) را محاسبه می کنیم.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow[n'=2, n=2+1=3]{\lambda=\lambda_{\max}} \frac{1}{\lambda_{\max}} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^2} \right) = \frac{1}{100} \left(\frac{5}{36} \right)$$

$$\Rightarrow \lambda_{\max} = 720 \text{ nm}$$

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow[n'=2, n=\infty]{\lambda=\lambda_{\min}} \frac{1}{\lambda_{\min}} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{2^2} - \frac{1}{\infty} \right) = \frac{1}{400}$$

$$\Rightarrow \lambda_{\min} = 400 \text{ nm}$$

گام دوم: کمترین بسامد مربوط به بیشترین طول موج است. هم چنین بیشترین بسامد مربوط به کمترین طول موج است.

$$f_{\min} = \frac{c}{\lambda_{\max}} = \frac{3 \times 10^8}{720 \times 10^{-9}} = \frac{3 \times 10^5}{720} \times 10^{12} \text{ Hz} \approx 416/6 \text{ THz}$$

$$f_{\max} = \frac{c}{\lambda_{\min}} = \frac{3 \times 10^8}{400 \times 10^{-9}} = \frac{3000}{4} \times 10^{12} \text{ Hz} = 750 \text{ THz}$$

بنابراین محدوده تقریبی بسامدهای رشته بالمر، بین $416/6$ تا 750 تراهرتز است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



الکترون اتم هیدروژنی در تراز $n = 5$ قرار دارد. با در نظر گرفتن تمام گذارهای ممکن، اختلاف انرژی پراثری ترین و کم انرژی ترین فوتونی که می تواند گسیل کند، چند ریدبرگ است؟

$$\frac{12}{25} \quad (2)$$

$$\frac{21}{100} \quad (1)$$

$$\frac{3}{4} \quad (4)$$

$$\frac{15}{16} \quad (3)$$

مشاوره این تست در کنکور رشته تجربی در اردیبهشت ۱۴۰۳ مطرح شده است. با این تفاوت که این جا پاسخ برحسب انرژی ریدبرگ خواسته شده است.

پاسخ: گزینه ۳

درس Box

$$E_n = -\frac{E_R}{n^2}$$

(۱) ترازهای انرژی الکترون در اتم هیدروژن:

$$E_n = \text{انرژی الکترون در مدار } n \text{ اتم هیدروژن}$$

$$E_R = \text{انرژی یک ریدبرگ (} 13.6 \text{ eV)}$$

الکترون در یک اتم نمی تواند هر مقدار انرژی ای داشته باشد، بلکه مجاز است انرژی ای برابر با یکی از مقدارهایی که از رابطه فوق به دست می آید داشته باشد. هر یک از این مقدارهای مجاز را یک تراز انرژی می نامند.

بالاترین تراز انرژی، مربوط به $n = \infty$ است که انرژی آن 0 eV (صفر الکترون ولت) است.

پایین ترین تراز انرژی، مربوط به $n = 1$ (حالت پایه) است که انرژی آن 13.6 eV - است.

هر چه از هسته اتم دور شویم، یعنی به ترازهای بالاتر برویم، اختلاف انرژی بین دو تراز متوالی، کاهش می یابد.

(۲) الکترون می تواند از یک حالت مانا به حالت مانای دیگر برود. هنگام گذار الکترون از یک حالت مانا با انرژی بیشتر E_U ، به یک حالت مانا با انرژی کم تر E_L ، یک فوتون تابش می شود. انرژی فوتون تابش شده برابر اختلاف انرژی بین دو مدار اولیه و نهایی است.

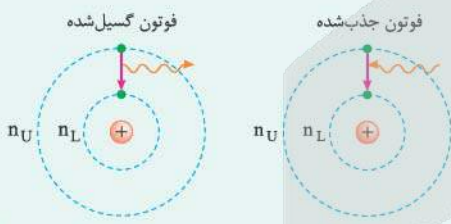
$$E_U - E_L = hf = \frac{hc}{\lambda}$$

$$hf = \text{انرژی فوتون تابش شده (eV)}$$

$$1240 \text{ eV.nm} = hc$$

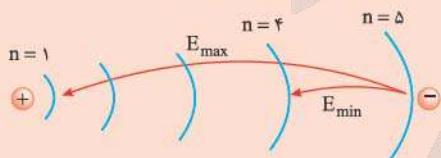
$$\lambda = \text{طول موج (nm)}$$

هم چنین برعکس، برای آن که الکترونی از تراز انرژی E_L به تراز انرژی E_U برود، یعنی از هسته دور شود، باید انرژی $E_U - E_L$ را جذب کند. الکترون این انرژی را با جذب فوتونی که درست همین مقدار انرژی دارد به دست می آورد.



گام اول: بیشترین اختلاف انرژی، بین ترازهای اول و پنجم و کم ترین اختلاف انرژی، بین ترازهای چهارم و پنجم است.

پاسخ خیلی تشریحی



گام دوم: با استفاده از رابطه بور برای اتم هیدروژن، پراثری ترین و کم انرژی ترین فوتونی که می تواند گسیل شود را برحسب انرژی ریدبرگ محاسبه می کنیم:

$$E_{\max} = E_5 - E_1 = -\frac{E_R}{5^2} - \left(-\frac{E_R}{1^2}\right) = \frac{24}{25} E_R$$

$$E_{\min} = E_5 - E_4 = -\frac{E_R}{5^2} - \left(-\frac{E_R}{4^2}\right) = E_R \left(\frac{1}{16} - \frac{1}{25}\right) = \frac{9}{400} E_R$$

گام سوم: اختلاف پتانسیل کمترین و کم انرژیترین فوتونی که در این جا می تواند گسیل شود را به دست می آوریم:

$$E_{\max} - E_{\min} = \left(\frac{24}{25} E_R\right) - \left(\frac{9}{400} E_R\right) = \frac{375}{400} E_R = \frac{15}{16} E_R$$

در اتم هیدروژن، الکترون در تراز $n = 5$ قرار دارد. فرض کنید فقط گزاره های $\Delta n = 1$ مجاز باشد. در این صورت اختلاف انرژی مربوط به فوتون هایی که بلندترین و کوتاه ترین طول موج گسیلی را دارند، چند ژول است؟

$$(E_R = 13.6 \text{ eV}, e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C})$$

(سوال ۵۹ کنکور تهرنی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

$$1.63 \times 10^{-18} \text{ (2)}$$

$$1.58 \times 10^{-18} \text{ (1)}$$

$$2.08 \times 10^{-18} \text{ (4)}$$

$$1.74 \times 10^{-18} \text{ (3)}$$

کنکور

طول موج چهارمین خط طیف اتم هیدروژن در رشته پاشن ($n' = 3$) چند نانومتر است؟ ($R = 0.01 \text{ (nm)}^{-1}$)

۴۴

۵۲۵ (۲)

۵۰۲/۵ (۱)

۱۱۲۵ (۴)

۱۱۰۲/۵ (۳)

مشاوره این تست، مشابه یکی از سؤال‌های کنکور تجربی در تیرماه ۱۴۰۱ طرح شده است.

پاسخ: گزینه ۳

در درس Box

در رابطه ریذبرگ، به ازای یک عدد صحیح که به n' نسبت می‌دهیم، n عددهای صحیح بعد از آن است و مجموعی از طول موج‌ها ایجاد می‌شوند که یک رشته نامیده می‌شوند. مقدارهای n شماره‌های خط‌ها را نشان می‌دهد. مثلاً پنجمین خط در رشته بالمر، یعنی $n = 5 + 2 = 7$.

چهارمین خط طیف اتم هیدروژن در رشته پاشن ($n' = 3$) مربوط به تراز هفتم است.

$$\frac{1}{\lambda} = R \left(\frac{1}{n'^2} - \frac{1}{n^2} \right) \xrightarrow[n=3+4=7]{n'=3} \frac{1}{\lambda} = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{3^2} - \frac{1}{7^2} \right) = \frac{1}{100} \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{49} \right)$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{40}{100 \times 9 \times 49} \Rightarrow \lambda = \frac{90 \times 49}{4} = 1102/5 \text{ nm}$$

می‌دانیم که خطوط طیف اتم هیدروژن در رشته پاشن، در ناحیه نور مرئی قرار ندارند؛ بنابراین بدون محاسبه می‌توان گزینه‌های (۱) و (۲) را رد کرد.

تیزبازی

طول موج دومین خط رشته براکت ($n' = 4$) چند برابر طول موج چهارمین خط طیف رشته با عمر ($n' = 2$) است؟

(سؤال ۱۹۷ کنکور تهری ۱۳۰۱ - نوبت دو)

۴ (۴)

 $\frac{32}{5}$ (۳)

۸ (۲)

 $\frac{72}{5}$ (۱)

کنکور



۴۵

در اتم هیدروژن، الکترون در طی یک گذار، فوتونی با انرژی $2.04 \times 10^{-18} \text{ J}$ گسیل می‌کند. در این گذار، شعاع مدار الکترون چند پیکومتر تغییر می‌کند؟ ($a_0 = 5.29 \times 10^{-11} \text{ m}$ و $e = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$ ، $E_R = 13.6 \text{ eV}$)

۷۹۳/۵ (۲)

۷۹/۳۵ (۱)

۱۵۸۷ (۴)

۱۵۸/۷ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

الکترون ولت (eV):

(۱) الکترون ولت، یکای انرژی در فیزیک اتمی و فیزیک هسته‌ای است. یک الکترون ولت بنا به تعریف، برابر مقدار انرژی لازم برای جابه‌جایی یک الکترون، تحت ولتاژ یک ولت است.

$$1 \text{ eV} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = 1.6 \times 10^{-19} \text{ J}$$

(۲) در مدل اتمی بور برای اتم هیدروژن (که یک الکترون دارد) مدارها و انرژی‌های الکترون در اتم، کوانتیده‌اند؛ یعنی فقط مدارها و انرژی‌های گسسته معینی می‌توانند مجاز باشند.

$$r_n = n^2 a_0$$

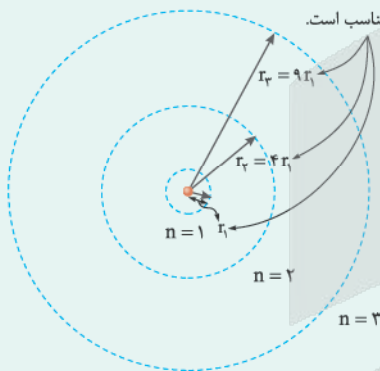
شعاع مدارهای الکترون برای اتم هیدروژن:

$$r_n = r_1 n^2 = a_0 n^2$$

$$5.29 \times 10^{-11} \text{ m} = a_0 n^2$$

این مقدار خاص، شعاع اتم بور برای اتم هیدروژن نامیده می‌شود.

شعاع مدارها با n^2 متناسب است.



$n =$ عدد کوانتومی ($n = 1, 2, 3, \dots$)

گام اول: انرژی فوتون گسیل شده را بر حسب الکترون ولت (eV) به دست می‌آوریم:

$$\Delta E = 2.04 \times 10^{-18} \text{ J} \times \frac{1 \text{ eV}}{1.6 \times 10^{-19} \text{ J}} = \frac{20.4}{1.6} = 12.75 \text{ eV}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: انرژی الکترون در چند تراز را به کمک رابطه $E_n = -\frac{13.6 \text{ eV}}{n^2}$ به دست می‌آوریم تا ببینیم انرژی فوتون گسیل شده با اختلاف کدام یک از آن‌ها برابر است.

$$E_1 = -\frac{13.6}{1^2} = -13.6 \text{ eV}$$

$$E_2 = -\frac{13.6}{2^2} = -3.4 \text{ eV}$$

$$E_3 = -\frac{13.6}{3^2} = -1.51 \text{ eV}$$

$$E_4 = -\frac{13.6}{4^2} = -0.85 \text{ eV}$$

همان‌طور که ملاحظه می‌شود، انرژی فوتون گسیل شده با اختلاف انرژی الکترون در ترازهای اول و چهارم برابر است.

$$E_4 - E_1 = -0.85 - (-13.6) = 12.75 \text{ eV}$$

گام سوم: شعاع مدار الکترون در ترازهای اول و چهارم را با استفاده از رابطه $r_n = n^2 a_0$ حساب می‌کنیم و سپس اختلاف آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$\left. \begin{aligned} r_1 &= 1^2 \times a_0 = a_0 \\ r_4 &= 4^2 \times a_0 = 16a_0 \end{aligned} \right\} \Rightarrow r_4 - r_1 = 15a_0$$

$$\xrightarrow{a_0 = 5/29 \times 10^{-11} \text{ m}} r_4 - r_1 = 15 \times 5 / 29 \times 10^{-11} = 79 / 35 \times 10^{-11} = 793 / 5 \times 10^{-12} \text{ m} = 793 / 5 \text{ pm}$$





مدل اتمی بور در چه تعداد از موارد زیر، ناموفق است؟

الف) توجیه طیف گسیلی و جذبی اتم‌های هیدروژن گونه

ب) محاسبه انرژی یونش اتم‌های هیدروژن گونه

پ) توجیه تفاوت شدت خط‌های طیف گسیلی اتم هیدروژن

ت) تبیین پایداری اتم‌های دارای دو الکترون یا بیشتر

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

مشاوره همیشه تعدادی تست غیرمحاسباتی در کنکور وجود دارند. تعداد این تست‌ها گرچه نسبتاً کم است، اما تسلط روی آن‌ها می‌تواند در زمان‌بندی پاسخگویی به تست‌ها کمک زیادی به ما بکند. یکی از قسمت‌هایی که زمینه طرح چنین تست‌هایی را دارد، فصل آخر کتاب فیزیک ۳ رشته تجربی یا دو فصل آخر کتاب فیزیک ۳ رشته ریاضی است.

پاسخ: گزینه ۲

موفقیت‌های مدل بور:

این مدل در تبیین پایداری اتم، طیف گسیلی و جذبی گاز هیدروژن اتمی و محاسبه انرژی یونش اتم هیدروژن با موفقیت همراه بوده است. افزون بر این، مدل بور را برای اتم‌های هیدروژن گونه (تک‌الکترونی) نیز می‌توان به کار برد.

اتم‌های هیدروژن گونه به اتم‌هایی گفته می‌شود که تنها یک الکترون دارند. مثلاً اتم لیتیم که در حالت خنثی سه الکترون دارد، اگر دو الکترون خود را از دست بدهد؛ یک اتم هیدروژن گونه است.

مدل بور می‌تواند انرژی یونش و همچنین طول موج‌های طیف خطی اتم‌های هیدروژن گونه مانند لیتیم دو بار یونیده را پیش‌بینی کند که با تجربه سازگاری خوبی دارد.

نارسایی‌های مدل بور:

۱) این مدل برای وقتی که بیش از یک الکترون به دور هسته می‌گردد به کار نمی‌رود؛ زیرا در مدل بور، نیروی الکتریکی‌ای که یک الکترون بر الکترون‌های دیگر وارد می‌کند به حساب نیامده است.

۲) این مدل نمی‌تواند متفاوت بودن شدت خط‌های طیف گسیلی را توضیح دهد. برای مثال چرا شدت خط قرمز با شدت خط آبی در طیف گسیلی گاز هیدروژن اتمی با یکدیگر متفاوت است.

با توجه به متن درس‌باکس، مدل اتمی بور در موارد «پ» و «ت» ناموفق بود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

درس‌Box



نوری با طول موج 155 nm به سطح فلزی که تابع کار آن $6/2 \text{ eV}$ است، می‌تابد. بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده از فلز، چند متر بر ثانیه است؟ ($hc = 1/24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}$ ، $m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

$$8 \times 10^6 \quad (2)$$

$$4\sqrt{2} \times 10^6 \quad (1)$$

$$8 \times 10^5 \quad (4)$$

$$4\sqrt{2} \times 10^5 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

اثر فوتوالکترونیک:

درس Box

وقتی نوری با بسامد مناسب مانند نور فرابنفش، به سطحی از فلز بتابد، الکترون‌هایی از آن گسیل می‌شوند. این پدیده فیزیکی را اثر فوتوالکترونیک و الکترون‌های جدا شده از سطح فلز را فوتوالکترون می‌نامند.



معادله فوتوالکترونیک:

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0$$

$$K_{\max} = \text{بیشینه انرژی فوتوالکترون‌های گسیل شده (eV)}$$

$$hc \text{ (حاصل ضرب ثابت پلانک در تندی نور در خلأ)} \approx 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

$$\lambda = \text{طول موج نور تابشی (nm)}$$

$$W_0 = \text{تابع کار فلز (eV)}$$

رابطه بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها:

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2$$

$$K_{\max} = \text{بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها (J)}$$

$$m = \text{جرم هر الکترون} \approx 9 \times 10^{-31} \text{ Kg}$$

$$v_{\max} = \text{بیشینه تندی هر الکترون (m/s)}$$

گام اول: حاصل ضرب hc را که بر حسب $\text{eV} \cdot \mu\text{m}$ داده شده است، بر حسب $\text{eV} \cdot \text{nm}$ به دست می‌آوریم:

$$hc = 1/24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m} \times \frac{1 \text{ nm}}{10^{-3} \mu\text{m}} = 1240 \text{ eV} \cdot \text{nm}$$

گام دوم: بیشینه انرژی جنبشی فوتوالکترون‌ها را توسط معادله فوتوالکترونیک، محاسبه می‌کنیم:

$$K_{\max} = \frac{hc}{\lambda} - W_0 = \frac{1240}{155} - 6/2 = 8 - 3 = 5 \text{ eV}$$

گام سوم: به کمک رابطه انرژی جنبشی، بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده از فلز را به دست می‌آوریم. برای این منظور،

باید انرژی بر حسب ژول باشد:

$$K_{\max} = 5 \text{ eV} \times \frac{1/6 \times 10^{-19} \text{ J}}{1 \text{ eV}} = 2/88 \times 10^{-19} \text{ J}$$

$$K_{\max} = \frac{1}{2} m v_{\max}^2 \Rightarrow 2/88 \times 10^{-19} = \frac{1}{2} \times 9 \times 10^{-31} \times v_{\max}^2$$

$$\Rightarrow v_{\max}^2 = \frac{5/76}{9} \times 10^{12} = 64 \times 10^{10} \Rightarrow v_{\max} = 8 \times 10^5 \text{ m/s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نوری با طول موج 310 nm به سطح فلزی که تابع کار آن $2/5 \text{ eV}$ است، می‌تابد. بیشینه تندی فوتوالکترون‌های خارج شده از فلز، تقریباً چند متر بر ثانیه است؟ ($hc = 1/24 \text{ eV} \cdot \mu\text{m}$ ، $m_e = 9 \times 10^{-31} \text{ kg}$ و $e = 1/6 \times 10^{-19} \text{ C}$)

(سؤال ۱۷۶ کنکور ریاضی ۱۳۰۱ - کنکور مهتر)

$$5/6 \times 10^6 \quad (2)$$

$$7/3 \times 10^6 \quad (1)$$

$$5/6 \times 10^5 \quad (4)$$

$$7/3 \times 10^5 \quad (3)$$

کنکور



کدام یک از موارد زیر نادرست است؟

- (۱) نیروی هسته‌ای، کوتاه‌برد است و تنها در فاصله‌های کوچک‌تر از ابعاد هسته اثر می‌کند.
- (۲) نیروی ربایشی هسته‌ای یکسانی بین دو پروتون، دو نوترون، یا یک پروتون و یک نوترون وجود دارد.
- (۳) یک پروتون یا یک نوترون، فقط نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاور خود را با نیروی هسته‌ای جذب می‌کند.
- (۴) در هسته‌های پایدار، نیروی دافعه الکتروستاتیکی بین پروتون‌ها با نیروی جاذبه گرانشی بین نوکلئون‌ها، موازنه می‌شود.

پاسخ: گزینه ۴

نیروی هسته‌ای:

نوعی نیروی جاذبه که بر رانش الکتریکی بین پروتون‌های هسته غلبه کرده و نوکلئون‌ها را کنار هم نگه می‌دارد، نیروی هسته‌ای نام دارد. نیروی هسته‌ای دو ویژگی مهم دارد:

- (۱) کوتاه‌برد است، یعنی تنها در فاصله‌های کوچک‌تر از ابعاد هسته، اثر می‌کند.
- (۲) مستقل از بار الکتریکی است، یعنی نیروی ربایش بین دو پروتون، دو نوترون، یا یک پروتون و یک نوترون، یکسان است.

پایداری هسته‌ها:

نیروی رانش الکتریکی بلندبرد است؛ بنابراین یک پروتون به تمام پروتون‌های دیگر موجود در هسته، نیروی رانش الکتریکی وارد می‌کند. در حالی که نیروی ربایش هسته‌ای کوتاه‌برد است، یعنی هر نوکلئون فقط نزدیک‌ترین نوکلئون‌های مجاور خود را با نیروی هسته‌ای جذب می‌کند.

نیروی دافعه الکتریکی بین دو پروتون در هسته از مرتبه 10^1 است، در حالی که نیروی ربایش گرانشی بین آن دو از مرتبه 10^{-35} است.

با توجه به متن درس باکس، گزینه‌های (۱)، (۲) و (۳) درست هستند، اما گزینه (۴) نادرست است؛ زیرا نیروی جاذبه گرانشی بین نوکلئون‌ها بسیار ضعیف است و نمی‌تواند با نیروی رانش الکتریکی (دافعه الکتروستاتیکی) موازنه شود.

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



کدام موارد زیر درست است؟

- الف) جرم هسته از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی بیشتر است.
 ب) انرژی نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند انرژی الکترون‌های وابسته به اتم، کوانتیده‌اند.
 پ) در همه ایزوتوپ‌های پایدار سبک، تعداد نوترون‌ها از تعداد پروتون‌ها بیشتر است.
 ت) هر چه کاستی جرم هسته ایزوتوپی بیشتر باشد، انرژی بستگی هسته‌ای آن نیز بیشتر است.

(۲) «الف» و «ت»

(۱) «الف» و «پ»

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

پاسخ: گزینه ۴

کاستی جرم هسته:

درجس Box

اندازه‌گیری‌های دقیق نشان می‌دهند که جرم هسته، از مجموع جرم پروتون‌ها و نوترون‌های تشکیل‌دهنده‌اش اندکی کم‌تر است. این اختلاف جرم را کاستی جرم هسته می‌گویند.

