

# آزمون



# کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



# جزوه



# فیلم



# مشاوره



www.  
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف





# آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله هشتم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/۰۷/آذر

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

رشته ریاضی

دفترچه شماره یک

پایه		دوازدهم		مدت پاسخگویی	تا شماره	از شماره	تعداد سؤال	مواد امتحانی
دهم	یازدهم							
فصل ۲ صفحه ۲۸ تا ۴۶	فصل ۴ صفحه ۹۱ تا ۱۱۴	فصل ۱ (درس ۲) و فصل ۲ صفحه ۱۳ تا ۴۴		۷۰ دقیقه	۱۸	۱	۱۸	حسابان و ریاضیات پایه
فصل ۳ صفحه ۵۳ تا ۷۶	-	فصل ۱ (درس ۲) و فصل ۲ (درس ۱) صفحه ۲۲ تا ۳۹			۳۰	۱۹	۱۲	هندسه
-	-	فصل ۱ (درس ۲ و ۳) صفحه ۹ تا ۳۰			۴۰	۳۱	۱۰	ریاضیات گسسته و آمار و احتمال
				۷۰ دقیقه	۴۰ سؤال			مجموع

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
حسابان و ریاضیات پایه	طراحان: محسن بهرامپور - عادل حسینی - میلاد منصوری - محمدسجاد نقیه کارشناسان علمی: فرشاد حسن زاده - سروش موئینی	محمدسجاد نقیه
هندسه	طراحان: سید محمدرضا حسینی فرد - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری حسین هاشمی طاهری کارشناس علمی: امیرحسین ابومحبوب	حمید گلزاری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	طراحان: مصطفی دیداری - سوگند روشنی - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی سروش موئینی کارشناسان علمی: امیرحسین ابومحبوب - مریم نظری	مصطفی دیداری

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاچانیپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرایی، فونت سؤالات، سبک کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



۱- اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$ ، حاصل  $\sin^5 x + \cos^5 x$  کدام است؟

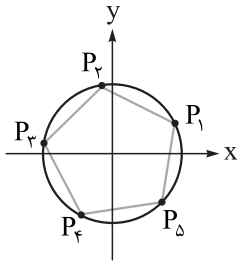
$\frac{8}{9}$  (۱)       $\frac{13}{9\sqrt{3}}$  (۲)

$\frac{11}{9\sqrt{3}}$  (۳)       $\frac{5}{9}$  (۴)

۲- اگر  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = -2$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل  $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$  کدام است؟

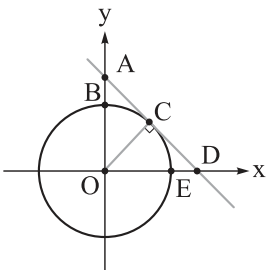
$\frac{4}{3}$  (۱)       $\frac{3}{4}$  (۲)       $\frac{4}{5}$  (۳)       $\frac{5}{4}$  (۴)

۳- در دایره مثلثاتی زیر، اگر عرض نقطه  $P_1$  برابر  $\frac{1}{3}$  و چندضلعی  $P_1P_2P_3P_4P_5$  منتظم باشد، طول نقطه  $P_4$  کدام است؟



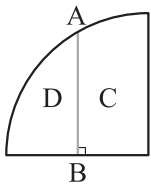
- (۱)  $-\sin 24^\circ$
- (۲)  $-\cos 24^\circ$
- (۳)  $-\sin 26^\circ$
- (۴)  $-\cos 26^\circ$

۴- در دایره مثلثاتی زیر، اگر طول پاره خط  $AB$  برابر  $\frac{1}{3}$  باشد، طول پاره خط  $DE$  کدام است؟



- (۱)  $\frac{3}{\sqrt{7}} - 1$
- (۲)  $\frac{4}{\sqrt{7}} - 1$
- (۳)  $\frac{4}{\sqrt{5}} - 1$
- (۴)  $\sqrt{5} - 1$