● نوکلئون‌های وابسته به هسته نیز مانند الکترون‌های وابسته به اتم، انرژی کوانتیده دارند، یعنی نوکلئون‌های درون هسته نمی‌توانند هر انرژی دلخواهی را اختیار کنند.

● در هسته‌های سنگین که تعداد پروتون بیشتری نسبت به هسته‌های سبک دارند، نیروی رانش الکتریکی قوی‌تر می‌شود؛ بنابراین برای آن‌که هسته پایدار بماند، باید تعداد نوترون‌ها نسبت به پروتون‌ها افزایش بیشتری داشته باشند تا به افزایش نیروی هسته‌ای کمک کنند، بدون آن‌که اثری روی دافعه الکتریکی داشته باشند، اما در هسته‌های سبک چنین نیست؛ مثلاً اتم هیدروژن معمولی اصلاً نوترون ندارد و یا اتم پایدار هلیوم که دو پروتون و دو نوترون دارد.

● انرژی بستگی هسته‌ای از رابطه اینشتین $E = mc^2$ به دست می‌آید و با کاستی جرم هسته متناسب است.

m = کاستی جرم هسته (kg)

c = تندی نور در خلأ $= 3 \times 10^8$ m/s

E = انرژی بستگی هسته‌ای (J)

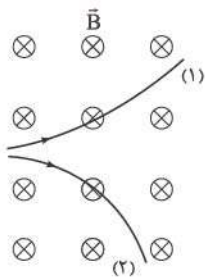
با توجه به متن درس‌بکس، موارد «ب» و «ت» درست هستند، اما موارد «الف» و «پ» نادرست هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۵۰

مسیر حرکت دو ذره حاصل از پرتوایی طبیعی، در میدان مغناطیسی یکنواختی به شکل زیر است. مسیرهای (۱) و (۲)، به ترتیب از راست به چپ، مربوط به کدام ذره‌ها می‌توانند باشند؟



(۱) آلفا، الکترون

(۲) پوزیترون، الکترون

(۳) الکترون، آلفا

(۴) آلفا، پوزیترون

پاسخ: گزینه ۱

درس Box

(۱) پرتوهای آلفا، ذرات باردار مثبت از جنس هسته اتم هلیم هستند و از دو پروتون و دو نوترون تشکیل شده‌اند. (${}^4_2\alpha = {}^4_2\text{He}$)
 (۲) پوزیترون ذره‌ای است که جرم یکسان با الکترون دارد، ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است.

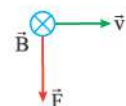
نیروی مغناطیسی وارد بر ذره باردار متحرک در میدان مغناطیسی

اگر ذره باردار q با سرعت \vec{v} در میدان مغناطیسی \vec{B} حرکت کند (به شرط آن که جهت حرکت آن با میدان مغناطیسی موازی نباشد) بر آن نیرویی وارد خواهد شد که بر راستای سرعت و میدان مغناطیسی عمود است. این نیرو را نیروی مغناطیسی می‌نامند و جهت آن، به کمک قاعده دست راست تعیین می‌شود.

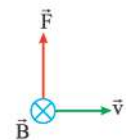
قاعده دست راست: اگر دست راست خود را طوری نگه داریم که انگشتان باز شده ما در جهت \vec{v} باشد، به گونه‌ای که وقتی آن‌ها را روی زاویه کوچک‌تری که \vec{v} با \vec{B} می‌سازد و در جهت چرخش طبیعی انگشتان خم کنیم در جهت \vec{B} قرار گیرد، انگشت شست ما در جهت نیروی وارد بر ذره باردار مثبت خواهد بود. توجه کنید که نیروی وارد بر بار منفی، در خلاف جهت نیروی وارد بر بار مثبت است. به عبارت دیگر طی همین مراحل، اما با دست چپ تعیین می‌گردد.



انحراف ذره (۲) به گونه‌ای است که جهت نیروی وارد بر آن با قاعده دست چپ منطبق است؛ بنابراین بار ذره (۲) منفی و از جنس الکترون است. (رد گزینه‌های (۳) و (۴)).



اما انحراف ذره (۱) به گونه‌ای است که جهت نیروی وارد بر آن با قاعده دست راست منطبق است. یعنی بار ذره (۱) مثبت بوده و آلفا یا پوزیترون است، اما چون نسبت به ذره (۲) انحراف کم‌تری دارد، یعنی نسبت به الکترون و پوزیترون جرم بیشتری دارد و باید ذره آلفا باشد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

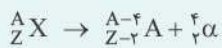
عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ»، به ترتیب از راست به چپ، دربارهٔ کدام نوع واپاشی است؟
 الف) در این واپاشی یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود.
 ب) این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست.
 پ) یکی از کاربردهای گستردهٔ این واپاشی، در آشکارسازهای دود است.

(۲) بتای منفی، بتا، آلفا
 (۴) بتای مثبت، بتا، آلفا

(۱) بتای منفی، آلفا، گاما
 (۳) بتای مثبت، آلفا، گاما

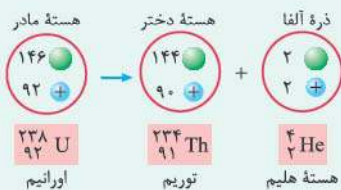
پاسخ: گزینهٔ ۴

واپاشی آلفا:



در این رابطه X، هستهٔ مادر و Y، هستهٔ دختر نامیده می‌شوند.

مثال واپاشی آلفا، برای اورانیم ${}^{238}_{92} \text{U}$ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:



ذره‌های آلفا:

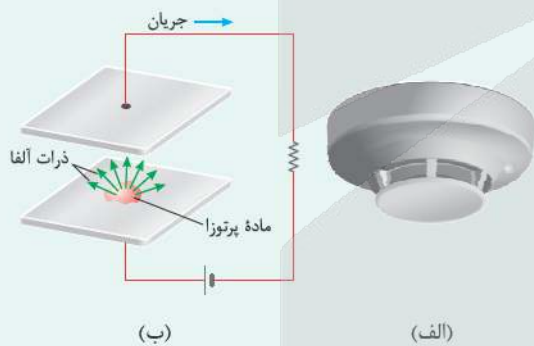
(۱) سنگین‌اند.

(۲) بار مثبت دارند.

(۳) برد کوتاه دارند. یعنی پس از طی مسافت کوتاهی در هوا و یا لایه‌ای نازک از مواد، جذب می‌شوند.

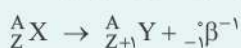
(۴) اگر وارد بدن شوند، باعث آسیب شدید به بافت‌های بدن می‌شوند.

یکی از کاربردهای واپاشی آلفا، در آشکارسازهای دود است. وجود ذرات دود میان صفحه‌ها، جریان را کاهش می‌دهد؛ زیرا یون‌هایی که به ذرات دود برخورد می‌کنند معمولاً خنثی می‌شوند. افت جریان که ذرات دود باعث آن می‌شود هشداردهنده را به کار می‌اندازد.

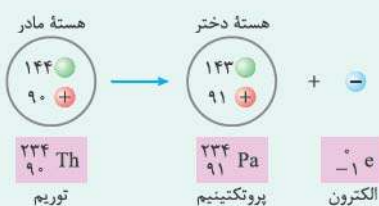


واپاشی بتا (β): این واپاشی، متداول‌ترین نوع واپاشی در هسته‌هاست و ذرات گسیل‌شده در آن را ذرات بتا می‌نامند:
 الف) واپاشی بتا، همراه با گسیل الکترون (${}^0_{-1}\beta^-$ یا ${}^0_{-1}e^-$):

الکترون گسیل‌شده در این واپاشی، در هستهٔ مادر وجود ندارد و هم‌چنین یکی از الکترون‌های مدار اتم نیست؛ این الکترون وقتی به وجود می‌آید که نوترونی درون هسته، به پروتون و الکترون تبدیل شود. فرایند این واپاشی را با رابطهٔ زیر بیان می‌کنند:



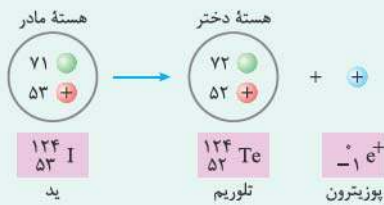
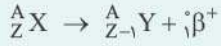
مثال واپاشی ${}^0_{-1}\beta^-$ برای توریم ${}^{234}_{90} \text{Th}$ که به طور طبیعی رخ می‌دهد:





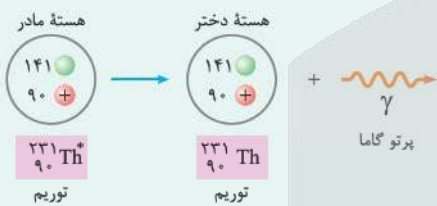
ب) واپاشی بتا، همراه با گسیل پوزیترون (${}^0_1\beta^+$ یا ${}^0_1e^+$):

در این نوع واپاشی بتا، ذره گسیل شده توسط هسته، جرم یکسان با الکترون دارد، ولی به جای بار منفی، حامل بار مثبت است. به این الکترون مثبت، پوزیترون می‌گویند. در واقع آنچه در این واپاشی رخ می‌دهد این است که یکی از پروتون‌های درون هسته به یک نوترون و یک پوزیترون تبدیل می‌شود؛ سپس این پوزیترون از هسته گسیل می‌شود. فرایند این واپاشی، با رابطه زیر بیان می‌شود:



واپاشی گاما (γ):

اغلب هسته‌ها پس از واپاشی آلفا یا بتا، در حالت برانگیخته قرار می‌گیرند و با گسیل فوتون‌های پرا انرژی (پرتو گاما) به حالت پایه می‌رسند. در این فرایند Z و A تغییر نمی‌کنند؛ بلکه هسته برانگیخته که با علامت * مشخص شده است، با گسیل پرتو گاما به حالت پایه می‌رسد. واپاشی γ با رابطه زیر بیان می‌شود:



با توجه به متن درس‌باکس، گزینه (۴) درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۲

به ترتیب در کدام واپاشی، عدد اتمی هستهٔ مادر تغییر نمی‌کند و در کدام واپاشی عدد اتمی هستهٔ مادر افزایش می‌یابد؟

(۲) گاما - بتای منفی

(۱) گاما - بتای مثبت

(۴) بتای منفی - آلفا

(۳) بتای مثبت - آلفا

پاسخ: گزینهٔ ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در واپاشی گاما عدد اتمی هستهٔ مادر تغییر نمی‌کند، اما در سایر واپاشی‌ها این عدد تغییر می‌کند.

$${}^A_Z X^* \rightarrow {}^A_Z X + \gamma$$

در واپاشی بتای منفی، وقتی هستهٔ مادر به هستهٔ دختر تبدیل می‌شود، عدد اتمی آن یک واحد افزایش می‌یابد. در سایر واپاشی‌ها،

این عدد یا افزایش می‌یابد و یا ثابت می‌ماند.

$${}^A_Z X \rightarrow {}^A_{Z+1} Y + {}^0_{-1} \beta^-$$

(سؤال ۳۱ کنکور ریاضی ۱۴۰۳ - نوبت اول)

در کدام واپاشی، عدد جرمی تغییر می‌کند؟

(۲) آلفا

(۱) گاما

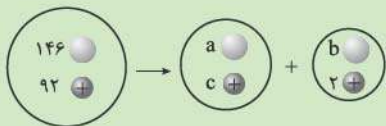
(۴) بتای مثبت

(۳) بتای منفی

کنکور

۵۳

شکل زیر، واپاشی آلفا برای اورانیوم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در این شکل a و b به ترتیب از راست به چپ، کدام‌اند؟



- (۱) ۲، ۱۴۲
(۲) ۲، ۱۴۴
(۳) ۴، ۱۴۲
(۴) ۴، ۱۴۴

پاسخ: گزینه ۲

درس Box

در تمام فرایندهای واپاشی پرتوزا، تعداد نوکلئون‌ها در طی فرایند واپاشی هسته‌ای پایسته است؛ یعنی تعداد نوکلئون‌ها پیش از فرایند، با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند، مساوی است. بار الکتریکی نیز در طی فرایند واپاشی هسته‌ای ثابت می‌ماند؛ یعنی عدد اتمی هسته مادر، برابر است با عدد اتمی هسته دختر به علاوه عددهای اتمی ذرات گسیل‌شده.

گام اول: با توجه به رابطه واپاشی آلفا داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$${}^A_Z X \rightarrow {}^{A-4}_{Z-2} Y + {}^4_2 \alpha$$

$$A = Z + N \xrightarrow{\frac{A-4}{Z-2}} b = N = 2$$

بنابراین با توجه به شکل داده‌شده در سؤال، $b = 2$ است.

گام دوم: تعداد نوکلئون‌ها، پیش از فرایند را با تعداد نوکلئون‌ها پس از فرایند مساوی قرار می‌دهیم و از آنجا a را به دست می‌آوریم:

$$146 = a + b \xrightarrow{b=2} 146 = a + 2 \Rightarrow a = 144$$

بنابراین گزینه (۲) درست است.

شکل زیر، واپاشی آلفا، برای اورانیوم ۲۳۸ را نشان می‌دهد. در شکل زیر به جای الف و b عددی مناسب قرار دهید.

(سؤال ۲۰ - امتحان نهایی شهرریور تهرین ۱۳۰۳)


 امتحان
نهایی



سرب ${}_{82}^A\text{Pb}$ ، هسته دختر پایداری است که می‌تواند حاصل از واپاشی α هسته X یا واپاشی β^- هسته Y باشد. اختلاف تعداد نوترون‌های دو هسته X و Y کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

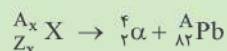
پاسخ: گزینه ۱

درس‌نویس Box

عدد جرمی (A): مجموع تعداد کل پروتون‌ها و نوترون‌ها، که همان تعداد نوکلئون‌ها می‌باشد را عدد جرمی می‌گوییم.

$$\underbrace{A}_{\text{تعداد پروتون‌ها و نوترون‌ها (عدد جرمی)}} = \underbrace{Z}_{\text{تعداد پروتون‌ها (عدد اتمی)}} + \underbrace{N}_{\text{تعداد نوترون‌ها (عدد نوترونی)}}$$

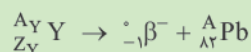
گام اول: رابطه واپاشی α هسته X را می‌نویسیم و از آنجا تعداد پروتون‌های هسته X یعنی Z_X و همچنین تعداد نوترون‌های آن یعنی N_X را پیدا می‌کنیم:



$$Z_X = 2 + 82 = 84, A_X = A + 4$$

$$A_X = N_X + Z_X \Rightarrow A + 4 = N_X + 84 \Rightarrow N_X = A - 80$$

گام دوم: رابطه واپاشی β^- هسته Y را می‌نویسیم و از آنجا تعداد پروتون‌های هسته Y یعنی Z_Y و همچنین تعداد نوترون‌های آن یعنی N_Y را مشخص می‌کنیم:



$$Z_Y = -1 + 82 = 81, A_Y = 0 + A \Rightarrow A_Y = A$$

$$A_Y = N_Y + Z_Y \Rightarrow A = N_Y + 81 \Rightarrow N_Y = A - 81$$

گام سوم: اختلاف تعداد نوترون‌های دو هسته X و Y را حساب می‌کنیم:

$$N_X - N_Y = A - 80 - (A - 81) = -80 + 81 = 1$$



سرب ${}_{82}^{207}\text{Pb}$ هسته دختر پایداری است که می‌تواند از واپاشی α یا واپاشی β^- حاصل شود. فرایندهای مربوط به هر یک از این واپاشی‌ها را بنویسید. در هر مورد هسته مادر را به صورت ${}^A_Z X$ مشخص کنید.

(فیزیک (۳) - تمرین ۷ صفحه ۱۵۵ کتاب درسی)



۵۵

در یک واپاشی α ، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هسته پایدار حاصل برابر ۵۴ است. اگر بار الکتریکی هسته مادر $C = 14/72 \times 10^{-18}$ باشد، عدد جرمی هسته مادر کدام است؟ ($e = 1/6 \times 10^{-19} C$)

۲۳۸ (۴)

۲۳۴ (۳)

۲۰۲ (۲)

۱۹۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۴

درین Box

عدد اتمی (Z): تعداد پروتون‌های یک هسته را عدد اتمی می‌نامند و در عنصرهای مختلف، متفاوت است. بار کل هسته $+Ze$ است.

$$q = +Ze$$

$$q = \text{بار الکتریکی (C)}$$

$$Z = \text{عدد اتمی}$$

$$e = \text{(بار بنیادی)} = 1/6 \times 10^{-19} C$$

گام اول: رابطه واپاشی α را برای هسته X می‌نویسیم و با توجه به معلوم بودن بار الکتریکی هسته مادر، تعداد پروتون‌های هسته دختر را پیدا می‌کنیم:

$${}^A_Z X \rightarrow {}^4_2 \alpha + {}^{A_Y}_{Z_Y} Y \Rightarrow \begin{cases} A_Y = A - 4 \\ Z_Y = Z - 2 \end{cases}$$

$$q = Z \times e \Rightarrow Z = \frac{q}{e} = \frac{14/72 \times 10^{-18}}{1/6 \times 10^{-19}} = \frac{147/2}{1/6} = 92$$

گام دوم: با توجه به این‌که در واپاشی α ، ذره‌های سنگین پدید می‌آیند و در ذره‌های سنگین $N_Y > Z_Y$ است، اختلاف تعداد نوترون‌ها و تعداد پروتون‌های هسته Y را برابر با ۵۴ قرار می‌دهیم و A_Y را به دست می‌آوریم:

$$Z_Y = Z - 2 \xrightarrow{Z=92} Z_Y = 92 - 2 = 90$$

$$N_Y - Z_Y = 54 \Rightarrow N_Y - 90 = 54 \Rightarrow N_Y = 144$$

$$A_Y = Z_Y + N_Y = 90 + 144 = 234$$

$$A = A_Y + 4 = 234 + 4 = 238$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۵۶

پس از گذشت ۲۴ روز، ۸۷/۵ درصد از هسته‌های مادر اولیه یک ایزوتوپ پرتوزا، واپاشیده می‌شود. نیمه‌عمر این ایزوتوپ چند روز است؟

۱۲ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

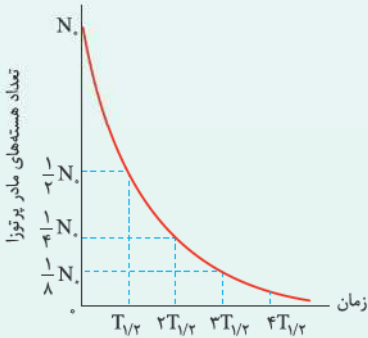
۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

درین Box

نیمه‌عمر:

ایزوتوپ‌های پرتوزا با گذشت زمان واپاشیده می‌شوند، در نتیجه تعداد هسته‌های مادر (هسته‌های اولیه) آن‌ها کاهش می‌یابد و به صفر میل می‌کند. بنا به تعریف، نیمه‌عمر، مدت زمانی است که طول می‌کشد تا تعداد هسته‌های مادر (اولیه) موجود در یک نمونه، به نصف برسند و آن را با نماد $T_{\frac{1}{2}}$ نشان می‌دهیم.



$$N = \frac{N_0}{2^n}$$

N_0 = تعداد هسته‌های اولیه در یک نمونه پرتوزا

N = تعداد هسته‌های پرتوزای باقی مانده

$N_0 - N$ = تعداد هسته‌های واپاشیده شده

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}}$$

n = تعداد تکرار نیمه‌عمر

t = کل زمان واپاشی

گام اول: وقتی ۸۷/۵ درصد از هسته‌های مادر اولیه یک ایزوتوپ پرتوزا، واپاشیده می‌شوند، یعنی ۱۲/۵ درصد یا معادل $\frac{1}{8}$ هسته‌های مادر اولیه، باقی مانده‌اند. بر این اساس، تعداد مراحل واپاشی هسته را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \xrightarrow{N = \frac{1}{8}N_0} \frac{1}{8}N_0 = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow 2^n = 8 \Rightarrow n = 3$$

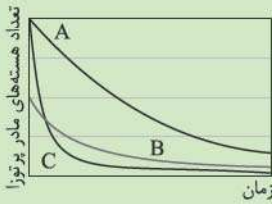
گام دوم: با توجه به معلوم بودن کل زمان واپاشی، می‌توانیم نیمه‌عمر این ایزوتوپ را محاسبه کنیم:

$$n = \frac{t}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow 3 = \frac{24}{T_{\frac{1}{2}}} \Rightarrow T_{\frac{1}{2}} = 8 \text{ روز}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۵۷

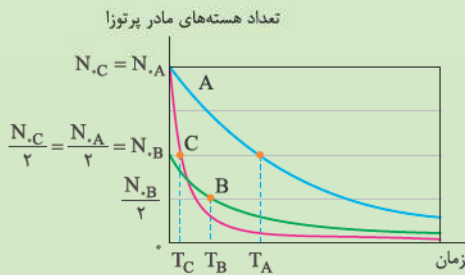
شکل زیر، نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه را بر حسب زمان نشان می‌دهد. در کدام گزینه، این سه نمونه از راست به چپ به ترتیب افزایش نیمه‌عمر مرتب شده‌اند؟



- ۱) C, B, A
 ۲) B, C, A
 ۳) A, C, B
 ۴) A, B, C

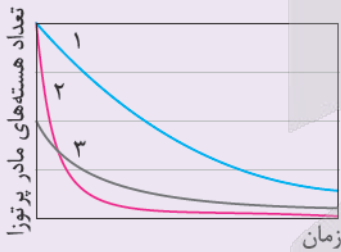
پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓ برای سهولت در نوشتن پاسخ، نیمه‌عمر نمونه‌های A، B و C را به ترتیب با T_A ، T_B ، T_C نشان می‌دهیم، با توجه به نمودار داده‌شده، زمان نصف‌شدن تعداد هسته‌های اولیه را برای هر نمونه روی شکل مشخص می‌کنیم.



با توجه به نمودار فوق معلوم می‌شود که $T_C < T_B < T_A$ یعنی نیمه‌عمر نمونه‌ها از C تا A افزایش می‌یابند.

شکل زیر نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه را بر حسب زمان نشان می‌دهد. نیمه‌عمر این سه نمونه را با هم مقایسه کنید.



(فیزیک (۳) - تمرین ۹ صفحه ۱۵۵ کتاب درسی)

 کتاب
 درسی



۵۸

تعداد هسته‌های اولیه نمونه پرتوزای A، ۴ برابر تعداد هسته‌های اولیه نمونه پرتوزای B است. بعد از گذشت مدتی معین، تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونه B، ۸ برابر تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده از نمونه A می‌شود. اگر در این مدت، تعداد نیمه‌عمرهای سپری شده برای دو نمونه A و B به ترتیب n_A و n_B باشد، $n_A - n_B$ برابر کدام است؟

۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴) ۵ (۵)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

رابطه تعداد هسته‌های فعال باقی‌مانده را برای هر دو نمونه A و B می‌نویسیم و آن‌ها را بر هم تقسیم می‌کنیم.

$$N = \frac{N_0}{2^n}$$

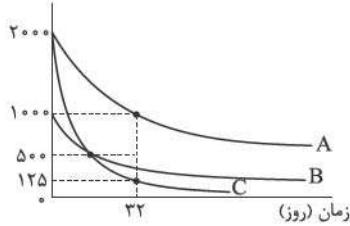
$$\frac{N_B}{N_A} = \frac{\frac{N_{0B}}{2^{n_B}}}{\frac{N_{0A}}{2^{n_A}}} \xrightarrow{\frac{N_{0A} = 4N_{0B}}{N_B = 8N_A}} \lambda = \frac{\frac{N_{0B}}{2^{n_B}}}{\frac{4N_{0B}}{2^{n_A}}} \Rightarrow \lambda = \frac{2^{n_A}}{4 \times 2^{n_B}}$$

$$\Rightarrow 32 = \frac{2^{n_A}}{2^{n_B}} \Rightarrow 2^5 = 2^{(n_A - n_B)} \Rightarrow n_A - n_B = 5$$



نمودار تغییرات تعداد هسته‌های مادر پرتوزای سه نمونه A، B و C بر حسب زمان، به شکل زیر است. پس از چند روز، ۱۲۶ g از یک نمونه اولیه ۱۲۸ گرمی از ماده B، واپاشیده می‌شود؟

تعداد هسته‌های مادر پرتوزا



- (۱) ۱۶
- (۲) ۴۸
- (۳) ۶۴
- (۴) ۹۶

پاسخ: گزینه ۴

درس‌Box

با کاهش تعداد هسته‌های پرتوزا، جرم آن‌ها نیز به همین نسبت کاهش می‌یابد، پس به طور مشابه می‌توان نوشت:

$$m = \frac{m_0}{2^n}$$

- m_0 = جرم ماده پرتوزای اولیه
- m = جرم ماده پرتوزای باقی‌مانده
- $m_0 - m$ = جرم واپاشیده‌شده

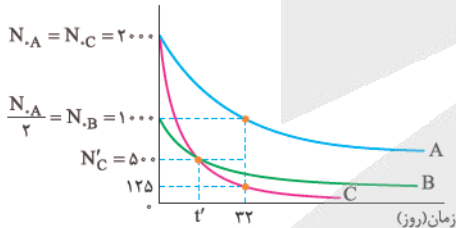
در این جا برای سهولت، نیمه‌عمر را با نماد T نشان می‌دهیم.

گام اول: نیمه‌عمر نمونه C را به دست می‌آوریم:

$$N = \frac{N_0}{2^n} \Rightarrow N_C = \frac{N_{0C}}{2^{n_C}} \Rightarrow 125 = \frac{2000}{2^{n_C}} \Rightarrow 2^{n_C} = 16 \Rightarrow n_C = 4$$

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow n_C = \frac{t}{T_C} \Rightarrow 4 = \frac{32}{T_C} \Rightarrow T_C = 8 \text{ روز}$$

تعداد هسته‌های مادر پرتوزا



گام دوم: تعداد مراحل واپاشی نمونه C را تا زمان t' محاسبه می‌کنیم:

$$N'_C = \frac{N_{0C}}{2^{n'_C}} \Rightarrow 500 = \frac{2000}{2^{n'_C}} \Rightarrow 2^{n'_C} = 4 \Rightarrow n'_C = 2$$

سپس نیمه‌عمر نمونه B را نیز حساب می‌کنیم:

$$n'_C = \frac{t'}{T_C} \Rightarrow 2 = \frac{t'}{8} \Rightarrow t' = 16 \text{ روز}$$

بنابراین با توجه به شکل داریم:

$$t' = T_B = 16 \text{ روز}$$

گام سوم: با معلوم بودن جرم اولیه و جرم واپاشیده‌شده نمونه B می‌توان نوشت:

$$m_B = 128 - 126 = 2 \text{ g}$$

$$m_B = \frac{m_{0B}}{2^{n_B}} \Rightarrow 2 = \frac{128}{2^{n_B}} \Rightarrow 2^{n_B} = 64 \Rightarrow n_B = 6$$

در پایان، زمان واپاشی نمونه B را بعد از ۶ مرحله واپاشی به دست می‌آوریم:

$$n_B = \frac{t_B}{T_B} \Rightarrow 6 = \frac{t_B}{16} \Rightarrow t_B = 96 \text{ روز}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۶۰

کدام یک از عبارتهای زیر، درست است؟

- الف) در فرایند شکافت اورانیوم ^{235}U ، ترکیبهای متفاوتی از هستههای کوچکتر، همراه با تعدادی نوترون تند به وجود می‌آید.
- ب) در واکنش گداخت هسته‌ای، برخلاف واکنش شکافت هسته‌ای، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است.
- پ) غنی‌سازی، فرایند تبدیل اورانیوم ^{238}U به اورانیوم ^{235}U در یک نمونه از سنگ معدن اورانیوم است.
- ت) آب معمولی، آب سنگین و گرافیت از جمله موادی هستند که به عنوان کندساز نوترون‌ها در واکنشهای شکافت هسته‌ای استفاده می‌شوند.

(۲) «الف» و «ت»

(۱) «الف» و «پ»

(۴) «ب» و «ت»

(۳) «ب» و «پ»

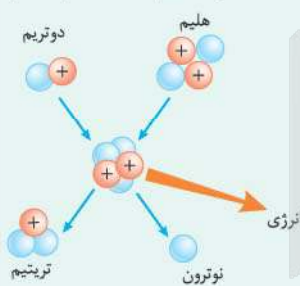
پاسخ: گزینه ۲

کوتاه‌نویس Box

شکافت هسته‌ای: فرایند تقسیم‌شدن یک هسته سنگین به دو هسته با جرم کم‌تر، شکافت هسته‌ای نامیده می‌شود. در فرایند شکافت اورانیوم، ترکیبهای متفاوتی از هستههای کوچکتر همراه با تعدادی نوترون (بین ۲ تا ۵) به وجود می‌آید.

گداخت (هم‌جوشی) هسته‌ای:

در فرایند گداخت هسته‌ای، دو هسته سبک با یکدیگر ترکیب می‌شوند و هسته سنگین‌تری را به وجود می‌آورند. برای مثال، با هم‌جوشی هسته‌های دوتریم و تریتم، هسته هلیوم و یک نوترون پرنانرژی تولید می‌شود.



در واکنش گداخت هسته‌ای نیز همچون شکافت هسته‌ای، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است. در این‌جا نیز این اختلاف جرم، با توجه به رابطه $E = mc^2$ سبب آزاد شدن مقدار زیادی انرژی می‌شود.

ماده کندساز: نوترون‌های آزاد شده در فرایند شکافت، سرعت زیادی دارند. تجربه نشان می‌دهد که این نوترون‌های تند، با احتمال بسیار بیشتری جذب ایزوتوپ ^{238}U می‌شوند؛ بدون آن‌که باعث شکافت آن‌ها شوند. اگر بتوان به نحوی این نوترون‌ها را کند ساخت؛ احتمال جذب آن‌ها توسط ایزوتوپ ^{235}U افزایش می‌یابد و با شکافت‌های پی‌درپی، واکنش زنجیری شکل می‌گیرد.

موادی مانند آب معمولی (H_2O)، آب سنگین (D_2O) و گرافیت (اتم‌های کربن)، به عنوان کندساز نوترون‌ها در واکنش‌های هسته‌ای به کار می‌روند.

غنی‌سازی اورانیوم:

برای آن‌که بتوانیم از اورانیوم به عنوان سوخت در نیروگاه‌های هسته‌ای یا انفجارهای هسته‌ای استفاده کنیم و واکنش زنجیری را ممکن سازیم، باید فراوانی ایزوتوپ ^{235}U در یک نمونه اورانیوم را افزایش دهیم. به این فرایند افزایش درصد یا غلظت اورانیوم ^{235}U در یک نمونه، غنی‌سازی اورانیوم گفته می‌شود.

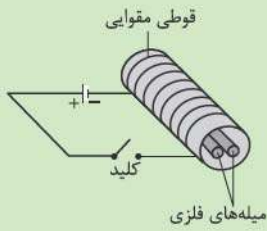
با توجه به متن درس باکس، عبارتهای «الف» و «ت» درست هستند. اکنون علت نادرستی عبارتهای «ب» و «پ» را بررسی می‌کنیم.

ب) این‌که در واکنش گداخت، مجموع جرم محصولات فرایند، کم‌تر از مجموع جرم هسته‌های اولیه است، مشابه واکنش شکافت هسته‌ای است نه برخلاف آن.

پ) در فرایند غنی‌سازی، اورانیوم ^{238}U به اورانیوم ^{235}U تبدیل نمی‌شود؛ بلکه درصد یا غلظت اورانیوم ^{235}U در یک نمونه افزایش می‌یابد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو میله فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیملوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیملوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه بازمی‌گردند. میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند؟



- (۱) پارامغناطیسی
- (۲) دیامغناطیسی
- (۳) فرومغناطیسی نرم
- (۴) فرومغناطیسی سخت

پاسخ: گزینه ۳

کافی است که ویژگی‌های مغناطیسی مواد را دقیق به خاطر سپرده باشید.



درس‌Box

مواد فرومغناطیس، مواد مغناطیسی‌ای هستند که اتم‌ها و مولکول‌های آن‌ها ذاتاً دوقطبی مغناطیسی‌اند و به دو دسته مواد فرومغناطیسی نرم و سخت تقسیم‌بندی می‌شوند.

حوزه‌های مواد فرومغناطیسی نرم در حضور میدان مغناطیسی خارجی به راحتی با جهت میدان هم‌جهت می‌شوند و بعد از حذف آن به حالت قبل برمی‌گردند.

حوزه‌های مواد فرومغناطیسی سخت در حضور میدان خارجی به سختی با آن هم‌جهت می‌شوند و بعد از حذف آن تا مدتی به همان شکل باقی می‌مانند.

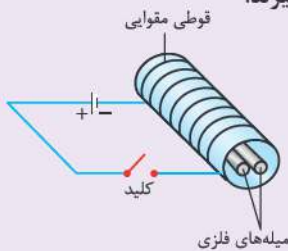
چون میدان سیملوله قوی نیست و میله‌ها به راحتی با بستن کلید و عبور جریان، خاصیت مغناطیسی پیدا کرده‌اند و قطب‌های همنامشان یکدیگر را دفع کرده‌اند و پس از بازکردن کلید، میله‌ها خاصیت مغناطیسی خود را از دست داده و به محل اولیه خود بازگشته‌اند، در نتیجه میله‌ها از جنس مواد فرومغناطیسی نرم هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

دو میله فلزی بلند مطابق شکل زیر درون سیملوله‌ای که دور یک قوطی مقوایی پیچیده شده است، قرار دارند. با بستن کلید و عبور جریان از این سیملوله، مشاهده می‌شود که دو میله از یکدیگر دور می‌شوند. وقتی کلید باز و جریان در مدار قطع می‌شود، میله‌ها به محل اولیه بازمی‌گردند.

الف) چرا با عبور جریان از پیچ، میله‌ها از یکدیگر دور می‌شوند؟

ب) با دلیل توضیح دهید میله‌های فلزی از نظر مغناطیسی در کدام دسته قرار می‌گیرند.



(فیزیک (۲) - پرسش ۹۳ صفحه ۳۴ کتاب درسی)

درس‌کتاب

در شکل زیر، حلقهٔ رسانای حامل جریانی در صفحه قرار دارد. اگر میدان مغناطیسی حاصل از این حلقه در نقطهٔ M عمود بر صفحه و به سمت داخل صفحه باشد، چه تعداد از موارد زیر الزاماً درست است؟
الف) میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، عمود بر صفحه و به سمت بیرون صفحه است.
ب) اندازهٔ میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، از اندازهٔ میدان مغناطیسی در نقطهٔ M کوچک‌تر است.
پ) جریان عبوری از حلقه ساعتگرد است.



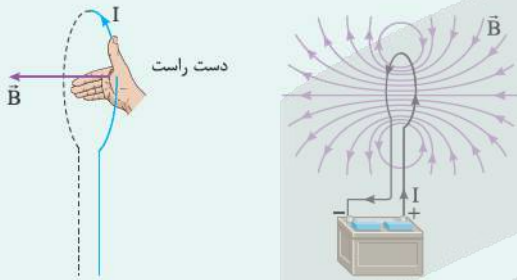
- ۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴) صفر

پاسخ: گزینهٔ ۱

درین Box

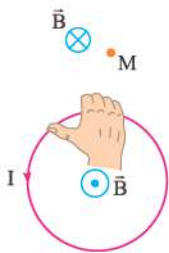
میدان مغناطیسی ناشی از یک حلقهٔ دایره‌ای حامل جریان:

مطابق شکل، در اطراف یک حلقهٔ رسانای دایره‌ای شکل حامل جریان، میدان مغناطیسی ایجاد می‌شود. همان‌طور که می‌بینید، خط‌های میدان مغناطیسی در ناحیهٔ داخل حلقه به یکدیگر نزدیک‌ترند؛ یعنی میدان در این ناحیه قوی‌تر است. افزون بر این، در نقطه‌های روی محور حلقه، میدان موازی محور است. جهت خط‌های میدان مغناطیسی حلقه را می‌توان با قاعدهٔ دست راست مطابق شکل زیر نشان داد.



جهت جریان در حلقه را به کمک جهت میدان در نقطهٔ M طبق قاعدهٔ دست راست مشخص می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



همان‌طور که در شکل مشخص است جهت جریان در حلقه، پادساعتگرد و جهت میدان مغناطیسی در مرکز حلقه، بیرون سو است. در حلقهٔ حامل جریان، خطوط میدان مغناطیسی در ناحیهٔ داخل حلقه به یکدیگر نزدیک‌ترند که یعنی میدان مغناطیسی داخل حلقه، قوی‌تر است.
با توجه به مطالب بیان‌شده، فقط عبارت «الف» درست است.



در شکل زیر، سیملوله آرمانی به طول ۱۵ cm دارای ۳۰ حلقه سیم نزدیک به هم است. اگر جریان $I = ۸۰۰ \text{ mA}$ از سیملوله بگذرد، میدان مغناطیسی در نقطه‌ای درون سیملوله و دور از لبه‌های آن چند گاوس و در چه جهتی است؟
 $(\mu_0 = ۱۲/۵ \times ۱۰^{-۷} \text{ T.m/A})$



- ، ۲ (۱)
- ← ، ۲ (۲)
- ، ۲۰ (۳)
- ← ، ۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

داده‌ها را در رابطه $B = \frac{\mu_0 NI}{L}$ جای گذاری کنید تا B به دست آید.

Hint

درس Box

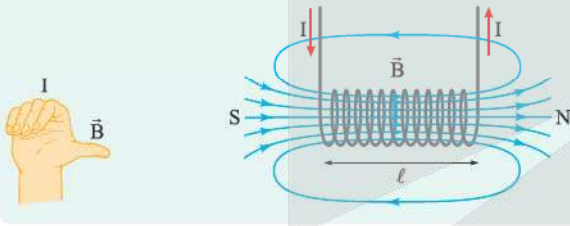
اندازه میدان مغناطیسی در درون سیملوله و دور از لبه‌ها، از رابطه زیر به دست می‌آید:

تعداد دورهای سیملوله N ضرب تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m/A) μ_0 \rightarrow ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m/A)

جریان الکتریکی (A) I \rightarrow طول سیملوله (m) L \rightarrow $B = \frac{\mu_0 NI}{L}$ \rightarrow میدان مغناطیسی (T)

تعیین جهت میدان مغناطیسی در داخل سیملوله:

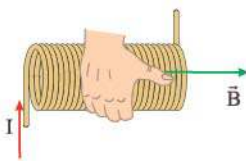
به کمک قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی در فضای داخل سیملوله و دور از لبه‌ها مشخص می‌شود. به این صورت که اگر چهار انگشت دست راست را در جهت جریان قرار دهیم، انگشت شست جهت میدان درون سیملوله را نشان می‌دهد.



گام اول: داده‌ها را در رابطه میدان مغناطیسی سیملوله، جای گذاری می‌کنیم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{L} \rightarrow B = \frac{12/5 \times 10^{-7} \times 30 \times 800 \times 10^{-3}}{15 \times 10^{-2}} = 2 \times 10^{-4} \text{ T} \times \frac{10^4 \text{ G}}{1 \text{ T}} = 2 \text{ G}$$

گام دوم: به کمک قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی را در درون سیملوله و دور از لبه‌ها مشخص می‌کنیم:

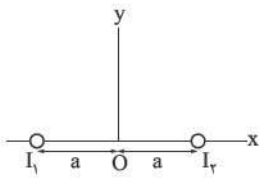


پاسخ خیلی تشریحی

به تبدیل یگاها دقت کن و گزینه در دام گزینه‌های (۳) و (۴) می‌افتی.

گول نخوری

در شکل زیر، دو سیم حامل جریان الکتریکی هم‌اندازه I_1 و I_2 ، عمود بر صفحه قرار دارند. اگر میدان مغناطیسی خالص در هر نقطه دلخواه بر روی قسمت مثبت محور y ، در جهت محور x باشد، I_1 در چه جهتی است و نوع نیروی مغناطیسی‌ای که دو سیم به یکدیگر وارد می‌کنند، کدام است؟



- (۱) \otimes ، رایشی
- (۲) \otimes ، رانشی
- (۳) \odot ، رایشی
- (۴) \odot ، رانشی

پاسخ: گزینه ۱

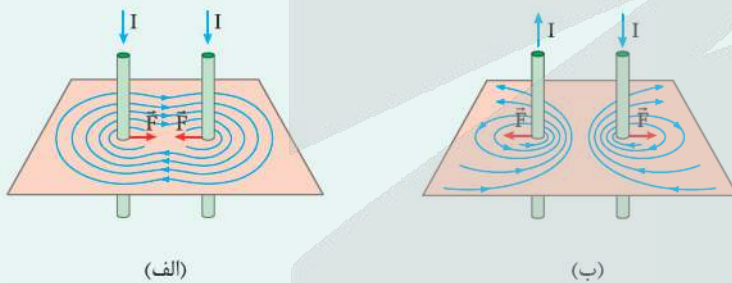
درس Box



(۱) یک سیم حامل جریان الکتریکی در اطراف خود میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند که جهت این میدان به کمک قاعده دست راست مشخص می‌شود. به این صورت که اگر انگشت شست را در جهت جریان قرار دهیم، جهت خم شدن انگشتان دست راست، جهت میدان مغناطیسی اطراف سیم را نشان می‌دهد.

(۲) بزرگی میدان مغناطیسی اطراف سیم راست با فاصله از آن سیم، رابطه عکس و با جریان الکتریکی، رابطه مستقیم دارد.

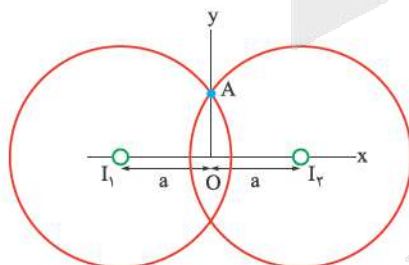
(۳) دو یا چند سیم حامل جریان به واسطه میدان مغناطیسی که اطراف خود ایجاد می‌کنند به هم نیرو وارد می‌کنند؛ به طوری که اگر جریان‌ها در یک جهت از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها رایشی (جاذبه) است و اگر جریان‌ها در دو جهت مخالف از دو سیم موازی بگذرند، نیروی بین آن‌ها رانشی (دافعه) است.



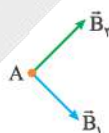
(الف)

(ب)

از آنجایی که فاصله هر نقطه دلخواه روی محور y ، از هر دو سیم I_1 و I_2 یکسان است و جریان الکتریکی هم‌اندازه از هر دو سیم عبور می‌کند، پس میدان مغناطیسی سیم‌ها یعنی B_1 و B_2 هم‌اندازه‌اند. مطابق شکل (الف)، برای این که در نقطه دلخواه A ، میدان مغناطیسی خالص در جهت محور x باشد، باید میدان‌های مغناطیسی B_1 و B_2 مطابق شکل (ب) باشند.



(الف)



(ب)

به کمک قاعده دست راست و با توجه به شکل (ب)، متوجه می‌شویم که جریان‌های I_1 و I_2 درون سو (\otimes) هستند. از طرفی، با توجه به این که جهت جریان‌ها یکسو است، نیروی مغناطیسی بین دو سیم، رایشی است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۶۵

با استفاده از سیم بلندی با طول معین، در حالت اول پیچۀ مسطحی به شعاع R و در حالت دوم پیچۀ مسطحی به شعاع $2R$ درست می‌کنیم. اگر در هر دو حالت جریان الکتریکی یکسانی از دو پیچۀ عبور کند، اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ در حالت اول، چند برابر اندازه میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ در حالت دوم است؟

- ۴ (۱) ۲ (۲) ۲ (۳) ۱/۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

Hint

ابتدا تعداد حلقه‌های هر پیچۀ را برحسب طول سیم و شعاع پیچۀ بنویسید و سپس رابطه میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ $(B = \frac{\mu_0 NI}{2R})$ را به صورت نسبتی بنویسید.