۵- در شکل زیر پاره خط  $AB$  به طول  $\sqrt{3}$ ، عمود منصف شعاع ربع دایره است. محیط ناحیه  $C$  چه قدر از محیط ناحیه  $D$  بیشتر است؟



- (۱)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$
- (۲)  $2 - \frac{\pi}{3}$
- (۳)  $2 - \frac{\pi}{6}$
- (۴)  $\sqrt{3} - \frac{\pi}{6}$

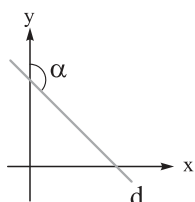
محل انجام محاسبات



۶- با فرض  $\tan 5^\circ = \frac{17}{20}$ ، حاصل  $\frac{3 \sin 40^\circ + 2 \cos 22^\circ}{3 \sin 14^\circ - \cos 5^\circ}$  کدام است؟

$\frac{13}{20}$  (۲)  $\frac{11}{20}$  (۱)

$\frac{21}{20}$  (۴)  $\frac{17}{20}$  (۳)



۷- در شکل مقابل، شیب خط  $d$  برابر  $-\frac{3}{4}$  است. حاصل  $\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$  کدام است؟

$-\frac{3}{4}$  (۲)  $-\frac{4}{3}$  (۱)

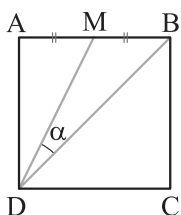
$-\frac{5}{3}$  (۴)  $-\frac{3}{5}$  (۳)

۸- اگر  $f(x) = 2 \sin x - \cos(\frac{\pi}{2} + x) + \sin(\pi - x)$ ، آن گاه شیب خطی که یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم از نمودار تابع  $f$  را به هم وصل می‌کند، حداقل کدام است؟

$-\frac{8}{\pi}$  (۴)  $-\frac{6}{\pi}$  (۳)  $-\frac{4}{\pi}$  (۲)  $-\frac{2}{\pi}$  (۱)

۹- تابع  $f(x) = \sin x + [\cos x]$  با دامنه  $[0, 2\pi]$  را در نظر بگیرید. کدام یک از خط‌های زیر با نمودار تابع  $f$ ، تعداد نقاط مشترک بیشتری دارد؟ ([ ]، نماد جزء صحیح است.)

$y = -2$  (۴)  $y = -1$  (۳)  $y = 0$  (۲)  $y = 1$  (۱)



۱۰- در مربع شکل زیر،  $M$  وسط  $AB$  است. مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟

$\frac{3}{\sqrt{10}}$  (۲)  $\frac{2}{\sqrt{10}}$  (۱)

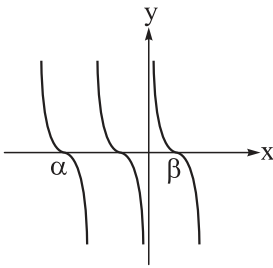
$\frac{2}{\sqrt{5}}$  (۴)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$  (۳)

۱۱- اگر  $f(x) = \frac{1}{3} - 2 \cos^2 ax$  و دورهٔ تناوب تابع  $y = \frac{1}{3} - 2f(2ax)$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  باشد، مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

۲ (۲)  $\sqrt{2}$  (۱)

۸ (۴) ۴ (۳)

محل انجام محاسبات



۱۲- شکل زیر قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cot 3x$  است. حاصل  $\frac{\alpha}{\beta}$  کدام است؟

- (۱) -۳
- (۲) -۴
- (۳) -۶
- (۴) -۲

۱۳- نمودار تابع  $f(x) = 3 \tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)$ ، محور  $y$  ها را با عرض  $a$  و محور  $x$  ها را با طول  $b$  قطع می کند و  $x = c$  معادله