درسیں Box

اندازه میدان مغناطیسی در مرکز یک پیچۀ حامل جریان I به شعاع R از رابطه زیر به دست می‌آید:

تعداد دورهای پیچۀ ضرب تراوایی مغناطیسی $(T.m / A)$
 $B = \frac{\mu_0 NI}{2R}$ ← میدان مغناطیسی (T) ← شعاع پیچۀ (m)
 ← جریان الکتریکی (A) ← شعاع پیچۀ (m)

رابطه طول سیمی که پیچۀ را با آن ساخته‌ایم با تعداد حلقه‌های پیچۀ به صورت زیر است:

طول سیم (m) → $N = \frac{L}{2\pi R}$ ← تعداد حلقه‌های پیچۀ
 شعاع حلقه (m) → $N = \frac{L}{2\pi R}$

گام اول: تعداد حلقه‌های هر کدام از پیچہ‌ها را برحسب شعاع و طول سیم می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$N = \frac{L}{2\pi R} \Rightarrow \begin{cases} N_1 = \frac{L}{2\pi R} \\ N_2 = \frac{L}{2\pi(2R)} \end{cases} \Rightarrow \frac{N_1}{N_2} = 2$$

گام دوم: رابطه میدان مغناطیسی در مرکز پیچۀ را به صورت نسبتی می‌نویسیم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{2R} \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = \frac{N_1}{N_2} \times \frac{I_1}{I_2} \times \frac{R_2}{R_1} \Rightarrow \frac{B_1}{B_2} = 2 \times 1 \times \frac{2R}{R} = 4$$



۶۶

زاویه بین خطوط میدان مغناطیسی یکنواختی با سطح یک حلقه برابر 53° است. این زاویه چند درجه و چگونه تغییر کند تا شار مغناطیسی عبوری از حلقه ۲۵ درصد کاهش یابد؟ $(\cos 53^\circ = 0/6)$

- (۱) ۱۶، کاهش یابد. (۲) ۳۷، کاهش یابد. (۳) ۱۶، افزایش یابد. (۴) ۳۷، افزایش یابد.

پاسخ: گزینه ۱

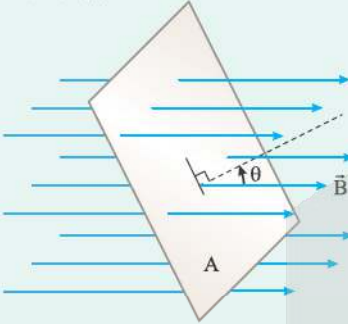
Hint

در گام اول، زاویه نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با میدان مغناطیسی را به دست آورید و سپس با توجه به داده سؤال یعنی $\Phi_2 = 0/75\Phi_1$ زاویه نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با میدان مغناطیسی را در حالت دوم محاسبه کنید و سپس زاویه بین خطوط میدان مغناطیسی را با سطح حلقه در این حالت به دست آورید و تغییرات آن را محاسبه کنید.

درس Box

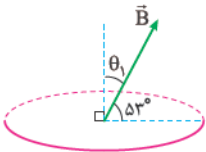
شار مغناطیسی، کمیتی نرده‌ای است و برای میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} که از پیکه‌ای با مساحت معین A می‌گذرد به صورت زیر تعریف می‌شود:

میدان مغناطیسی یکنواخت (T)
 $\Phi = BA \cos \theta$ → زاویه بین نیم‌خط عمود به سطح پیکه و میدان مغناطیسی
 مساحت پیکه (m^2)



گام اول: برای محاسبه شار مغناطیسی، ما به زاویه نیم‌خط عمود بر سطح حلقه با میدان مغناطیسی نیاز داریم. مطابق شکل زیر، θ_1 برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$\theta'_1 = 53^\circ$
 $\theta_1 = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

طبق صورت سؤال داریم:

$\Phi_2 = \Phi_1 - \frac{25}{100}\Phi_1 = \frac{75}{100}\Phi_1 \Rightarrow \Phi_2 = 0/75\Phi_1 \Rightarrow BA \cos \theta_2 = \frac{3}{4}(BA \cos \theta_1) \Rightarrow \cos \theta_2 = \frac{3}{4} \times \cos 37^\circ$
 $\xrightarrow{\cos 37^\circ = 0/8} \cos \theta_2 = 0/6 \Rightarrow \theta_2 = 53^\circ$

$\theta'_2 = 90^\circ - \theta_2 = 90^\circ - 53^\circ = 37^\circ$

در حالت دوم خطوط میدان با سطح حلقه زاویه 37° می‌سازد، یعنی $\theta'_2 = 37^\circ$.

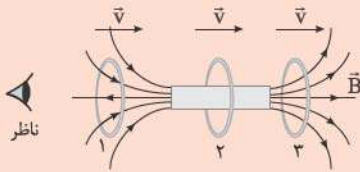
$\Delta\theta' = \theta'_2 - \theta'_1 = 37^\circ - 53^\circ = -16^\circ$

گام دوم: خواسته سؤال را محاسبه می‌کنیم:

آنکه درخت نکتی که خواسته سؤال تغییرات زاویه خطوط میدان با سطح حلقه است و $\Delta\theta$ رو محاسبه کنی، توی داگزینه (۳) می‌افتی.

گول نخوری ✗

حلقهٔ رسانایی به طرف یک آهنربای میله‌ای حرکت می‌کند. شکل زیر، حلقه را در سه وضعیت نسبت به آهنربا نشان می‌دهد. اگر جریان القا شده در حلقه در وضعیت‌های (۱)، (۲) و (۳) به ترتیب I_1 ، I_2 و I_3 باشد، از دید ناظر مشخص شده در شکل، کدام درست است؟



- (۱) I_1 ، I_2 و I_3 هر سه ساعتگردند.
- (۲) I_1 ، I_2 و I_3 هر سه پادساعتگردند.
- (۳) I_1 ساعتگرد، I_2 پادساعتگرد و I_3 برابر صفر است.
- (۴) I_3 ساعتگرد، I_1 پادساعتگرد و I_2 برابر صفر است.

پاسخ: گزینهٔ ۴

درس Box

قانون لنز بیان می‌کند که وقتی شار مغناطیسی تغییر می‌کند، جریان در جهتی در حلقه القا می‌شود که میدان مغناطیسی ناشی از آن، با تغییر شار مخالفت می‌کند؛ یعنی:

• وقتی شار مغناطیسی افزایش می‌یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی در خلاف جهت هم هستند:

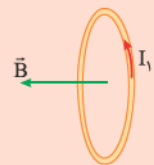


• وقتی شار مغناطیسی کاهش می‌یابد، میدان مغناطیسی اصلی و القایی هم جهت هستند:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

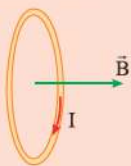
وضعیت حلقه‌ها را تک به تک بررسی می‌کنیم:



وضعیت (۱): حلقه در حال نزدیک شدن به آهنربا است، پس میدان مغناطیسی آهنربا در حلقه در حال افزایش است، در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از حلقه نیز در حال افزایش است، بنابراین طبق قانون لنز، باید جهت میدان مغناطیسی القایی در خلاف جهت میدان مغناطیسی آهنربا یعنی به سمت چپ باشد. به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در حلقه را مشخص می‌کنیم. پس جریان القایی I_1 از دید ناظر، پادساعتگرد است.

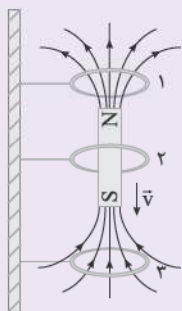
وضعیت (۲): در این حالت میدان مغناطیسی عبوری از حلقه افقی و بدون تغییر است، پس جریان القایی $I_2 = 0$ است. همین‌جا گزینهٔ درست مشخص شد، ولی ما وضعیت (۳) را هم بررسی می‌کنیم.

وضعیت (۳): حلقه در حال دور شدن از آهنربا است، پس میدان مغناطیسی عبوری از حلقه در حال کاهش است، در نتیجه شار مغناطیسی عبوری از حلقه نیز در حال کاهش است، بنابراین طبق قانون لنز، باید جهت میدان مغناطیسی القایی حلقه در جهت میدان مغناطیسی آهنربا و به سمت راست باشد تا با کاهش شار مخالفت کند. به کمک قاعدهٔ دست راست، جهت جریان القایی در حلقه را مشخص می‌کنیم.



پس جریان القایی I_3 از دید ناظر ساعتگرد است.

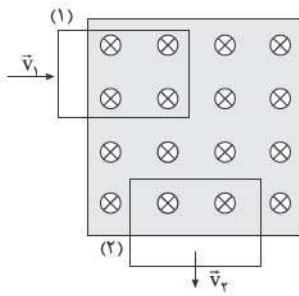
در شکل زیر، آهنربایی از بالا رها شده تا در راستای قائم از درون حلقه‌های رسانا بگذرد. در لحظهٔ نشان داده شده، از نگاه بالا، جهت جریان القایی در حلقه‌های ۱، ۲ و ۳ به ترتیب چگونه است؟ (سؤال ۶۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم)



- (۱) هر سه ساعتگرد
- (۲) هر سه پادساعتگرد
- (۳) ساعتگرد، صفر و پادساعتگرد
- (۴) پادساعتگرد، صفر و ساعتگرد



در شکل زیر، قاب مستطیل شکل رسانایی در حالت (۱)، در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت عمود بر صفحه و در حالت (۲)، در حال خروج از آن است. اگر تندی قاب در دو حالت یکسان باشد، کدام یک از موارد زیر درست است؟



- الف) جریان القا شده در قاب در حالت (۱) ساعتگرد است.
 ب) جریان القا شده در قاب در حالت (۲) ساعتگرد است.
 پ) اندازه جریان القا شده در قاب در حالت (۲) بیشتر از حالت (۱) است.
 ت) اندازه جریان القا شده در قاب در دو حالت، یکسان است.

- ۱) الف و پ
 ۲) الف و ت
 ۳) ب و پ
 ۴) ب و ت

پاسخ: گزینه ۳

طبق قانون القای الکترومغناطیسی فاراده، با تغییر شار مغناطیسی عبوری از پیچه، نیروی محرکه‌ای در حلقه القا می‌شود که اندازه آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$|\varepsilon_{av}| = N \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} |\varepsilon_{av}| = |NAB(\frac{\cos\theta_2 - \cos\theta_1}{\Delta t})| \\ |\varepsilon_{av}| = |NA \cos\theta(\frac{\Delta B}{\Delta t})| \\ |\varepsilon_{av}| = |NB \cos\theta(\frac{\Delta A}{\Delta t})| \end{cases}$$

اگر مقاومت پیچه یا سیملوله برابر با R باشد، جریان القایی متوسط در آن از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$$

گام اول: قاب (۱) در حال ورود به میدان مغناطیسی یکنواخت است که باعث افزایش شار عبوری از آن می‌شود، در نتیجه طبق قانون لنز، جهت میدان القایی باید در خلاف جهت میدان اصلی یعنی برون سو (\odot) باشد. طبق قاعده دست راست، جهت جریان پادساعتگرد است.

قاب (۲) در حال خروج از میدان مغناطیسی یکنواخت است که باعث کاهش شار عبوری از آن می‌شود، بنابراین طبق قانون لنز، جهت میدان القایی باید هم‌جهت میدان اصلی یعنی درون سو (\otimes) باشد. طبق قاعده دست راست جهت جریان ساعتگرد است. تا این جا مورد «الف» نادرست و مورد «ب» درست است. (رد گزینه‌های (۱) و (۲))

گام دوم: جریان القایی در قاب طبق رابطه $I_{av} = \frac{-N \Delta\Phi}{R \Delta t}$ به دست می‌آید. تغییرات شار، ناشی از تغییرات مساحت است، یعنی:

$$\Delta\Phi = B \cos\theta(\Delta A)$$

مطابق شکل سؤال، مشخص است که در بازه زمانی یکسان، تغییر مساحت قاب (۲) بیشتر از تغییر مساحت قاب (۱) است، در نتیجه:

$$I_{av,2} > I_{av,1}$$

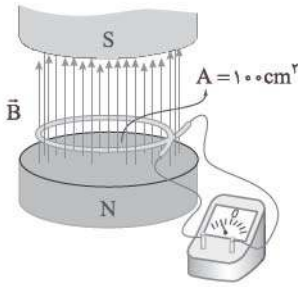
درسی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۶۹

در شکل زیر، میدان مغناطیسی بین قطب‌های یک آهنربای الکتریکی که بر سطح حلقه عمود است، با زمان تغییر می‌کند و در مدتی معین از 3 T رو به بالا به 2 T رو به پایین می‌رسد. اگر مقاومت الکتریکی حلقه 20Ω باشد، در این مدت بار شارش یافته در حلقه چند میلی‌کولن است؟



۰/۰۵ (۱)

۰/۲۵ (۲)

۰/۵ (۳)

۲/۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

Hint

از ترکیب روابط $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ و $I = \left| \frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right|$ و جای‌گذاری $\Delta \Phi = (A \cos \theta) \Delta B$ در رابطه نهایی، بار شارش یافته در حلقه را محاسبه کنید.

با ترکیب دو رابطه $I = \frac{\Delta q}{\Delta t}$ و $I = \left| \frac{N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right|$ داریم:

$$\Delta q = \left| \frac{N}{R} \Delta \Phi \right| \xrightarrow{\Phi = BA \cos \theta} \Delta q = \left| \frac{N}{R} A \cos \theta \Delta B \right| = \left| \frac{1}{20} \times 100 \times 10^{-4} \times 1 \times (-0/2 - 0/3) \right|$$

$$\Rightarrow \Delta q = 0/25 \times 10^{-3} \text{ C} = 0/25 \text{ mC}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓

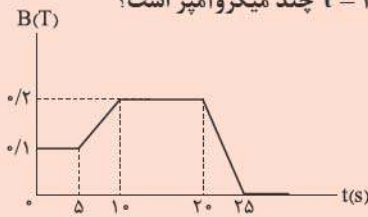
آه تغییر جهت میدان مغناطیسی رو در نظر نگیری، توی داگزینه‌های (۱) یا (۳) می‌افتی.

گول نخوری ✗



۷۰

یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع ۳ cm و مقاومت الکتریکی 0.1Ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد به طوری که خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t = 9 \text{ s}$ تا $t = 24 \text{ s}$ چند میکروآمپر است؟



- (۱) ۷۲
- (۲) ۸۴
- (۳) ۷۲۰
- (۴) ۸۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۲

ابتدا به کمک شیب نمودار، میدان مغناطیسی را در لحظات $t_1 = 9 \text{ s}$ و $t_2 = 24 \text{ s}$ به دست آورید و سپس داده‌ها را در رابطه $I_{av} = \frac{-N \Delta \Phi}{R \Delta t}$ جای گذاری کنید.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

برای محاسبهٔ جریان القایی متوسط، به اندازهٔ میدان مغناطیسی در لحظات $t_1 = 9 \text{ s}$ و $t_2 = 24 \text{ s}$ نیاز داریم، پس:

شیب نمودار در بازهٔ زمانی $t = 5 \text{ s}$ تا $t' = 10 \text{ s}$ ثابت است:

$$\frac{B_{10} - B_5}{10 - 5} = \frac{B_9 - B_5}{9 - 5} \Rightarrow \frac{0.2 - 0.1}{5} = \frac{B_9 - 0.1}{4} \Rightarrow B_9 = 0.18 \text{ T}$$

شیب نمودار در بازهٔ زمانی $t = 20 \text{ s}$ تا $t' = 25 \text{ s}$ ثابت است:

$$\frac{B_{25} - B_{20}}{25 - 20} = \frac{B_{24} - B_{20}}{24 - 20} \Rightarrow \frac{0 - 0.2}{5} = \frac{B_{24} - 0.2}{4} \Rightarrow B_{24} = 0.04 \text{ T}$$

جریان القایی متوسط را به کمک رابطه‌های $\varepsilon_{av} = -N \frac{\Delta \Phi}{\Delta t}$ و $I_{av} = \frac{\varepsilon_{av}}{R}$ به دست می آوریم:

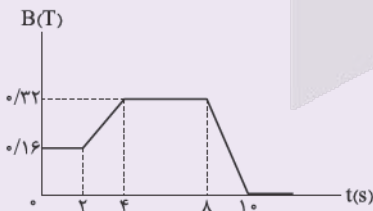
$$I_{av} = \left| \frac{-N \Delta \Phi}{R \Delta t} \right| \xrightarrow{\Phi = BA \cos \theta} I_{av} = \left| \frac{-NA \cos \theta}{R} \times \frac{\Delta B}{\Delta t} \right|$$

$$\frac{A = (0.03)^2 = 9 \times 10^{-4} \text{ m}^2, \cos \theta = 1}{R = 0.1 \Omega, \Delta B = B_{24} - B_9 = -0.14 \text{ T}} \rightarrow I_{av} = \left| \frac{-9 \times 10^{-4} \times 1}{0.1} \times \frac{(-0.14)}{24 - 9} \right| = 0.184 \times 10^{-4} \text{ A} \times \frac{1 \mu\text{A}}{10^{-6} \text{ A}}$$

$$\Rightarrow I_{av} = 184 \mu\text{A}$$

یک حلقهٔ رسانای مربع شکل به ضلع ۲ cm و مقاومت الکتریکی 0.1Ω در یک میدان مغناطیسی یکنواخت قرار دارد. خطوط میدان مغناطیسی عمود بر صفحهٔ حلقه است. میدان مغناطیسی مطابق نمودار زیر با زمان تغییر می کند. جریان القایی متوسط در حلقه در بازهٔ زمانی $t = 2 \text{ s}$ تا $t = 10 \text{ s}$ چند میلی آمپر است؟

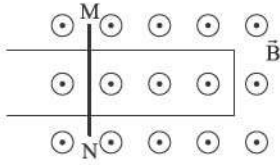
(سوال ۷۱ کنکور تهرمی ۱۳۰۴ - نوبت اول)



- (۱) صفر
- (۲) ۰/۰۴
- (۳) ۰/۰۶
- (۴) ۰/۰۸



شکل زیر، رسانای U شکلی را درون میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} به اندازه 18 T نشان می‌دهد. میدان \vec{B} عمود بر صفحه شکل و رو به بیرون است. میله فلزی MN بین دو بازوی رسانا قرار دارد و مداری را تشکیل می‌دهد. میله با تندی ثابت روی دو بازوی رسانا حرکت می‌کند. اگر نیروی محرکه القاشده در مدار برابر 9 mV و جهت جریان القاشده در میله از M به N باشد، به ترتیب آهنگ تغییر مساحت مدار در SI و جهت حرکت میله کدام است؟

(۱) $0/05$ ، راست(۲) $0/05$ ، چپ(۳) $0/5$ ، راست(۴) $0/5$ ، چپ

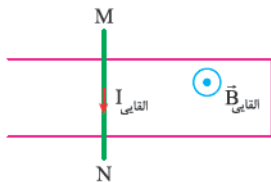
پاسخ: گزینه ۱



Hint

ابتدا به کمک جهت جریان القایی در میله MN و طبق قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی القایی را مشخص کنید، سپس به کمک قانون لنز، تغییرات شار مغناطیسی و تغییرات مساحت را مشخص کنید و در آخر به کمک رابطه $|\varepsilon_{av}| = |NB \cos \theta (\frac{\Delta A}{\Delta t})|$ آهنگ تغییر مساحت را محاسبه کنید.

گام اول: با توجه به این که جهت جریان القایی در میله از M به N است، یعنی جریان در حلقه پادساعتگرد است، به کمک قاعده دست راست، جهت میدان مغناطیسی القایی را مشخص می‌کنیم:



گام دوم: میدان مغناطیسی یکنواخت \vec{B} و میدان مغناطیسی القایی هم‌جهت هستند؛ در نتیجه طبق قانون لنز، شار مغناطیسی در حال کاهش است، پس مساحت مدار در حال کاهش است، یعنی میله MN به سمت راست حرکت می‌کند.

گام سوم: به کمک رابطه $|\varepsilon_{av}| = |NB \cos \theta (\frac{\Delta A}{\Delta t})|$ ، آهنگ تغییر مساحت مدار را محاسبه می‌کنیم:

$$|\varepsilon_{av}| = |NB \cos \theta (\frac{\Delta A}{\Delta t})| \Rightarrow 9 \times 10^{-3} = 18 \times 0.5 \times \cos 0 \times \frac{\Delta A}{\Delta t}$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta A}{\Delta t} = 0.05 \text{ m}^2 / \text{s}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



طول سیملوله حامل جریانی برابر 50 cm و سطح مقطع آن برابر 10 cm^2 است. اگر اندازه میدان مغناطیسی حاصل از سیملوله در نقطه‌ای روی محور آن برابر 30 G باشد، انرژی ذخیره شده در آن چند میلی ژول است؟

$$(\mu_0 = 12/5 \times 10^{-7} \text{ T.m/A})$$

$$3/6 \quad (2)$$

$$36 \quad (1)$$

$$1/8 \quad (4)$$

$$18 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

از ترکیب روابط $U = \frac{1}{2} LI^2$ ، $L = \frac{\mu_0 AN^2}{\ell}$ و $B = \frac{\mu_0 NI}{\ell}$ به رابطه $U = \frac{1}{2} \times \frac{AB^2 \ell}{\mu_0}$ برسید و داده‌ها را جای گذاری کنید تا خواسته سؤال محاسبه شود.