یکی از مجانب های قائم آن است. اگر  $b > 0$  و  $c < 0$  باشد، کم ترین مقدار  $\frac{b-c}{a}$  کدام است؟

- (۱)  $\pi$
- (۲)  $\frac{3\pi}{2}$
- (۳)  $\frac{3\pi}{4}$
- (۴)  $\frac{5\pi}{4}$

۱۴- معادله  $\sin^2 x \cdot \tan\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = \cos^2 x \cdot \cot\left(\frac{\pi}{4} - x\right)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب حقیقی دارد؟

- (۱) ۲
- (۲) ۴
- (۳) ۶
- (۴) صفر

۱۵- انتهای کمان های زوایایی که در معادله  $\sin 2x = \tan x$  صدق می کنند، روی دایره مثلثاتی تشکیل چند نقطه می دهند؟

- (۱) ۶
- (۲) ۵
- (۳) ۳
- (۴) ۴

۱۶- اگر دوره تناوب  $f(x) = \cos ax$  برابر  $\pi$  باشد، آن گاه معادله  $f(x) + f(2x) = -1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

- (۱) ۸
- (۲) ۷
- (۳) ۶
- (۴) ۵

۱۷- تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x+1} + bx + 3$  روی دامنه اش، هم صعودی و هم نزولی است. حاصل  $\frac{f(a)}{b}$  کدام است؟

- (۱) ۳
- (۲) -۳
- (۳) -۱
- (۴) ۱

۱۸- چند جمله ای  $f(x)$  مفروض است. اگر چند جمله ای  $(f \circ f)(x)$  بر  $x-1$  بخش پذیر باشد و باقی مانده تقسیم چند جمله ای

$f(x)$  بر  $x^2 + x - 2$  برابر  $3x + 1$  باشد، باقی مانده تقسیم چند جمله ای  $x + f(x)$  بر  $x^2 - 5x + 4$  کدام است؟

- (۱)  $\frac{x+1}{3}$
- (۲)  $\frac{1-x}{3}$
- (۳)  $\frac{16-x}{3}$
- (۴)  $\frac{x-16}{3}$

محل انجام محاسبات

۱۹- اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی از رأس آن عبور نکند، آن گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی کدام است؟

- (۱) هذلولی (۲) سهمی (۳) دایره (۴) بیضی

۲۰- نقاط  $A, B, C$  و  $D$  در صفحه مفروض‌اند. تعداد نقاطی که از  $A$  و  $B$  به یک فاصله و از  $C$  و  $D$  نیز به یک فاصله هستند، کدام نمی‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) بی‌شمار

۲۱- اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  باشد، به طوری که  $|A| = 2$ ، آن گاه حاصل  $|(A^T)^{-1}| \times |2A^{-1}|$  کدام است؟

- (۱) ۳۲ (۲) ۱۶ (۳) ۸ (۴) ۴

۲۲- اگر  $A$  ماتریسی مربعی و  $I$  ماتریس همانی هم‌مرتبه با آن و وارون ماتریس  $A - 2I$  برابر با ماتریس  $B$  باشد، حاصل  $B^{-1}(A + I)B$  کدام است؟

- (۱)  $A + 2I$  (۲)  $B^{-1} + 2I$  (۳)  $B + 2I$  (۴)  $A^{-1} + 2I$

۲۳- اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به طوری که  $a_{ij}$  عضو کوچک‌تر مجموعه  $\{i, j\}$  باشد و  $\begin{bmatrix} |A| + 1 & -3|A| \\ -|A| & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$  آن گاه  $x + y$  کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) -۷ (۳) ۷ (۴) -۸

۲۴- در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع  $a$ ، مکان هندسی نقاطی درون مثلث که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو ضلع  $AB$  و  $AC$ ، دو برابر فاصله آن‌ها از ضلع  $BC$  است، کدام است؟