Hint



کرتس Box

انرژی القاگر (J)

(۱) انرژی ذخیره شده در القاگر (سیملوله) از رابطه زیر محاسبه می شود:

$$U = \frac{1}{2} LI^2 \rightarrow (A) \text{ جریانی}$$

ضریب القاوری (H)

ویژگی‌های فیزیکی هر القاگر (سیملوله) توسط ضریب القاوری آن تعیین می شود. ضریب القاوری به عواملی هم چون تعداد دور، طول و سطح مقطع القاگر و جنس هسته‌ای که داخل آن قرار می گیرد بستگی دارد. در یک القاگر آرمانی و بدون هسته، ضریب القاوری از رابطه زیر به دست می آید:

سطح مقطع حلقه‌ها (m^2)

$$L = \mu_0 \frac{AN^2}{\ell}$$

↑ تعداد حلقه‌ها AN^2
↓ طول سیملوله (m)

ضریب تراوایی مغناطیسی خلأ (T.m/A)گام اول: از ترکیب روابط $U = \frac{1}{2} LI^2$ و $L = \frac{\mu_0 AN^2}{\ell}$ داریم:

$$U = \frac{1}{2} \left(\frac{\mu_0 AN^2}{\ell} \right) I^2 \quad (1)$$

گام دوم: از رابطه میدان مغناطیسی سیملوله داریم:

$$B = \frac{\mu_0 NI}{\ell} \Rightarrow I = \frac{B\ell}{\mu_0 N} \quad (2)$$

گام سوم: رابطه (۲) را در رابطه (۱) جای گذاری کرده و خواسته سؤال را محاسبه می کنیم:

$$U = \frac{1}{2} \times \left(\frac{\mu_0 AN^2}{\ell} \right) \left(\frac{B\ell}{\mu_0 N} \right)^2 = \frac{1}{2} \times \frac{AB^2 \ell}{\mu_0} = \frac{1}{2} \times \frac{10 \times 10^{-4} \times 30 \times 30 \times 10^{-8} \times 0.05}{12/5 \times 10^{-7}}$$

$$\Rightarrow U = 1/8 \times 10^{-3} \text{ J} \times \frac{1 \text{ mJ}}{10^{-3} \text{ J}} = 1/8 \text{ mJ}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



معادله جریان الکتریکی عبوری از یک القاگر با ضریب القاوری 40 mH بر حسب زمان در SI به صورت $I = 5 \sin(100 \pi t)$ است. انرژی ذخیره شده در القاگر در لحظه $t = 7/5 \text{ ms}$ چند ژول است؟

$$0/25 \quad (2)$$

$$0/1 \quad (1)$$

$$2/5 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

کافی است جریان را در لحظه $t = 7/5 \text{ ms}$ به دست آورید و داده‌ها را در رابطه $U = \frac{1}{2} LI^2$ جای گذاری کنید.



Hint

گام اول: جریان عبوری از القاگر را در لحظه $t = 7/5 \text{ ms}$ محاسبه می‌کنیم:

$$I = 5 \sin(100 \pi t) = 5 \sin(100 \pi \times 7/5 \times 10^{-3}) = 5 \sin\left(\frac{3\pi}{4}\right) = \frac{5\sqrt{2}}{2} \text{ A}$$

گام دوم: انرژی ذخیره شده در القاگر را به دست می‌آوریم:

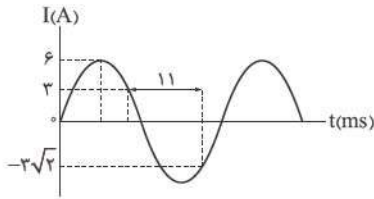
$$U = \frac{1}{2} LI^2 = \frac{1}{2} \times 40 \times 10^{-3} \left(\frac{5\sqrt{2}}{2}\right)^2 = 0/25 \text{ J}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۷۴

نمودار جریان متناوب سینوسی حاصل از یک مولد جریان متناوب بر حسب زمان به شکل زیر است. اندازه جریان الکتریکی عبوری از این مولد در لحظه $t = 16 \text{ ms}$ چند آمپر است؟

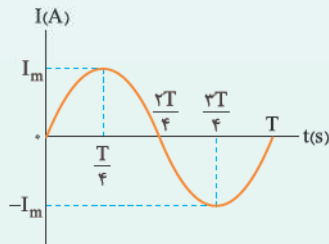


- ۳ (۱)
- $3\sqrt{2}$ (۲)
- $3\sqrt{3}$ (۳)
- ۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

درین Box

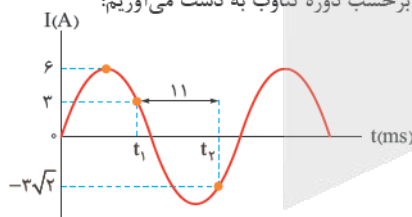
جریان متناوب، جریانی است که اندازه و علامت آن به صورت تابع سینوسی با زمان تغییر می‌کند که نمودار و معادله جریان بر حسب زمان به صورت زیر است:



$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right)$$

↓ جریان بیشینه (A)
 ↓ دوره تناوب (s)

گام اول: با جای گذاری جریان در معادله جریان متناوب، لحظات t_1 و t_2 را بر حسب دوره تناوب به دست می‌آوریم:



$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow 3 = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_1\right) = \frac{1}{2}$$

طبق نمودار، در لحظه t_1 برای دومین بار جریان برابر با ۳ A شده، پس:

$$\frac{2\pi}{T} t_1 = \frac{\pi}{6} \Rightarrow t_1 = \frac{5}{12} T$$

برای محاسبه t_2 بر حسب T داریم:

$$I = I_m \sin\left(\frac{2\pi}{T} t\right) \Rightarrow -3\sqrt{2} = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_2\right) \Rightarrow \sin\left(\frac{2\pi}{T} t_2\right) = \frac{-\sqrt{2}}{2}$$

طبق نمودار، در لحظه t_2 برای دومین بار جریان برابر با $-3\sqrt{2}$ A شده، پس:

$$\frac{2\pi}{T} t_2 = \frac{7\pi}{4} \Rightarrow t_2 = \frac{7}{8} T$$

گام دوم: طبق نمودار $11 \text{ ms} = t_2 - t_1$ است؛ بنابراین:

$$t_2 - t_1 = \frac{7}{8} T - \frac{5}{12} T = 11 \Rightarrow T\left(\frac{11}{24}\right) = 11 \Rightarrow T = 24 \text{ ms}$$

گام سوم: معادله جریان متناوب را بر حسب داده‌ها می‌نویسیم و $t = 16 \text{ ms}$ را جای گذاری می‌کنیم:

$$I = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{24} t\right) = 6 \sin\left(\frac{2\pi}{24} \times 16\right) = 6 \sin\left(\frac{4}{3}\pi\right) = 6 \times \left(\frac{-\sqrt{3}}{2}\right) = -3\sqrt{3} \text{ A}$$

$$\Rightarrow |I| = 3\sqrt{3} \text{ A}$$

توجه چون یکای $t = 16 \text{ ms}$ و $T = 24 \text{ ms}$ یکسان بود، نیازی به تبدیل واحد وجود نداشت.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۷۵

تعداد دورهای اولیه و ثانویه یک مبدل به ترتیب برابر ۷۵۰ و ۱۵ است. اگر دو سر پیچۀ اولیه آن به ولتاژ ۱۵۰ V وصل شود، از یک لامپ ۱۵ اهمی که به دو سر پیچۀ ثانویه مبدل متصل شده است، جریان چند آمپری می‌گذرد؟

۵ (۴)

۰/۵ (۳)

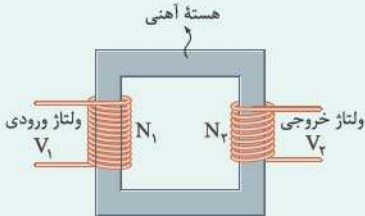
۲ (۲)

۰/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درین Box

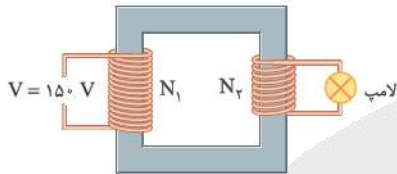
مطابق شکل، مبدل شامل دو پیچه با تعداد دورهای متفاوت است که دور یک هسته آهنی (فرومغناطیسی نرم) پیچیده شده‌اند. برای یک مبدل آرمانی که مقاومت پیچه‌های آن ناچیز است، رابطه زیر برقرار است:



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1}$$

گام اول: مبدل مطابق شکل زیر است؛ ولتاژ دو سر پیچۀ ثانویه (اختلاف پتانسیل دو سر لامپ) را محاسبه می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{N_2}{N_1} \Rightarrow \frac{V_2}{150} = \frac{15}{750} \Rightarrow V_2 = 3V$$

گام دوم: به کمک قانون اهم، جریان عبوری از لامپ ۱۵ اهمی را محاسبه می‌کنیم:

$$R = \frac{V}{I} \Rightarrow I = \frac{V}{R} = \frac{3}{15} = 0.2A$$

درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) اوره و آمونیاک، هر دو از کودهای شیمیایی نیتروژن دار هستند و در مقیاس صنعتی، آمونیاک زودتر از اوره تولید شده است.
- (۲) در نمودار انرژی - پیشرفت واکنش‌های گرماده، انرژی فعال‌سازی واکنش از اختلاف سطح انرژی فرآورده‌ها و سد انرژی بیشتر است.
- (۳) در مبدل کاتالیستی، در سطح سرامیک‌ها که به شکل توری هستند، فلزهای Pt, Pd و Ru نشانده شده است.
- (۴) دلیل رنگ قهوه‌ای هوای آلوده، وجود یکی از اکسیدهای نیتروژن است که عدد اکسایش اتم نیتروژن در آن برابر +۲ است.



پاسخ: گزینه ۱

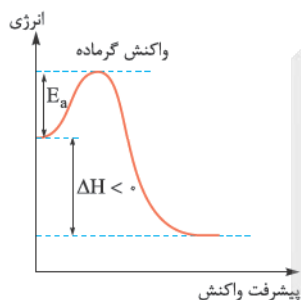
پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): برخلاف سایر گزینه‌ها درست است.

با توجه به ترتیب زمانی تهیه این مواد، آمونیاک زودتر از اوره سنتز شده است.



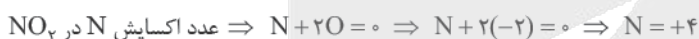
بررسی سایر گزینه‌ها:



گزینه (۲): در نمودار انرژی - پیشرفت واکنش، تفاوت سطح انرژی واکنش دهنده‌ها با قله نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش (رفت) را نشان می‌دهد و تفاوت سطح انرژی فرآورده‌ها با قله نمودار، انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت را نشان می‌دهد. با توجه به نمودار، واضح و مبرهن است که در واکنش گرماده انرژی فعال‌سازی واکنش برگشت بیشتر از واکنش رفت است:

گزینه (۳): مبدل‌های کاتالیستی، توری‌هایی از جنس سرامیک هستند که سطح آن‌ها با فلزهای پلاتین (Pt)، پالادیم (Pd) و رودیم (Rh) پوشانده شده است. این فلزها نقش کاتالیزگر را دارند. به نماد فلزها دقت کنید.

گزینه (۴): رنگ قهوه‌ای هوا به دلیل وجود NO_2 است:





اگر انرژی فعال سازی واکنش های (۱)، (۲) و (۳) در شرایط یکسان به ترتیب برابر a ، $a-x$ و $a+x$ کیلوژول باشد، در صورت تأمین کیلوژول انرژی، انجام می شود. (x عددی مثبت است).

(۱) a ، واکنش های (۱) و (۲) با سرعت برابری

(۲) $a+x$ ، به یقین هر سه واکنش با سرعت بسیار زیاد

(۳) $a-x$ ، فقط واکنش (۲)

(۴) $a-2x$ ، به یقین واکنش (۱)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

مقایسه مقدار انرژی فعال سازی واکنش ها به صورت $(۲) > (۱) > (۳)$ است؛ حالا بریم سراغ بررسی گزینه ها:

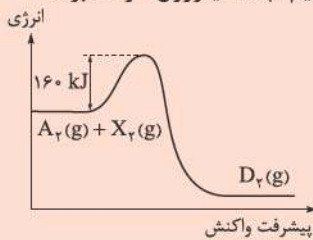
گزینه (۱): با توجه به این که مقدار انرژی فعال سازی واکنش (۱) بیشتر از واکنش (۲) است، با تأمین انرژی فعال سازی واکنش (۱)، انرژی فعال سازی واکنش (۲) هم تأمین خواهد شد و هر دو واکنش انجام می شوند، اما از اون بابتی که انرژی فعال سازی دو واکنش برابر نیست، سرعت انجام آن ها یکسان نخواهد بود.

گزینه (۲): در صورت تأمین انرژی فعال سازی واکنش (۳)، هر سه واکنش انجام می شوند، اما با توجه به این که مقدار عددی انرژی فعال سازی واکنش ها را نداریم، نمی توانیم با قطعیت بگیم سرعتشون زیاده یا کم!

گزینه (۳): مقدار $(a-x)$ ، انرژی فعال سازی واکنش (۲) است که از دو واکنش دیگر هم کم تر می باشد؛ بنابراین با تأمین $(a-x)$ کیلوژول انرژی، فقط واکنش (۲) انجام می شود.

گزینه (۴): برای انجام واکنش (۱) باید حداقل a کیلوژول انرژی تأمین شود.

با توجه به نمودار انرژی - پیشرفت زیر، اگر مجموع آنتالپی پیوندها در A_p ، X_p و D_p بر حسب $\text{kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$ به ترتیب برابر ۱۷۱۹، ۴۳۶ و ۲۳۳۴ باشد، در صورتی که کاتالیزگر واکنش، انرژی فعال سازی را ۴۰ درصد کاهش دهد، فاصله سد انرژی و سطح انرژی فرآورده واکنش در حالتی که از کاتالیزگر استفاده می کنیم، چند کیلوژول خواهد بود؟



۲۳۴ (۱)

۲۴۳ (۲)

۲۵۷ (۳)

۲۷۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به گرماده بودن واکنش، فاصله سد انرژی تا فرآورده از جمع $|\Delta H|$ و E_a به دست می آید، پس قبل از هر کاری لازمه این دو کمیت را محاسبه کنیم:
محاسبه ΔH با استفاده از آنتالپی پیوند:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فرآورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش دهنده‌ها}]$$

$$\Delta H = [A_p + X_p] - [D_p] = [1719 + 436] - [2334] = -179 \text{ kJ}$$

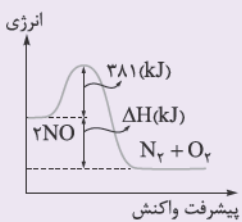
محاسبه E_a جدید:

$$E'_a = E_a - \frac{40}{100} E_a = \frac{60}{100} E_a = 0.6 \times 160 = 96 \text{ kJ}$$

$$\text{فاصله فرآورده تا قله} \Rightarrow E'_a + |\Delta H| = 96 + 179 = 275 \text{ kJ}$$

با توجه به شکل زیر، اگر انرژی پیوندهای $N=O$ ، $N \equiv N$ و $O=O$ به ترتیب برابر ۹۴۴، ۶۰۷ و ۴۹۶ کیلوژول بر مول باشد، جمع جبری ΔH و E_a در واکنش (رفت) نشان داده شده، چند کیلوژول است؟

(سوال ۲۱۹ کنکور ریاضی ۱۳۹۸)



+۱۵۵ (۱)

+۱۸۷ (۲)

+۴۲۱ (۳)

+۶۰۷ (۴)



کاربرد کاتالیزگر در واکنش شیمیایی، موجب چه تعداد از تغییرهای زیر می‌شود؟

- تغییر مسیر انجام واکنش
- افزایش سرعت واکنش
- کاهش سطح انرژی واکنش دهنده‌ها
- افزایش پایداری فرآورده‌ها
- کاهش ΔH (آنتالپی) واکنش
- افزایش مقدار فرآورده‌ها

۶ (۴)

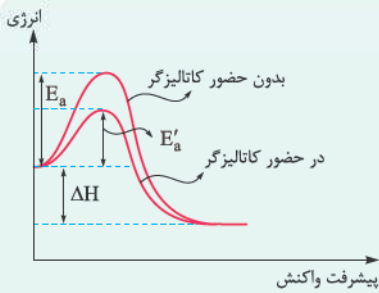
۴ (۳)

۳ (۲)

۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

درکس Box



کاتالیزگر با تغییر مسیر واکنش، انرژی فعال‌سازی را کاهش داده و باعث می‌شود واکنش دهنده‌ها سریع‌تر به فرآورده‌ها تبدیل شوند. *هواستون باشه* که کاتالیزگر، سطح انرژی واکنش دهنده (ها) و فرآورده (ها) و در نتیجه ΔH واکنش را تغییر نمی‌دهد.

کاتالیزگر، این موارد را تغییر نمی‌دهد.	کاتالیزگر، این موارد را افزایش می‌دهد.	کاتالیزگر، این موارد را کاهش می‌دهد.
<ul style="list-style-type: none"> • سطح انرژی واکنش دهنده‌ها و فرآورده‌ها • ΔH واکنش • مقدار نهایی فرآورده 	<ul style="list-style-type: none"> • سرعت واکنش (شیب نمودار غلظت - زمان) • پایداری ذره تشکیل شده در قله نمودار انرژی - پیشرفت واکنش 	<ul style="list-style-type: none"> • انرژی فعال‌سازی واکنش • سطح انرژی ذره تشکیل شده در قله نمودار انرژی - پیشرفت واکنش • زمان انجام واکنش

با توجه به درس یاکس بالا، کاتالیزگر باعث تغییر (۱) مسیر انجام واکنش (۲) سرعت انجام واکنش می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۸۰

با توجه به جدول داده شده، با طی مسافت ۱۰۰ کیلومتر توسط یک خودرو، به تقریب چند گرم کربن دی اکسید از طریق واکنش های انجام شده در مبدل کاتالیستی خودرو وارد هوا می شود؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)

NO	C_8H_{18}	CO		فرمول شیمیایی آلاینده
۱/۰۴	۱/۶۷	۵/۹۹	بدون کاتالیزگر	مقدار گرم آلاینده به ازای طی
۰/۰۴	۰/۰۷	۰/۶۱	با کاتالیزگر	یک کیلومتر مسافت

۷۲۵ (۲)

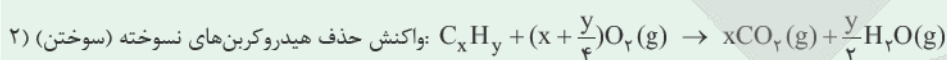
۴۹۴ (۱)

۱۳۳۹ (۴)

۸۶۹ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

کربن دی اکسید وارد شده به هواکره از طریق واکنش های زیر است:



پاسخ خیلی تشریحی ✓

(۱) جرم CO مصرف شده در واکنش (۱) = $5/99 - 0/61 = 5/38 g$

(۲) جرم C_8H_{18} مصرف شده در واکنش (۲) = $1/67 - 0/07 = 1/6 g$



$$100 km CO_2 = 100 km \times \frac{5/38 g CO}{1 km} \times \frac{1 mol CO}{28 g CO} \times \frac{2 mol CO_2}{2 mol CO} \times \frac{44 g CO_2}{1 mol CO_2}$$

$$= 845/4 g CO_2$$



$$100 km CO_2 = 100 km \times \frac{1/6 g C_8H_{18}}{1 km} \times \frac{1 mol C_8H_{18}}{114 g C_8H_{18}} \times \frac{16 mol CO_2}{2 mol C_8H_{18}} \times \frac{44 g CO_2}{1 mol CO_2}$$

$$= 494 g CO_2$$

جرم مجموع $CO_2 = 494 + 845/4 = 1339/4 g$



کدام مورد، جمله داده شده را به درستی تکمیل نمی کند؟

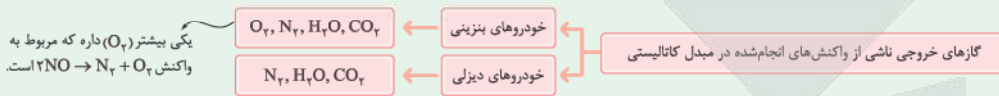
«در مبدل کاتالیستی خودروهای دیزلی،».

- (۱) بین دو محفظه، مخزن آمونیاک وجود داشته و در هر دو محفظه، بخار آب تولید می شود.
- (۲) فرآورده کربن دار واکنش سوختن ناقص سوخت های فسیلی به عنوان واکنش دهنده در محفظه اول مصرف می شود.
- (۳) در محفظه دوم، فرآورده هابر به عنوان واکنش دهنده و یکی از واکنش دهنده های فرایند هابر، به عنوان فرآورده می باشد.
- (۴) همانند خودروهای بنزینی، ۳ نوع ماده در واکنش های شیمیایی مربوط به حذف آلاینده ها تولید می شود.

پاسخ: گزینه ۴

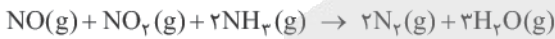
در خودروهای بنزینی، ۴ نوع ماده (CO_۲، H_۲O، N_۲ و O_۲) و در خودروهای دیزلی، ۳ نوع ماده (CO_۲، H_۲O و N_۲) از انجام واکنش های شیمیایی تولید می شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

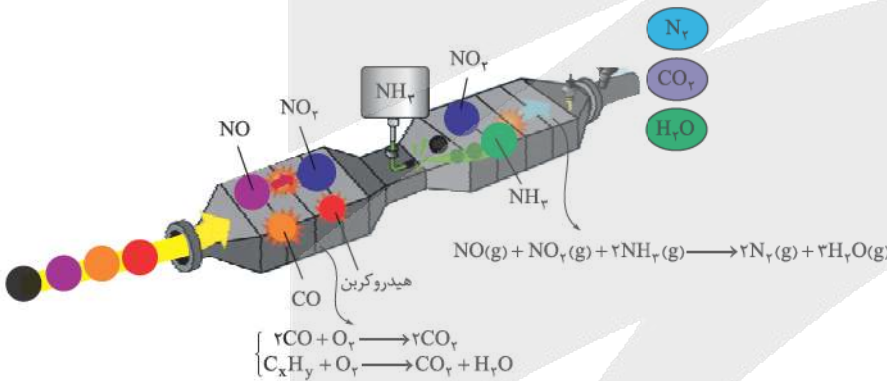


بررسی سایر گزینه ها:

گزینه (۱): با توجه به شکل کتاب درسی، مشخص است که بین دو محفظه در مبدل های کاتالیستی خودروهای دیزلی، مخزن آمونیاک (NH_۳) وجود دارد. در این مبدل های کاتالیستی، علاوه بر کاتالیزورها، گاز آمونیاک را نیز به داخل مخلوط آلاینده ها تزریق می کنند (در محفظه دوم) تا طی واکنش زیر، گازهای NO و NO_۲ تا حدود زیادی به گاز بی خطر N_۲ تبدیل شوند:

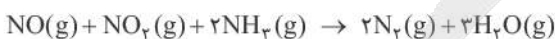


هم چنین با توجه به شکل زیر می توان گفت که در هر دو محفظه، بخار آب (H_۲O(g)) تولید می شود:



گزینه (۲): فرآورده کربن دار واکنش سوختن ناقص سوخت های فسیلی، همان گاز کربن مونواکسید (CO(g)) است. در محفظه اول مبدل های کاتالیستی در خودروهای دیزلی، گاز CO طی واکنش $2CO(g) + O_2(g) \rightarrow 2CO_2(g)$ سوخته و به گاز کربن دی اکسید تبدیل می شود.