- (۱) پاره‌خطی به طول  $\frac{2}{3}a$  عمود بر  $BC$   
 (۲) پاره‌خطی به طول  $\frac{2}{3}a$  موازی با  $BC$   
 (۳) پاره‌خطی به طول  $\frac{1}{3}a$  عمود بر  $BC$   
 (۴) پاره‌خطی به طول  $\frac{1}{3}a$  موازی با  $BC$

۲۵- تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای، چهار برابر تعداد نقاط درونی آن است. مساحت این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱۰۳ (۲) ۱۰۲ (۳) ۱۰۱ (۴) ۱۰۰

۲۶- تعداد قطرهایی که از سه رأس متوالی یک چندضلعی محدّب می‌گذرد ۲۶ تا است. تعداد کل قطرهای این چندضلعی کدام است؟

- (۱) ۳۵ (۲) ۴۵ (۳) ۵۴ (۴) ۶۴

محل انجام محاسبات

۲۷- در دوزنقه متساوی الساقین به طول ساق ۵ و قاعده‌های ۳ و ۹، فاصله هر رأس قاعده بزرگ، از ساق مقابل آن، کدام است؟

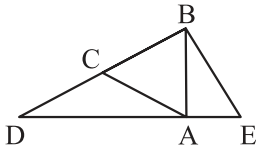
۹/۶ (۴)

۷/۲ (۳)

۱۰/۲ (۲)

۸/۴ (۱)

۲۸- در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الاضلاع و مثلث ACD متساوی الساقین است. اگر  $BE = \frac{2}{3} AD$ ، آن گاه نسبت مساحت مثلث BDE به مساحت ABC کدام است؟



۳ (۲)

$\frac{8}{3}$  (۱)

$\frac{3\sqrt{3}}{2}$  (۴)

$\frac{9}{4}$  (۳)

۲۹- از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک چهارضلعی پدید می آید. اگر محیط این چهارضلعی دو برابر طول قطر مستطیل باشد، آن گاه نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

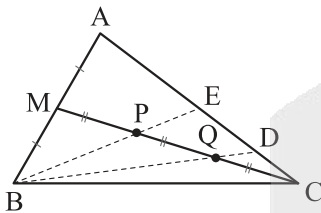
۴ (۴)

$2 + \sqrt{3}$  (۳)

$2\sqrt{3}$  (۲)

۲ (۱)

۳۰- مطابق شکل، نقاط P و Q میانه CM را به سه قسمت برابر تقسیم کرده اند، نسبت  $\frac{DE}{AC}$  برابر با کدام است؟



۰/۳ (۱)

۰/۲۵ (۲)

۰/۲ (۳)

۰/۳۵ (۴)

محل انجام محاسبات

۳۱- چند عدد صحیح  $a$  وجود دارد که به ازای آن‌ها رابطه  $|a| = (4a, 125)$  درست باشد؟

- (۱) صفر (۲) ۲ (۳) ۴ (۴) ۸

۳۲-  $n$  یک عدد طبیعی دورقمی است. دو عدد  $a$  و  $b$  به پیمانه‌های  $3n+1$  و  $n^2-n+3$  که نسبت به هم غیراول هستند، هم‌نهشت‌اند. این دو عدد به کدام پیمانه قطعاً هم‌نهشت هستند؟

- (۱) ۴۱ (۲) ۳۱ (۳) ۲۳ (۴) ۳۷

۳۳- اگر  $9k+4 \mid 5$  و  $7 \mid 15k-8$ ، باقی‌مانده  $k^2+1$  بر ۳۵ کدام است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

۳۴- در تقسیم عدد  $a$  بر عدد طبیعی  $b$ ، باقی‌مانده از مربع مقسوم‌علیه ۴۳ واحد کم‌تر است. کدام گزینه در مورد مقسوم‌علیه درست است؟

- (۱) عددی اول (۲) مضرب ۳ (۳) دورقمی (۴) مربع کامل

۳۵- چند عدد  $n$  از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$  وجود دارد که باقی‌مانده تقسیم  $n^2$  بر ۸ برابر ۴ باشد؟

- (۱) ۸ (۲) ۷ (۳) ۶ (۴) ۵

۳۶- عدد  $26^{1405} + 216^{1403}$  به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۱۹ متعلق است؟

- (۱)  $[0]$  (۲)  $[7]$  (۳)  $[13]$  (۴)  $[18]$

۳۷- چند عدد ۳ رقمی به صورت  $\overline{aba}$  و مضرب ۶ وجود دارد؟

- (۱) ۷ (۲) ۸ (۳) ۱۲ (۴) ۱۳

۳۸- رقم یکان عدد  $a$  برابر ۴ است. رقم یکان جواب معادله  $(a+3)x \equiv 1 \pmod{10}$  کدام است؟

- (۱) ۱ (۲) ۳ (۳) ۵ (۴) ۷

۳۹- ۳۱ خرداد در یک سال یکی از روزهای شنبه یا سه‌شنبه یا پنج‌شنبه است. ۳۰ آبان همان سال کدام روز هفته نمی‌تواند باشد؟

- (۱) دوشنبه (۲) چهارشنبه (۳) جمعه (۴) یکشنبه

۴۰- معادله سیاله  $11x + 7y = 389$ ، چند جواب در مجموعه اعداد صحیح نامنفی دارد؟

- (۱) ۳ (۲) ۴ (۳) ۵ (۴) ۶

محل انجام محاسبات

پاسخ نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۲:۳۰ از صفحه شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش آموزان گرامی؛  
نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سوالات این آزمون را می توانید  
از طریق آیدی @Kheilisabz\_edit در همه پیام رسان ها با ما به اشتراک بگذارید.



# آزمون آزمایشی خیلی سبز

مرحله هشتم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/۰۷/۰۷

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

دفترچه شماره دو

پایه

مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	مدت پاسخگویی	دوازدهم	یازدهم	دهم
فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه	فصل ۱ (از ابتدای حرکت با شتاب ثابت) و فصل ۲ (تا ابتدای تکانه و قانون دوم نیوتون) صفحه ۱۵ تا ۴۴	-	فصل ۴ صفحه ۸۳ تا ۱۲۶
شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه	فصل ۱ (از ابتدای ثابت تعادل و قدرت اسیدی) و فصل ۲ (تا ابتدای سلول سوختی، منبعی برای تولید انرژی سبز) صفحه ۲۰ تا ۵۰	-	فصل ۲ (از ابتدای رفتار گازها) و فصل ۳ (تا ابتدای محلول و مقدار حل شونده‌ها) صفحه ۷۶ تا ۹۲
مجموع	۶۵ سؤال			۷۵ دقیقه		-	

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا	مسئول درس - گزینشگر
فیزیک	طراحان: یاشار انگوتی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی کارشناسان علمی: علیرضا جباری - سعید محبی	رضا سبزمیدانی - نوید شاهی
شیمی	طراحان: بیمان خواجوی مجد - هادی عبادی - یاسر عبداللهی - امیر قاسمی پور محمد قهرمانی نژاد - محسن مجنون - عرفان نریمانی - مرتضی نصیرزاده کارشناسان علمی: یاشار ذریه - سینا رضادوست	یاسر عبداللهی - مرتضی نصیرزاده

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور

این آزمون نمره منفی دارد.

استفاده از ماشین حساب مجاز نیست.

دفترچه سؤالات آزمون های خیلی سبز، از همه نظر (تعداد سؤال ها، زمان پاسخگویی، نوع چینش گزینه ها، نوع صفحه آرای، فونت سؤالات، سایز کلمات و اعداد، جای خالی محل انجام محاسبات و ...) در شبیه ترین حالت به دفترچه سؤالات کنکور سراسری طراحی می شود.