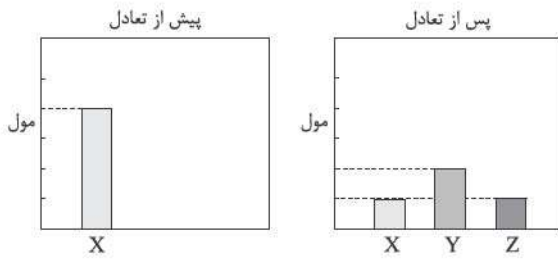
گزینه (۳): واکنش انجام شده در محفظه دوم مبدل های کاتالیستی خودروهای دیزلی به صورت زیر است:



بنابراین در این محفظه، گاز آمونیاک (فرآورده فرایند هابر)، به عنوان واکنش دهنده و گاز نیتروژن (یکی از واکنش دهنده های فرایند هابر)، به عنوان فرآورده در واکنش حضور دارد.



با توجه به شکل زیر که مربوط به یک واکنش تعادلی است، مقدار ثابت تعادل واکنش کدام است؟ (همه مواد به حالت گازند و حجم ظرف واکنش، ۰/۵ لیتر و شمار مول‌های اولیه X برابر ۲ است.)



۴ (۱)

۱/۱۶ (۲)

۱/۴ (۳)

۱۶ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا باید با توجه به تغییر مقدار مول مواد، معادله واکنش رو بنویسیم! برای موازنه واکنش هم، مول تمامی مواد شرکت‌کننده را به کم‌ترین مول تقسیم می‌کنیم.



با توجه به نمودار، به ازای مصرف ۱/۵ مول X، ۱ مول Y و ۰/۵ مول Z تولید می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\Rightarrow \text{ضریب استوکیومتری مواد شرکت‌کننده} \begin{cases} X \rightarrow \frac{1/5}{0/5} = 3 \\ Y \rightarrow \frac{1}{0/5} = 2 \\ Z \rightarrow \frac{0/5}{0/5} = 1 \end{cases}$$

معادله واکنش	$3X \rightleftharpoons 2Y + Z$
مقادیر قبل از تعادل	۲ mol ۰ ۰
مقادیر بعد از تعادل	۰/۵ ۱ ۰/۵

$$K = \frac{[Z] \times [Y]^2}{[X]^3} = \frac{(\frac{0/5}{0/5}) \times (\frac{1}{0/5})^2}{(\frac{0/5}{0/5})^3} = \frac{1 \times 4}{1} = 4$$



با توجه به جدول زیر و واکنش تعادلی $2B(g) \rightleftharpoons 2A(g) + Z(g)$ ، کدام موارد درست است؟

$\theta(^{\circ}C)$	K
۴۳۵	4×10^{-5}
۲۲۵	4×10^{-11}
۲۵	$2/5 \times 10^{-25}$

الف) واکنشی گرماگیر بوده و در آن، مجموع آنتالپی پیوند واکنش دهنده‌ها بزرگ‌تر از مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها است.

ب) اثر افزایش غلظت B، مشابه اثر افزایش دما، تعادل را در جهت رفت جابه‌جا می‌کند.

پ) طبق معادله واکنش، غلظت تعادلی B دو برابر غلظت تعادلی Z است.

ت) اگر حجم سامانه را از ۳ لیتر به ۱ لیتر تغییر دهیم، مقدار ثابت تعادل واکنش کاهش می‌یابد.

(۱) ب - ت

(۲) الف - ب

(۳) الف - پ

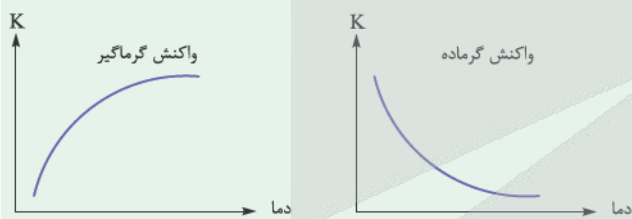
(۴) پ - ت

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓



از میان عوامل مؤثر بر تعادل، تنها دما است که می‌تواند ثابت تعادل را تغییر دهد. در واکنش‌های گرماده با افزایش دما، ثابت تعادل کاهش و در واکنش‌های گرماگیر با افزایش دما، ثابت تعادل افزایش می‌یابد؛ بنابراین نمودار تغییرات ثابت تعادل بر حسب دما برای این دو نوع واکنش به صورت زیر است:



عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) با توجه به افزایش K در اثر افزایش دما، واکنش گرماگیر بوده و ΔH آن عددی مثبت است. رابطه ΔH با آنتالپی پیوند به صورت زیر می‌باشد:

$$\Delta H = [\text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها}] - [\text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش دهنده‌ها}]$$

$$\Delta H > 0 \Rightarrow \text{مجموع آنتالپی پیوند فراورده‌ها} > \text{مجموع آنتالپی پیوند واکنش دهنده‌ها}$$

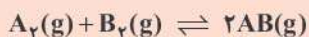
ب) طبق اصل لوشاتلیه، هنگامی که در دمای ثابت، غلظت یکی از مواد شرکت‌کننده در سامانه تعادلی افزایش یابد، واکنش در جهت مصرف آن پیش می‌رود که تا حد امکان مقداری از آن را مصرف کند و به تعادل جدید برسد. همین‌طور در واکنش‌های گرماگیر با افزایش دما، تعادل در جهت مصرف گرما (جهت رفت) جابه‌جا می‌شود.

پ) طبق ضریب استوکیومتری مواد، به ازای مصرف ۲ مول B، ۱ مول Z تولید می‌شود. نسبت غلظت تعادلی این دو ماده به مقدار اولیه B بستگی دارد و لزوماً دو برابر Z نیست.

ت) تغییر حجم، تأثیری بر مقدار ثابت تعادل ندارد.



در ظرفی در بسته به حجم دو لیتر، ۵ مول AB به همراه دو مول از هر یک از گازهای A_2 و B_2 در تعادل هستند. اگر به این ظرف در دمای ثابت، چهار مول AB بیفزاییم، در لحظه برقراری تعادل، اختلاف غلظت مولی گازهای AB و A_2 به تقریب چقدر خواهد بود؟



$$3/14 \quad (2)$$

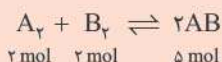
$$2/17 \quad (1)$$

$$6/26 \quad (4)$$

$$5/23 \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۱

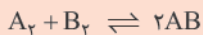
پاسخ خیلی تشریحی ✓ ابتدا ثابت تعادل واکنش را حساب می‌کنیم. در نظر داشته باشید که اگر مقدار مول گازی در دو سمت واکنش برابر باشد، می‌توان در عبارت ثابت تعادل به جای غلظت از مول استفاده کرد:



$$2 \text{ mol} \quad 2 \text{ mol} \quad 5 \text{ mol}$$

$$K = \frac{[AB]^2}{[A_2][B_2]} \Rightarrow K = \frac{5^2}{2 \times 2} = \frac{25}{4}$$

با افزودن ۴ مول AB، تعادل در جهت برگشت جابه‌جا می‌شود:



$$2 \quad 2 \quad 5 \quad \text{تعادل اولیه}$$

$$2 \quad 2 \quad 9 \quad \text{پس از افزودن AB}$$

$$2+x \quad 2+x \quad 9-2x \quad \text{تعادل جدید}$$

با تغییر مقدار مواد، ثابت تعادل بدون تغییر باقی می‌ماند:

$$K = \frac{25}{4} = \frac{(9-2x)^2}{(2+x)^2} \xrightarrow{\text{از دو طرف تساوی جذری می‌گیریم.}} \frac{5}{2} = \frac{9-2x}{2+x} \Rightarrow 10 + 5x = 18 - 4x \Rightarrow$$

$$x = \frac{8}{9}$$

$$AB \text{ غلظت} = \frac{AB \text{ مول}}{\text{حجم ظرف}} = \frac{9-2x}{2}$$

$$A_2 \text{ غلظت} = \frac{A_2 \text{ مول}}{\text{حجم ظرف}} = \frac{2+x}{2}$$

$$A_2 \text{ و } AB \text{ غلظت} = \frac{7-2x}{2} = \frac{7-2(\frac{8}{9})}{2} = \frac{21-8}{6} = \frac{13}{6} \approx 2/17 \text{ mol.L}^{-1}$$

در فرایند تعادلی تولید $SO_3(g)$ ، ۶ مول از هر یک از گازهای SO_2 و O_2 در یک ظرف ده‌لیتری واکنش می‌دهند. پس از خارج شدن ۲ مول از فراورده و برقراری دوباره تعادل، غلظت $SO_3(g)$ به ۰/۲ مول بر لیتر رسیده است.

(سوال ۲۶۳۳ کنکور تهری ۱۳۹۴ (عارج از کشور))

مقدار ثابت تعادل این واکنش چند $L \cdot mol^{-1}$ است؟

$$25 \quad (4)$$

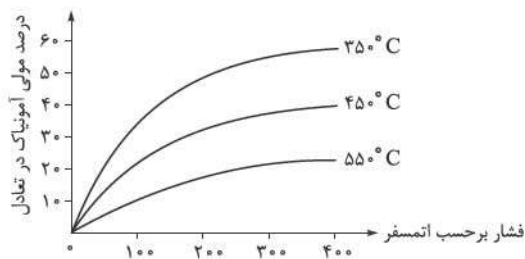
$$12/5 \quad (3)$$

$$2/5 \quad (2)$$

$$1/25 \quad (1)$$



نمودار زیر، تأثیر تغییر دما و فشار را بر درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی فرایند هابر نشان می‌دهد. با توجه به نمودار، کدام مورد زیر درست است؟



- (۱) مناسب‌ترین شرایط برای تولید آمونیاک، فشار کم و دمای بالا است.
- (۲) با افزایش دما، شمار مولکول‌های آمونیاک موجود در مخلوط افزایش می‌یابد.
- (۳) در دو آزمایش با دما و فشار متفاوت، ممکن نیست درصد مولی آمونیاک در مخلوط تعادلی یکسان باشد.

(۴) در فشار ۳۰۰ atm و دمای ۳۵۰°C، از هر ۱۰۰ مولکول موجود در ظرف، ۵۰ مولکول، آمونیاک است.

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به نمودار، در فشار ۳۰۰ atm و دمای ۳۵۰°C، درصد مولی آمونیاک در تعادل به تقریب برابر ۵۰ است؛ بنابراین می‌توان گفت که از هر ۱۰۰ مول گاز، ۵۰ مول آن آمونیاک است یا از هر ۱۰۰ مولکول گاز، ۵۰ مولکول، آمونیاک می‌باشد. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): با توجه به نمودار، مشخص است که با افزایش فشار، درصد مولی آمونیاک افزایش می‌یابد؛ بنابراین فشار بالا، شرایط مناسب‌تری برای تولید آمونیاک است.

گزینه (۲): با توجه به نمودار، در یک فشار مشخص، هرچه دما بالاتر باشد، درصد مولی آمونیاک کم‌تر خواهد بود. با توجه به گرماده بودن فرایند هابر ($N_2 + 3N_2 \rightleftharpoons 2NH_3 + Q$)، افزایش دما، تعادل را در جهت برگشت جابه‌جا می‌کند.

گزینه (۳): مثلاً درصد مولی ۱۰ را در نظر بگیرید. هم در دمای ۴۵۰°C و فشار حدود ۵۰ atm می‌توان به این درصد مولی رسید و هم در دمای ۵۵۰°C و فشار حدود ۱۱۵۰ atm!



کدام مورد نادرست است؟ **۸۶**

- ۱) آمونیاک، سولفوریک اسید، متانول و بنزین، جزء فراورده‌های پتروشیمیایی هستند که پس از پالایش نفت خام به دست می‌آیند.
- ۲) خام‌فروشی، تنها برای منابع شیمیایی مانند نفت خام، گاز و زغال‌سنگ و منابع معدنی مانند سنگ آهن، مس و روی صادق است.
- ۳) انرژی و فناوری شیمیایی از جمله عوامل لازم برای تهیه مواد اولیه مهم و پرکاربرد در صنایع از مواد خام است.
- ۴) سنتز مواد جدید از مواد خام، به دانش شناخت ساختار و رفتار گروه‌های عاملی، شرایط انجام واکنش و عوامل مؤثر بر انجام واکنش نیاز دارد.

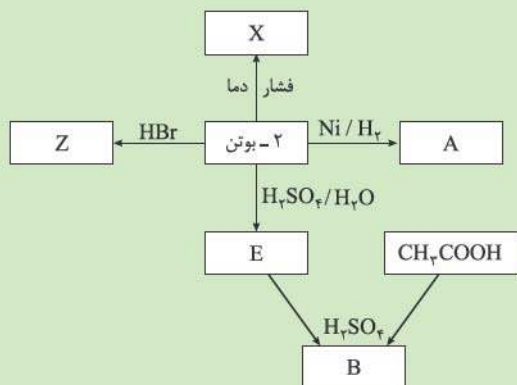
پاسخ: گزینه ۲

خام‌فروشی علاوه بر نفت، برای منابع معدنی مانند سنگ معدن، آهن، مس، روی و حتی منابع کشاورزی مانند پنبه نیز صدق می‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی

نمودار زیر مربوط به سنتز مواد مختلف از ۲- بوتن است. کدام موارد زیر درست اند؟

$$(H = 1, C = 12, O = 16, Br = 80 : g \cdot mol^{-1})$$



الف) ترکیب E و دی اتیل اتر، ایزومر یکدیگرند.

ب) تفاوت جرم مولی B و Z، کم تر از $\frac{1}{4}$ جرم مولی A است.

پ) هر مولکول از B دارای ۲۰ پیوند اشتراکی است.

ت) ترکیب X برخلاف Z، ترکیبی سیر شده است.

(۱) الف - پ

(۲) ب - ت

(۳) پ - ت

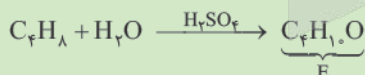
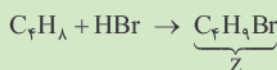
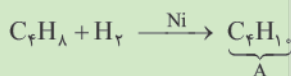
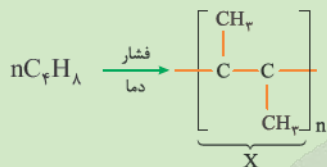
(۴) الف - ب - پ

پاسخ: گزینه ۴

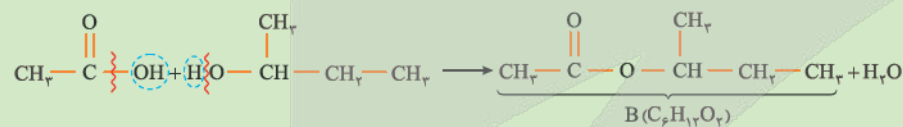
عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

۲- بوتن یک آلکن ۴ کربنه با فرمول C_4H_8 است. قبل از هر کاری باید واکنش‌های انجام شده در شکل بالا را بنویسیم:



از واکنش اتانوفیک اسید CH_3COOH و بوتانول (E)، یک استر ساخته می‌شود.



بررسی عبارت‌ها:

الف) (E) بوتانول یک الکل ۴ کربنه با فرمول $C_4H_{10}O$ است که با دی اتیل اتر با فرمول $C_4H_{10}O$ ایزومر است، زیرا فرمول مولکولی یکسان و ساختار متفاوت دارند.

(ب)

دی اتیل اتر: $CH_3CH_2-O-CH_2CH_3$

$$Z \rightarrow C_4H_9Br \xrightarrow{\text{جرم مولی}} \frac{48}{4} + (9 \times 1) + 80 = 137 g \cdot mol^{-1}$$

$$B \rightarrow C_6H_{12}O_2 \xrightarrow{\text{جرم مولی}} \frac{72}{6} + (12 \times 1) + \frac{32}{2} = 116 g \cdot mol^{-1}$$

$$Z \text{ جرم مولی} - B \text{ جرم مولی} = 137 - 116 = 21$$

$$A \text{ جرم مولی } (C_4H_{10}) \Rightarrow (4 \times 12) + (10 \times 1) = 58 g \cdot mol^{-1} \xrightarrow{\times \frac{1}{2}} 29$$

$$21 < 29$$

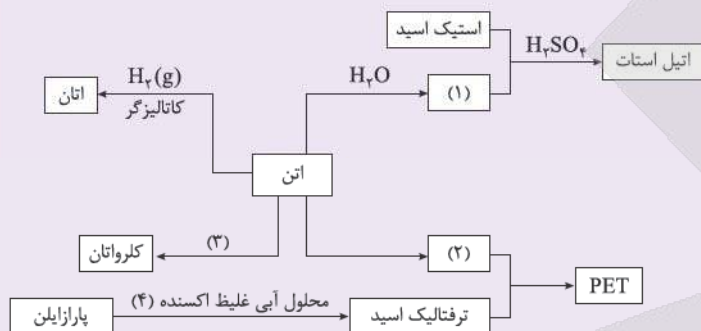
(پ)

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{(C \times 4) + (H \times 1) + (O \times 2)}{2} = \frac{(6 \times 4) + (12 \times 1) + (2 \times 2)}{2} = 20$$

(ت) X و Z هر دو فاقد پیوند دوگانه و سه‌گانه کربن - کربن هستند و هر دو سیرشده محسوب می‌شوند.

شکل زیر، مراحل سنتز برخی ترکیب‌های آلی را نشان می‌دهد. با توجه به آن به پرسش‌ها پاسخ دهید.

(سوال ۱۵ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۴)



الف) در جاهای خالی (۱)، (۲) و (۳) نام یا فرمول شیمیایی ماده مورد نظر را بنویسید.

ب) نام یا فرمول شیمیایی اکسنده (۴) را بنویسید.

پ) کدام ماده به عنوان افسانه بی‌حس‌کننده موضعی کاربرد دارد؟ و کدام ترکیب حلال چسب است؟



با توجه به مطالب کتاب درسی، مولکول حلال چسب و مولکولی که در تهیه افشانه بی حس کننده موضعی کاربرد



دارد، در کدام مورد مشابه هستند؟

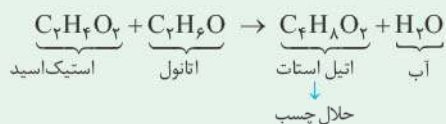
(۲) مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن

(۱) سنتز مستقیم از اتن

(۴) شمار پیوندهای C—H

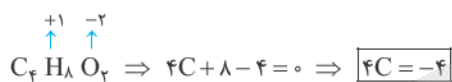
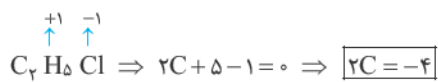
(۳) شمار جفت‌الکترون‌های ناپیوندی

پاسخ: گزینه ۲



مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در هر دو مولکول برابر -۴ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



بررسی سایر گزینه‌ها:

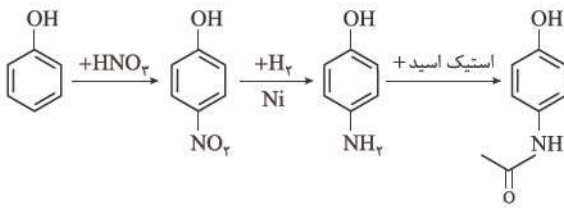
گزینه (۱): با توجه به واکنش تهیه این دو ماده، کلرواتان مستقیم از اتن ولی اتیل استات به صورت غیرمستقیم از اتن، سنتز شده است.

گزینه (۳): کلرواتان به دلیل وجود Cl، ۳ جفت‌الکترون ناپیوندی دارد و اتیل استات به دلیل داشتن دو اتم اکسیژن در ساختارش، ۴ جفت‌الکترون ناپیوندی دارد.

گزینه (۴): در کلرواتان، ۵ پیوند C—H و در اتیل استات، ۸ پیوند C—H وجود دارد.

پایه دوازدهم ریاضی
 بیست و دوم اسفندماه ۱۴۰۴
 مرحله چهاردهم

با توجه به مراحل سنتز استامینوفن، کدام مطلب نادرست است؟



- (۱) فرمول مولکولی استامینوفن، به صورت $C_8H_9NO_2$ بوده و دارای گروه‌های هیدروکسیل و آمیدی است.
 (۲) سنتز دارو، شامل سه مرحله است که در هر سه مرحله، مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن در حلقه آروماتیک تغییر می‌کند.
 (۳) اگر بازده مراحل اول، دوم و سوم به ترتیب 80% ، 50% و 32% باشد، بازده کلی فرایند، 32% درصد است.
 (۴) مرحله دوم این سنتز، دارای انرژی فعال‌سازی بالایی است و برای کاهش آن از کاتالیزگر نیکل استفاده می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

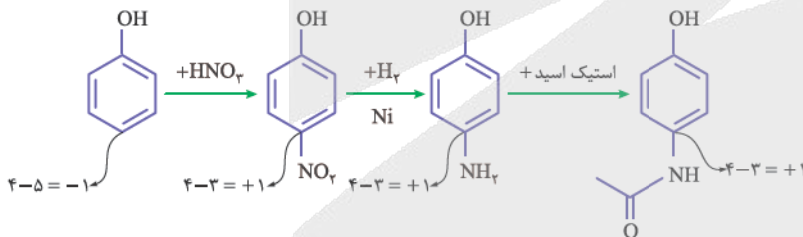
بیاید گزینه‌ها را به ترتیب بررسی کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گزینه (۱): با توجه به ساختار داده‌شده، فرمول مولکولی استامینوفن به صورت $C_8H_9NO_2$ است. این ترکیب دارای گروه‌های



گزینه (۲): سه مرحله‌ای بودن فرایند سنتز که از روی شکل‌ها معلوم می‌شود، بریم سراغ محاسبه عدد اکسایش اتم‌های کربن که گروه‌های متصل به آن‌ها تغییر کرده‌اند. با توجه به این که کربن، ۴ الکترون ظرفیتی دارد و خصالت نافلزی آن از هیدروژن، بیشتر و از نیتروژن کم‌تر است، خواهیم داشت:



فقط در مرحله اول، عدد اکسایش کربن تغییر کرده است.

گزینه (۳): در یک واکنش چندمرحله‌ای، بازده کلی به صورت زیر محاسبه می‌شود:

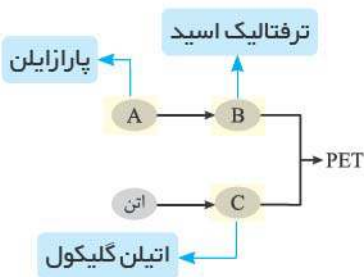
$$\text{بازده کلی} = \left(\frac{\text{بازده مرحله ۱}}{100} \times \frac{\text{بازده مرحله ۲}}{100} \times \frac{\text{بازده مرحله ۳}}{100} \times \dots \right) \times 100$$

$$\text{بازده کلی} = \frac{80}{100} \times \frac{50}{100} \times \frac{32}{100} \times 100 = 32\%$$

گزینه (۴): کاملاً درسته زیرا کاتالیزگر، انرژی فعال‌سازی واکنش را کاهش می‌دهد.



با توجه به شکل زیر که مربوط به فرایند کلی تولید PET می‌باشد، کدام موارد درست است؟



الف) شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی B با شمار اتم‌های هیدروژن در مولکول پروپن برابر است.

ب) اگر در تبدیل A به B، از محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات استفاده شود، بازده واکنش بالاتر از زمانی است که از O_2 و کاتالیزگر استفاده می‌شود.

پ) بر اثر واکنش C با استیک اسید، می‌توان دی‌استر تولید کرد.

ت) تفاوت جرم مولی B و معروف‌ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک، برابر جرم مولی CO_2 است.

۲) ب - پ

۱) الف - ت

۴) الف - ب - ت

۳) الف - پ - ت

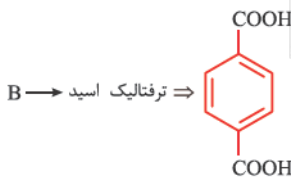
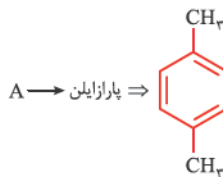
پاسخ: گزینه ۲

دریس Box

ترفتالیک اسید $(C_8H_6O_4)$ → محلول غلیظ پتاسیم پرمنگنات + پارازایلن (C_8H_{10})	(واکنش از نوع اکسایش-کاهش است.)
اتیلن گلیکول $(C_2H_6O_2)$ → محلول آبی و رقیق پتاسیم پرمنگنات + گاز اتن (C_2H_4)	(واکنش از نوع اکسایش-کاهش است.)
آب + پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) $(C_{10}H_8O_4)_n$ → ترفتالیک اسید $(C_8H_6O_4)$ + اتیلن گلیکول $(C_2H_6O_2)$	(واکنش از نوع اکسایش-کاهش نیست.)

عبارت‌های «الف»، «پ» و «ت» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

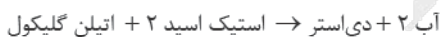


بررسی عبارت‌ها:

الف) تعداد اتم‌های هیدروژن در ترفتالیک اسید (B) برابر با ۶ و در پروپن که یک آلکن ۳ کربنه با فرمول C_3H_6 است نیز برابر ۶ می‌باشد. ب) اکسایش پارازایلن (A) به ترفتالیک اسید (B)، کاری بس دشوار و طاقت‌فرسا است، و با وجود غلظت بالای یون پرمنگنات، باز هم شرایط تبدیل پارازایلن به ترفتالیک اسید تأمین نمی‌شود. انرژی فعال‌سازی این واکنش زیاد است. با افزایش دما هم، اگرچه شرایط انجام واکنش تأمین می‌شود اما بازده هم‌چنان مطلوب نیست.

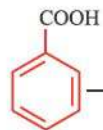
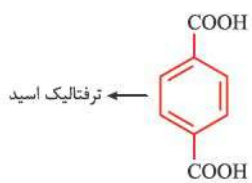
تحقیقات شیمی‌دان‌ها نشان می‌دهد که با استفاده از اکسیژن هوا و کاتالیزگرهای مناسب نیز می‌توان پارازایلن را به ترفتالیک اسید تبدیل کرد. این روش انگاری آسان‌تر از روش قبل است و بازده بالاتری دارد.

پ) با توجه به این که اتیلن گلیکول (C) یک الکل دوعاملی است، هر مولکول آن با دو مولکول اسید واکنش می‌دهد:



ت) معروف‌ترین کربوکسیلیک اسید آروماتیک، بنزوئیک اسید است.

با توجه به ساختار و فرمول مولکولی دو ترکیب، اختلاف جرم مولی آن‌ها برابر با جرم مولی CO_2 است.



بنزواتیک اسید →





کدام مورد نادرست است؟

- (۱) پلاستیک‌ها به دلیل چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان بودن و مقاومت در برابر خوردگی، کاربردهای وسیعی در زندگی دارند.
- (۲) PET برخلاف پلیمرهای طبیعی، ماندگاری زیادی دارد و در طبیعت به کندی تجزیه می‌شود.
- (۳) در بازیافت شیمیایی PET با متانول، مونومرهای اولیه این پلیمر بازتولید می‌شوند.
- (۴) جمع‌آوری، شست‌وشو، ذوب‌کردن و ساخت ابزارهای جدید، مراحل بازیافت پلی‌اتیلن ترفتالات هستند.

پاسخ: گزینه ۳

دربین Box

● پلاستیک‌ها را می‌توان یکی از نتایج خلاقیت و نوآوری بشر دانست.

- از ویژگی‌های آن‌ها می‌توان به چگالی کم، نفوذناپذیری نسبت به هوا و آب، ارزان بودن و مقاومت در برابر خوردگی اشاره کرد.
- امروزه سالانه حدود ۴۰۰ میلیون تن از آن‌ها در جهان تولید می‌شود.
- به طور معمول، زیست‌تخریب‌ناپذیرند و برای مدت طولانی در طبیعت باقی می‌مانند.

پلاستیک‌ها

- یکی از مواد پلاستیکی قابل بازیافت، پلی‌اتیلن ترفتالات (PET) است. برای این منظور، ابتدا باید آن‌ها را جداگانه جمع‌آوری و سپس با انجام فرایندهای فیزیکی و شیمیایی، به مواد قابل استفاده تبدیل کرد. دو راه برای بازیافت وسایل پلاستیکی وجود دارد:
 - (۱) این مواد را پس از شست‌وشو و تمیزکردن، ذوب کرده و دوباره از آن‌ها برای تولید وسایل و ابزار دیگر استفاده می‌کنند و یا این‌که آن‌ها را خرد کرده و به تکه‌های کوچکی به نام پُرک تبدیل و در تولید مواد پلاستیکی دیگر استفاده می‌کنند.
 - (۲) پسماندها را به مونومرهای سازنده یا مواد اولیه مفید و ارزشمند تبدیل می‌کنند.
- در بازیافت PET با متانول، مواد مفیدی (نه لزوماً مونومرهای اولیه آن) برای تولید پلیمرهای دیگر تولید می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

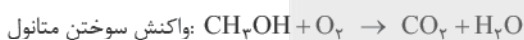
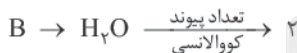
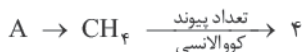


با توجه به شکل که به روش های تولید متانول مربوط است، اگر نقطه جوش C از D بالاتر باشد، کدام مطلب درست است؟

(۱) X، دمای کمتری نسبت به Y است.
 (۲) گاز C را می توان از واکنش هیدروکلریک اسید با فلز منیزیم نیز تهیه کرد.
 (۳) شمار پیوندهای کووالانسی A دو برابر B است و B یکی از محصولات سوختن کامل متانول است.
 (۴) در دمای اتاق گازهای نیتروژن و D با هم واکنش می دهند و نقطه جوش فرآورده از نقطه جوش A بالاتر است.

پاسخ: گزینه ۳

کارت درس Box



بررسی گزینه های نادرست:

گزینه (۱): گستره دمایی X، $45^\circ C - 55^\circ C$ اما دمای Y، $35^\circ C$ است.

گزینه (۲): با توجه به صورت سؤال که نقطه جوش C را بیشتر از D اعلام کرده است، پس C نشان دهنده CO و D نشان دهنده H_2 است، زیرا CO به دلیل قطبی بودن، نقطه جوش بالاتری از H_2 ناقطبی دارد.

از واکنش HCl با فلز Mg، گاز H_2 تولید می شود نه گاز CO.

گزینه (۴): گاز H_2 یا همان D در دمای اتاق با N_2 واکنش نمی دهد، زیرا انرژی فعال سازی واکنش زیاد است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



درستی یا نادرستی کدام گزینه با دیگر گزینه‌ها متفاوت است؟

- (۱) یک واکنش شیمیایی هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیشتری از واکنش‌دهنده‌ها به فرآورده تبدیل شوند.
- (۲) از ترفتالیک اسید می‌توان به عنوان مونومر در تولید برخی از پلی‌استرها و پلی‌آمیدها استفاده کرد.
- (۳) از زیست‌گاز می‌توان به عنوان ماده اولیه فرایند بازیافت شیمیایی PET استفاده کرد.
- (۴) شمار اتم‌های کربن مولکول پارازایلن و مولکول استیرن، برابرند.



پاسخ: گزینه ۱

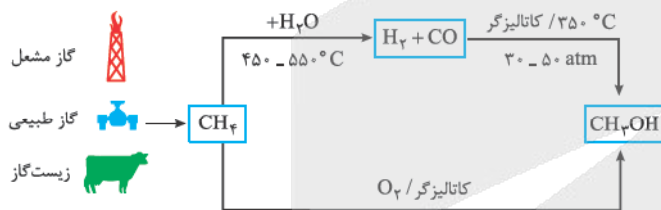
گزینه (۱) برخلاف سایر گزینه‌ها نادرست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

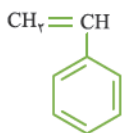
یک واکنش شیمیایی، هنگامی از دیدگاه اتمی به صرفه است که شمار بیشتری از اتم‌های واکنش‌دهنده به فرآورده سودمند تبدیل شوند. بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۲): یکی از مونومرهای سازنده پلی‌استرها و پلی‌آمیدها، یک کربوکسیلیک اسید دوامی است که ترفتالیک اسید با توجه به دارا بودن دو گروه کربوکسیل ($COOH$) در ساختارش می‌تواند مونومر سازنده پلی‌استر و پلی‌آمید باشد.

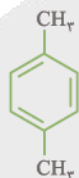
گزینه (۳): PET در شرایط مناسب می‌تواند با متانول واکنش دهد و به مواد مفیدی تبدیل شود. این مواد را می‌توان برای تولید پلیمرها به کار برد. اما برای این کار سالانه به مقدار زیادی متانول نیاز است. متانول مورد نیاز را می‌توان با یکی از روش‌های زیر تهیه کرد که زیست‌گاز هم یکی از مواد اولیه مورد نیاز می‌تواند باشد.



گزینه (۴): ساختار پارازایلن و استیرن به صورت زیر است:



(استیرن)



(پارازایلن)

هر دو، ۸ کربن در ساختارشان دارند.

کدام مورد درباره سلولز و نشاسته، نادرست است؟

- (۱) هر دو، جزء درشت‌مولکول‌های طبیعی بوده و شمار اتم‌های سازنده هر مولکول از آن‌ها، زیاد است.
- (۲) مولکول‌های نشاسته در محیط گرم و مرطوب، به سرعت به مونومرهای سازنده خود، تبدیل می‌شود.
- (۳) الیاف پنبه از سلولز و سه عنصر کربن، هیدروژن و اکسیژن ساخته شده است.
- (۴) هر دو پلیمر مانند پلی‌سیانواتن، فقط از یک نوع مونومر ساخته شده‌اند.

پاسخ: گزینه ۲

مولکول‌های نشاسته در شرایط مناسب مانند محیط مرطوب با کاتالیزگر یا محیط گرم و مرطوب، به آرامی به گلوکز تجزیه شده و مزه شیرین ایجاد می‌کنند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

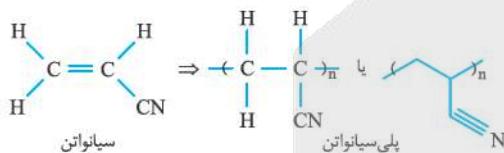
گزینه (۱):

سلولز و نشاسته هر دو، جزء درشت‌مولکول‌های طبیعی هستند که از اتصال مولکول‌های گلوکز به یکدیگر ساخته شده‌اند؛ اما نحوه اتصال مولکول‌های گلوکز در این دو درشت‌مولکول با هم تفاوت دارد. با توجه به شکل‌های زیر، واضح و مبرهن است! که سلولز به صورت خطی است در حالی که مولکول نشاسته پیچ تو پیچ! (حالت مارپیچی دارد). به دلیل همین تفاوت ساختار، خواص مولکول‌های نشاسته و سلولز متفاوت است.



گزینه (۳): پنبه از الیاف (مولکول‌های) سلولز تشکیل شده و هر یک از الیاف سلولز، زنجیره‌ای بسیار بلند است که از اتصال تعداد بسیار زیادی مولکول گلوکز به یکدیگر ساخته می‌شود. گلوکز ($C_6H_{12}O_6$) از عنصرهای H, C و O تشکیل شده است.

گزینه (۴): سلولز و نشاسته، هر دو از مونومر گلوکز درست شده و پلی‌سیانواتن هم فقط از مونومر سیانواتن تشکیل شده است.





اگر در مولکول وینیل کلرید به جای کلر، قرار گیرد، به ترکیبی تبدیل می‌شود که

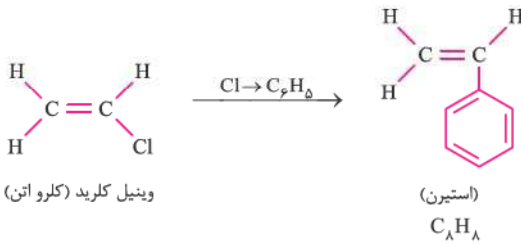
$$(H = 1, C = 12 : g.mol^{-1})$$

- (۱) گروه متیل - برای سوختن کامل هر مول از آن، ۴ مول گاز اکسیژن لازم است.
- (۲) حلقه بنزن - درصد جرمی کربن در آن دوازده برابر درصد جرمی هیدروژن آن است.
- (۳) گروه CN - بر اثر بسیارش به ترکیبی تبدیل می‌شود که در تولید سرنگ کاربرد دارد.
- (۴) اتم فلئور - بین مولکول‌های آن مانند مولکول آمونیاک، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود.

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

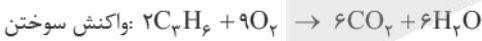
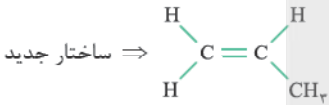
با جایگزین کردن بنزن به جای کلر در ساختار وینیل کلرید (کلرو اتن) به ساختار استیرن می‌رسیم.



$$\frac{\text{درصد جرمی کربن}}{\text{درصد جرمی هیدروژن}} = \frac{\frac{\text{جرم C}}{\text{جرم کل}}}{\frac{\text{جرم H}}{\text{جرم کل}}} = \frac{(\lambda \times C)}{(\lambda \times H)} = \frac{\lambda \times 12}{\lambda \times 1} = 12$$

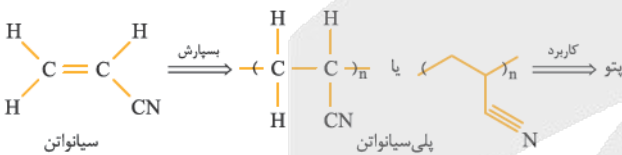
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱):



به ازای سوختن هر مول از آن، ۴/۵ مول گاز اکسیژن لازم است.

گزینه (۳): پس از جایگزین کردن CN به جای کلر به ترکیب زیر تبدیل می‌شود:



گزینه (۴): در ترکیب حاصل، F به کربن متصل است و نه هیدروژن! به همین دلیل توانایی برقراری پیوند هیدروژنی را ندارد.





۹۶

در یک نمونه از پلی پروپن، جرم اتم‌های کربن، ۶ گرم بیشتر از جرم اتم‌های هیدروژن است. جرم این نمونه چند گرم است؟ ($H = 1, C = 12 : g \cdot mol^{-1}$)

۴ / ۲ (۲)

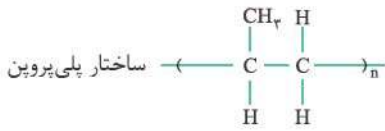
۰ / ۲ (۱)

۸ / ۴ (۴)

۵ / ۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$(C_3H_6)_n \Rightarrow \begin{cases} \text{جرم کربن} = (3 \times 12 \times n) \\ \text{جرم هیدروژن} = (6 \times 1 \times n) \end{cases}$$

جرم کربن - جرم هیدروژن = ۶

$$36n - 6n = 6 \rightarrow 30n = 6 \Rightarrow n = \frac{1}{5} \text{ mol}$$

$$\text{جرم پلی پروپن} = \text{جرم واحد تکرارشونده} \times n = \left[\overbrace{(3 \times 12)}^C + \overbrace{(1 \times 6)}^H \right] \times n = 42 \times \frac{1}{5} = 8.4 \text{ g}$$

$$mg (C_3H_6)_n \times \frac{1 \text{ mol } (C_3H_6)_n}{42 \text{ ng } (C_3H_6)_n} \times \frac{30 \text{ ng (تفاوت جرم کربن و هیدروژن)}}{1 \text{ mol } (C_3H_6)_n} = 6 \text{ g} \Rightarrow m = \frac{6 \times 42}{30} = 8.4 \text{ g}$$

په چور دیگه



درواکنش پلیمری شدن اتن، جرم مولی میانگین پلیمر به مقدار کاتالیزگرهای به کاررفته بستگی دارد. اگر درواکنش بسیارش اتن به ازای مصرف هر گرم کاتالیزگر دارای آلومینیم به تقریب $3/15$ گرم کاتالیزگر دارای تیتانیم مصرف شود، شمار میانگین واحدهای تکرارشونده (n) برای پلیمر ایجادشده کدام است؟ (کاتالیزگرهای به کاررفته دارای فرمولهای $TiCl_4$ (با جرم مولی 190 گرم) و $AlCl(C_7H_5)_2$ (با جرم مولی $120/5$ گرم) می باشند).

شمار مول کاتالیزگر حاوی تیتانیم	شمار مول کاتالیزگر حاوی آلومینیم	جرم مولی پلیمر ($g \cdot mol^{-1}$)
۱	۲	۲۹۴۰۰۰
۱	۱	۲۸۲۸۰۰
۱	۰/۵	۲۱۰۰۰
۱	۰/۲	۳۰۸۰۰

۱۰۱۰۰ (۲)

۱۰۵۰۰ (۱)

۱۱۰۰ (۴)

۷۵۰ (۳)

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرض می کنیم یک گرم کاتالیزگر دارای Al و $3/15$ گرم کاتالیزگر دارای Ti داریم:

$$1 \text{ g } AlCl(C_7H_5)_2 \times \frac{1 \text{ mol } AlCl(C_7H_5)_2}{120/5 \text{ g } AlCl(C_7H_5)_2} = \frac{1}{120/5} \text{ mol } AlCl(C_7H_5)_2$$

$$3/15 \text{ g } TiCl_4 \times \frac{1 \text{ mol } TiCl_4}{190 \text{ g } TiCl_4} = \frac{3/15}{190} \text{ mol } TiCl_4$$

نسبت مولی کاتالیزگر دارای آلومینیم به کاتالیزگر دارای تیتانیم برابر است با:

$$\frac{1}{120/5} \approx \frac{0/5}{3/15}$$

پس با توجه به جدول، جرم مولی پلی اتن برابر 21000 گرم است.

$$\text{جرم مولی اتن} = (2 \times 12) + (4 \times 1) = 28 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$$

$$n = \frac{\text{جرم مولی پلیمر}}{\text{جرم مولی مونومر}} = \frac{21000}{28} = 750$$



کدام موارد زیر دربارهٔ الکل‌های یک‌عاملی سیرشده و غیرحلقوی (ROH)، درست است؟

$$(H = 1, C = 12, O = 16 : g \cdot mol^{-1})$$

الف) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آن‌ها، خاصیت چربی‌دوستی افزایش می‌یابد.

ب) در هر مولکول از آن‌ها با n اتم کربن، $\frac{3n+2}{2}$ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پ) نیروی بین مولکولی غالب در الکی با جرم مولی $60 g \cdot mol^{-1}$ ، پیوند هیدروژنی است.

ت) اولین عضو این خانواده بر اثر گزش مورچهٔ سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش می‌شود.



الف - ت

ب - پ

الف - ت

الف - پ

پاسخ: گزینهٔ ۲

عبارت‌های «الف» و «پ» درست‌اند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

الف) در الکل‌های کوچک و تا پنج اتم کربن (یعنی از متانول تا پنتانول)، بخش قطبی بر ناقطبی غلبه می‌کند و مولکول در مجموع قطبی است. به همین دلیل سهم بیشتر نیروی بین مولکولی الکل‌ها تا ۵ اتم کربن مربوط به پیوند هیدروژنی است؛ در نتیجه این الکل‌ها به خوبی در آب حل می‌شوند. در الکل‌های بزرگ‌تر، سهم بیشتر نیروی بین مولکولی از نوع وان‌دروالسی است؛ پس این الکل‌ها در آب حل نشده به باش! در چربی حل می‌شوند.

افزایش چربی‌دوستی یا کاهش چربی‌گریزی و کاهش آب‌دوستی یا افزایش آب‌گریزی

افزایش انحلال‌پذیری در چربی و کاهش انحلال‌پذیری در آب

با افزایش شمار اتم‌های کربن الکل‌ها

ب) فرمول عمومی الکل‌های سیرشده و غیرحلقوی، $C_nH_{2n+2}O$ است.

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی (کوالانسی)} = \frac{(3 \times \text{تعداد اتم‌های N}) + (2 \times \text{تعداد اتم‌های O}) + (1 \times \text{تعداد اتم‌های H}) + (4 \times \text{تعداد اتم‌های C})}{2}$$

در یک ترکیب آلی

تعداد پیوند اشتراکی در الکی با n اتم کربن:

$$\frac{(n \times 4) + (2n + 2) + (1 \times 2)}{2} = \frac{6n + 4}{2} = 3n + 2$$

پ) فرمول عمومی الکل‌های سیرشده و غیرحلقوی به صورت $C_nH_{2n+2}O$ است.

$$(n \times 12) + 2n + 2 + 16 = 14n + 18 = 60 \Rightarrow 14n = 42 \Rightarrow n = 3$$

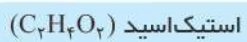
نیروی بین مولکولی در الکل سه‌کربنه از نوع هیدروژنی است.

ت) اولین و ساده‌ترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها (متانوئیک اسید) بر اثر گزش مورچهٔ سرخ وارد بدن شده و باعث سوزش و خارش در محل گزیدگی می‌شود:





اگر A، آشناترین عضو خانوادهٔ اسیدهای آلی و B، استر عامل طعم و بوی آناناس باشد، تفاوت جرم مولی A و B با جرم مولی



کدام ماده برابر است؟

(۲) بوتان

(۱) بوتن

(۴) پنتان

(۳) پنتن

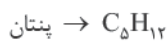
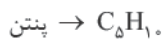
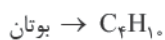
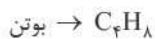
پاسخ: گزینهٔ ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

آشناترین عضو خانوادهٔ کربوکسیلیک اسیدها، اتانویک اسید با فرمول $C_2H_4O_2$ است.

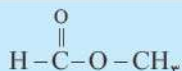
بو و طعم آناناس، ناشی از استری به نام اتیل بوتانوات ($C_6H_{12}O_2$) است.

با کم کردن فرمول دو ماده از یکدیگر، خواهیم داشت:





کدام مورد نادرست است؟



- (۱) جرم مولی گلوکز، ۳ برابر جرم مولی ساده‌ترین استر است.
 (۲) ممکن است در ساختار یک پلیمر، هیچ اتم هیدروژنی وجود نداشته باشد.
 (۳) در کربوکسیلیک اسیدها، اتم کربن گروه کربوکسیل، حداقل به یک اتم کربن دیگر متصل است.
 (۴) با افزایش شمار اتم‌های کربن در آلکان‌های راست‌زنجیر، انحلال‌پذیری آن‌ها در آب تغییر محسوسی ندارد.

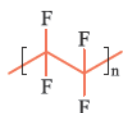
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

فرمول عمومی کربوکسیلیک اسیدها به صورت $\text{R}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{OH}$ است که به جای R می‌توان هم هیدروژن و هم زنجیر کربنی قرار داد؛ بنابراین در نخستین عضو این خانواده ($\text{H}-\overset{\text{O}}{\parallel}{\text{C}}-\text{OH}$)، اتم کربن گروه کربوکسیل به اتم کربن دیگری متصل نیست. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): فرمول مولکولی گلوکز، $\text{C}_6\text{H}_{12}\text{O}_6$ و فرمول ساده‌ترین استر به صورت $\text{C}_2\text{H}_4\text{O}_2$ می‌باشد. نوع اتم‌ها در این دو ترکیب یکسان است و تعداد اتم‌های C، O و H در گلوکز سه برابر تعداد همین اتم‌ها در استر است؛ بنابراین جرم مولی گلوکز سه برابر استر خواهد بود.

گزینه (۲): مثلاً در ساختار تفلون، اتم هیدروژن وجود ندارد.



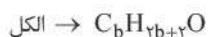
گزینه (۴): آلکان‌های راست‌زنجیر، ناقطبی و در آب نامحلول هستند.

اگر جرم مولی الکل و اسید سازنده استری با فرمول مولکولی $C_9H_{18}O_2$ برابر باشد، کدام مورد درست است؟ (استر، یک عاملی، سیر شده و غیر حلقوی است.)

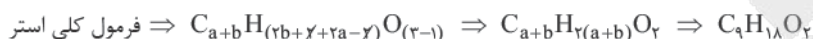
- (۱) تفاوت شمار اتم‌های هیدروژن در فرمول مولکولی الکل و اسید برابر ۲ است.
- (۲) الکل سازنده به هر نسبتی در آب حل می‌شود.
- (۳) نام استر می‌تواند پنتیل بوتانوات باشد.
- (۴) شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار اسید سازنده برابر ۱۷ است.

پاسخ: گزینه ۳

در تهیه استری با فرمول $C_9H_{18}O_2$ ، الکل و اسید با فرمول عمومی زیر شرکت کرده‌اند:



هنگام تبدیل شدن به استر، یک مولکول H_2O حذف می‌شود:



$$a + b = 9$$

$$\text{جرم مولی اسید} = \underbrace{(a \times 12)}_C + \underbrace{(2a \times 1)}_H + \underbrace{(16 \times 2)}_O = 14a + 32$$

$$\text{جرم مولی الکل} = \underbrace{(b \times 12)}_C + \underbrace{((2b+2) \times 1)}_H + \underbrace{(16 \times 1)}_O = 14b + 18$$

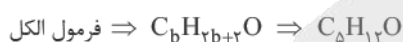
طبق صورت سؤال، جرم مولی الکل با اسید برابر است:

$$14a + 32 = 14b + 18 \Rightarrow 14a - 14b = -14$$

$$14(a - b) = -14 \Rightarrow a - b = -1 \Rightarrow b = a + 1$$

از طرفی می‌دانیم که $a + b = 9$ ، پس:

$$a + (a + 1) = 9 \Rightarrow 2a = 8 \Rightarrow \begin{cases} a = 4 \\ b = 5 \end{cases}$$



بررسی گزینه‌ها:

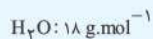
- گزینه (۱): اختلاف تعداد هیدروژن مولکول الکل و اسید برابر با $12 - 8 = 4$ است.
- گزینه (۲): فقط الکل‌های ۱، ۲ و ۳ کربنه به هر نسبتی در آب حل می‌شوند.
- گزینه (۳): با توجه به فرمول اسید و الکل که به ترتیب ۴ و ۵ کربنه هستند، نام استر می‌تواند پنتیل بوتانوات باشد.

نام استر ← بروژن ← آلکیل آلکانوات
براساس: تعداد الکل تعداد C اسید

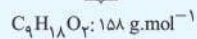
گزینه (۴): تعداد پیوند اشتراکی در ساختار اسید از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\text{تعداد پیوند اشتراکی} = \frac{(C \times 4) + (H \times 1) + (O \times 2)}{2} = \frac{(4 \times 4) + (8 \times 1) + (2 \times 2)}{2} = \frac{16 + 8 + 4}{2} = 14$$

برای پیدا کردن الکل و اسید سازنده استر به طوری که جرم مولی آن‌ها با هم برابر باشد، می‌توان به صورت زیر عمل کرد:



آب + استر = اسید + الکل

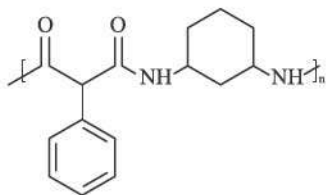


$$\underbrace{\text{جرم مولی الکل}}_x + \underbrace{\text{جرم مولی اسید}}_x = 158 + 18 = 176 \text{ g.mol}^{-1}$$

$$2x = 176 \Rightarrow x = 88 \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{الکل: } C_xH_{2x+2}O = 88 \Rightarrow x = 5 \Rightarrow C_5H_{12}O \\ \text{اسید: } C_yH_{2y}O_2 = 88 \Rightarrow y = 4 \Rightarrow C_4H_8O_2 \end{array} \right.$$

اختلاف تعداد پیوندهای کووالانسی در مولکول دی‌آمین سازنده پلیمر زیر با تعداد جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در

دی‌اسید سازنده این پلیمر کدام است؟



۱۴ (۱)

۲۴ (۲)

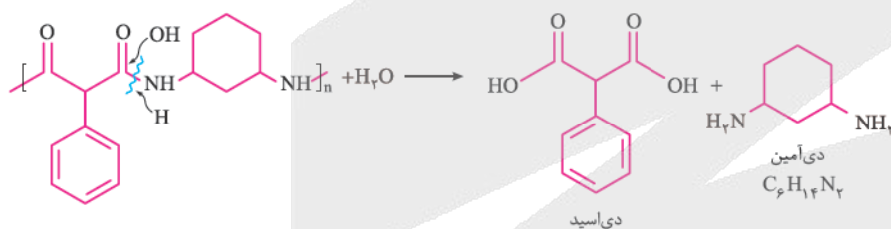
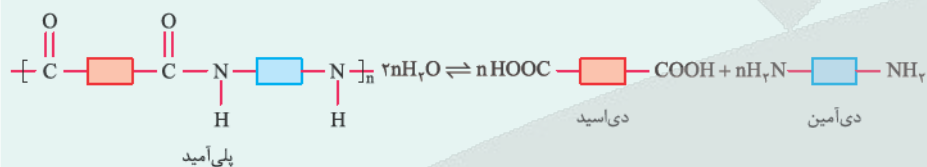
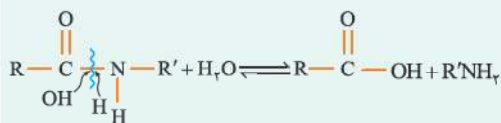
۱۸ (۳)

۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

در این Box

پلی‌آمیدها می‌توانند در شرایط مناسب با آب واکنش دهند و به مونومرهای سازنده خود یعنی کربوکسیلیک اسید دوامی (دی‌اسید) و آمین دوامی (دی‌آمین) تبدیل شوند.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\text{تعداد پیوند در دی‌آمین} = \frac{(C \times 4) + (H \times 1) + (N \times 3)}{2} = \frac{(6 \times 4) + (14 \times 1) + (2 \times 3)}{2} = 22$$

$$\text{تعداد جفت‌الکترون ناپیوندی دی‌اسید} = (O \times 2) = 4 \times 2 = 8$$

$$\text{اختلاف} = 22 - 8 = 14$$



آسپارتام یک شیرین کننده مصنوعی است که در صنایع نانوائی و محصولات قنادی به کار می‌رود. با توجه به ساختار این

ماده، کدام عبارت‌ها درست‌اند؟ ($H = 1, C = 12, N = 14, O = 16 : g.mol^{-1}$)

الف) بر اثر آبکافت آن متانول تولید می‌شود.

ب) جرم مولی آن $292 g.mol^{-1}$ است و دارای یک حلقه آروماتیک است.

پ) دارای دو گروه آمینی است و بین مولکول‌های آن پیوند هیدروژنی

برقرار می‌شود.

ت) نسبت شمار الکترون‌های پیوندی به جفت‌الکترون‌های ناپیوندی در مولکول آن برابر $7/5$ است.

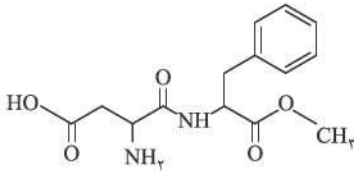
ث) سه اتم کربن در آن دارای عدد اکسایش صفر هستند.

(۲) ب - پ - ت

(۱) الف - ب - ت

(۴) الف - ت - ث

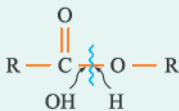
(۳) الف - ت



پاسخ: گزینه ۴

نکته Box

برای تشخیص کربوکسیلیک اسید و الکل سازنده یک استر، ابتدا پیوند یگانه بین اتم کربن و اکسیژن را شکسته، سپس به اتم کربن، OH اضافه می‌کنیم تا کربوکسیلیک اسید اولیه به دست آید. به همین صورت به اکسیژن، H اضافه می‌کنیم تا الکل اولیه حاصل شود؛ یعنی این پوری:



برای محاسبه تعداد اتم‌های هیدروژن و تعداد پیوندهای اشتراکی در یک ترکیب آلی می‌توان از روابط زیر استفاده کرد:

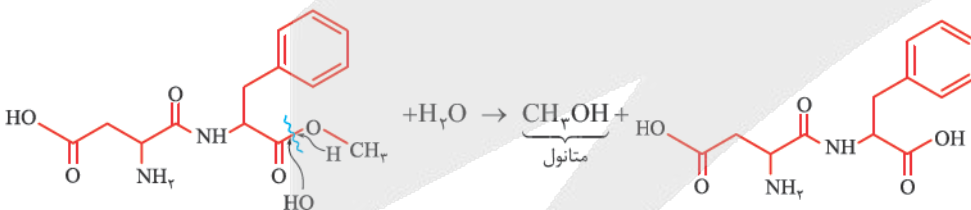
$$\begin{aligned} & (\text{تعداد اتم‌های نیتروژن}) + (\text{تعداد پیوندهای } 4 \times) - (\text{تعداد حلقه‌ها} \times 2) - (\text{تعداد پیوندهای } 2 \times) = (2n + 2) = \text{تعداد اتم‌های هیدروژن در ترکیبی با } n \text{ اتم کربن دوگانه} \\ & (\text{تعداد اتم‌های } N \times 3) + (\text{تعداد اتم‌های } O \times 2) + (\text{تعداد اتم‌های } H \times 1) + (\text{تعداد اتم‌های } C \times 4) = \text{تعداد پیوندهای اشتراکی (کووالانسی) در یک ترکیب آلی} \end{aligned}$$



عبارت‌های «الف»، «ت» و «ث» درست هستند.

بررسی عبارت‌ها:

الف) از آبکافت آسپارتام، طبق واکنش زیر متانول تولید می‌شود:



ب) برای محاسبه جرم مولی آسپارتام، ابتدا فرمول مولکولی آن را پیدا می‌کنیم. با توجه به فرمول ذکر شده، تعداد H به روش زیر به دست می‌آید:

C تعداد = 14

$$H \text{ تعداد} = ((2 \times 14) + 2) - (2 \times 6) - (2 \times 1) + (2 \times 1) = 18$$

تعداد C
پیوند دوگانه
حلقه
نیتروژن

\Rightarrow فرمول: $C_{14}H_{18}N_2O_5$

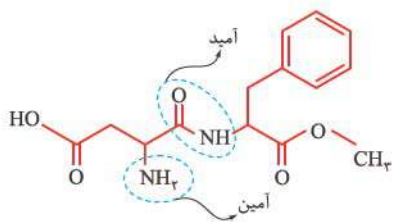
$$\text{جرم مولی} = \frac{168}{14 \times 12} + \frac{18}{18 \times 1} + \frac{28}{2 \times 14} + \frac{80}{5 \times 16} = 294 g.mol^{-1}$$

آسپارتام با جرم مولی $294 g.mol^{-1}$ ، دارای یک حلقه آروماتیک (بنزنی) است.

پاسخ خیلی تشریحی



پ) آسپارتام دارای یک گروه آمین و یک گروه آمید است و به دلیل داشتن OH و NH، قادر به تشکیل پیوند هیدروژنی است:



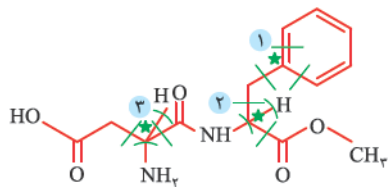
ت)

$$\text{تعداد جفت الکترون پیوندی} = \frac{\overset{\text{C}}{(14 \times 4)} + \overset{\text{H}}{(18 \times 1)} + \overset{\text{N}}{(2 \times 3)} + \overset{\text{O}}{(5 \times 2)}}{2} = 45 \Rightarrow \text{تعداد الکترون پیوندی} = 45 \times 2 = 90$$

$$\text{تعداد جفت الکترون ناپیوندی} = (\text{O} \times 2) + (\text{N} \times 1) = (5 \times 2) + (2 \times 1) = 12$$

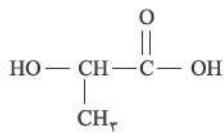
$$\frac{\text{شمار الکترون پیوندی}}{\text{شمار جفت الکترون ناپیوندی}} = \frac{90}{12} = 7.5$$

ث) عدد اکسایش کربن‌های ستاره‌دار صفر (4 - 4 = 0) است:





با توجه به شکل زیر که فرمول ساختاری لاکتیک اسید را نشان می‌دهد، کدام گزینه نادرست است؟



(۱) برای تهیه پلی‌لاکتیک‌اسید، نخست نشاسته موجود در فراورده‌های کشاورزی

مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر را به این ماده تبدیل می‌کنند.

(۲) پلیمر حاصل از آن، پلیمر سبز بوده و در تهیه ظروف پلاستیکی یک‌بارمصرف

مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله و کیسه پلاستیکی و ... کاربرد دارد.

(۳) پلیمر حاصل از آن، پلی‌استر بوده و برای تهیه آن نیازی به کربوکسیلیک اسید دوعاملی و الکل دوعاملی نیست.

(۴) در فرایند پلیمری شدن آن، مجموع جرم مونومرها با جرم پلیمر حاصل برابر است.

پاسخ: گزینه ۴

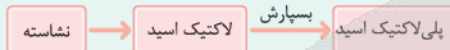
درباره Box

پلیمرهای سبز را به طور معمول از فراورده‌های کشاورزی مانند سیب‌زمینی، ذرت و نیشکر تهیه می‌کنند.

پلی‌لاکتیک‌اسید نمونه‌ای از پلیمرهای سبز است. این پلیمر، یک پلی‌استر ساختگی است که انواع و اقسام ظرف‌های پلاستیکی یکبارمصرف مانند وسایل آشپزخانه، سفره، سطل زباله، کیسه پلاستیکی و ... را از آن تولید می‌کنند و روز به روز هم کاربردهای آن بیشتر می‌شود. این پلاستیک‌ها به دلیل استفاده از پلیمر سبز، امکان تبدیل شدن به کود را دارند؛ به همین دلیل ردپای کوچک‌تری در محیط‌زیست از خود برجای می‌گذارند.

پلی‌لاکتیک‌اسید را می‌توان از یک ترکیب متفاوت به نام لاکتیک‌اسید که دارای هر دو نوع گروه عاملی هیدروکسیل و کربوکسیل است، تهیه کرد. شیر ترش شده دارای لاکتیک‌اسید است.

برای تهیه پلی‌لاکتیک‌اسید، ابتدا نشاسته موجود در گیاهان را به لاکتیک‌اسید تبدیل کرده و سپس از واکنش پلیمری شدن لاکتیک‌اسید، پلی‌لاکتیک‌اسید تولید می‌کنند.

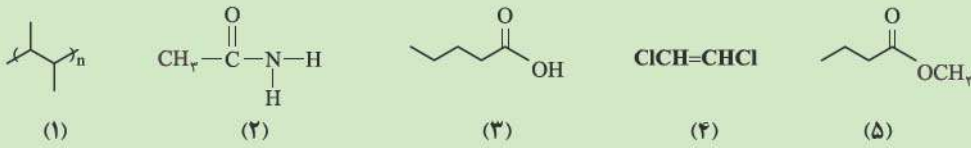


در واکنش پلیمری شدن لاکتیک‌اسید از هر مولکول لاکتیک‌اسید یک H و یک OH به صورت H₂O جدا می‌شود؛ بنابراین جرم پلیمر با مجموع جرم مونومرها برابر نیست.

در مورد گزینه (۳) دقت کنید که در ساختار لاکتیک‌اسید، هر دو نوع گروه عاملی هیدروکسیل و کربوکسیل لازم برای تهیه پلی‌استر وجود دارد؛ بنابراین این واکنش بدون حضور اسید و الکل دوعاملی انجام می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به ساختارهای داده شده، کدام مورد نادرست است؟ **۱۰۵**



(۱) نقطه جوش ترکیب (۳) از ترکیب (۵) بالاتر است.

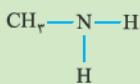
(۲) ساختار پلیمر حاصل از ترکیب (۴) به صورت

(۳) نام مونومر سازنده پلیمر (۱)، ۲- بوتن است.

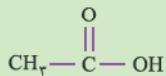
(۴) ترکیب (۲) یک آمید است که از واکنش ساده ترین آمین و استیک اسید تولید شده است.

پاسخ: گزینه ۴

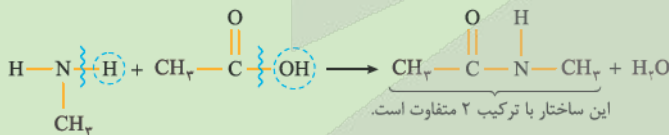
آمین‌ها دسته‌ای از ترکیبات آلی هستند که در ساختار آن‌ها اتم‌های C، H و N وجود دارد. فرمول عمومی آمین‌ها به صورت



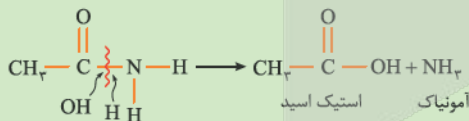
ساده ترین آمین ← متیل آمین



استیک اسید ←



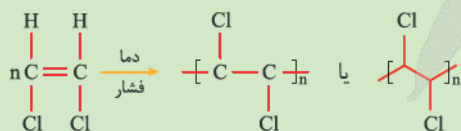
در واقع ترکیب (۲) از واکنش آمونیاک با استیک اسید به دست آمده است:



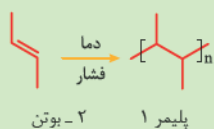
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): ترکیب‌های (۳) و (۵) ایزومر یکدیگرند، اما ترکیب (۳) به دلیل توانایی پیوند هیدروژنی، نقطه جوش بالاتری دارد.

گزینه (۲):



گزینه (۳):

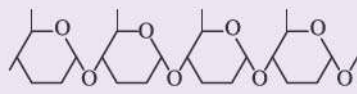


(سوال ۱۳ - امتحان نوایی فرورد ۱۴۰۴)

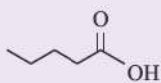
با توجه به ساختار ترکیب‌های داده شده به پرسش‌ها پاسخ دهید.



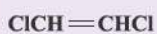
(۱)



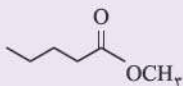
(۲)



(۳)



(۴)



(۵)

الف) ساختار پلیمر تولیدشده از مونومر (۴) را رسم کنید.

ب) یک کاربرد از پلیمر (۱) را بنویسید.

پ) نام مونومر سازنده ترکیب (۲) را بنویسید.

ت) ساختار الکل سازنده استر (۵) را رسم کنید.

ث) نقطه جوش ترکیب‌های (۳) و (۵) را با بیان دلیل مقایسه کنید.

آزمون



کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



جزوه



فیلم



مشاوره



www.
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف