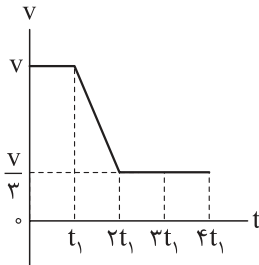
۴۱- متحرکی با شتاب ثابت  $\vec{a} = (-3 \text{ m/s}^2)\vec{i}$  در راستای محور X در حال حرکت است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول برابر  $\vec{v} = (2/5 \text{ m/s})\vec{i}$  باشد، سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه سوم برابر چند متر بر ثانیه است؟

- (۱)  $27/5 \vec{i}$  (۲)  $17/5 \vec{i}$  (۳)  $-17/5 \vec{i}$  (۴)  $-27/5 \vec{i}$

۴۲- متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور X حرکت می‌کند. در بازه‌ای که سرعت متحرک از  $\vec{v}_1 = (-5 \text{ m/s})\vec{i}$  به  $\vec{v}_2 = (15 \text{ m/s})\vec{i}$  می‌رسد، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

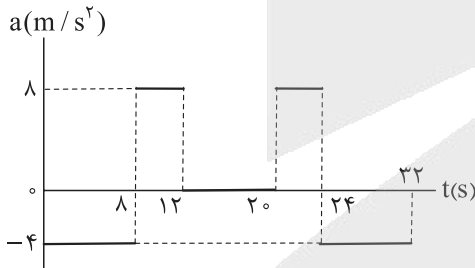
- (۱) ۵ (۲) ۱۰ (۳)  $6/25$  (۴)  $12/5$

۴۳- نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در کدام بازه زمانی کم‌تر است؟

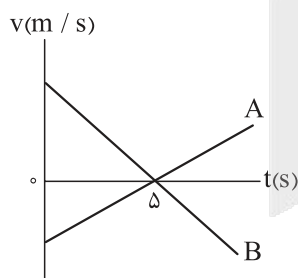


- (۱)  $t = 0$  تا  $t_1$   
 (۲)  $t = 0$  تا  $2t_1$   
 (۳)  $t = 0$  تا  $3t_1$   
 (۴)  $t = 0$  تا  $4t_1$

۴۴- نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می‌کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر  $\vec{v}_0 = (16 \text{ m/s})\vec{i}$  باشد، در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 32 \text{ s}$  کدام یک از موارد زیر درباره این متحرک درست است؟



- (۱) متحرک ۸ s در خلاف جهت محور X حرکت کرده است.  
 (۲) متحرک ۳ مرتبه تغییر جهت داده است.  
 (۳) حرکت متحرک ۱۲ s به صورت تندشونده است.  
 (۴) اندازه جابه‌جایی متحرک ۵۱۲ m است.



۴۵- نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور X حرکت می‌کنند، به شکل مقابل و فاصله آنها در مبدأ زمان برابر ۷۵ m است. اگر در لحظه‌ای که جهت حرکت دو متحرک تغییر می‌کند، دو متحرک در یک مکان باشند، فاصله دو متحرک در لحظه  $t = 8 \text{ s}$  برابر چند متر است؟

- (۱) ۲۷ (۲) ۳۰  
 (۳) ۴۵ (۴) ۱۲۰

محل انجام محاسبات

۴۶- در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع  $H$  رها می‌شود. اگر تندی گلوله  $۸ \text{ m/s}$  قبل از برخورد به زمین برابر  $۴۰ \text{ m/s}$  باشد،  $H$  برابر چند متر است؟ ( $g = ۱۰ \text{ m/s}^2$ )

۱۲۵/۲(۴)

۱۱۵/۲(۳)

۹۳/۲(۲)

۸۳/۲(۱)

۴۷- در شکل (الف)، مقوای روی لیوان و در شکل (ب)، نخ متصل به پایین گوی سنگین را به صورت ناگهانی می‌کشیم. به ترتیب در هر شکل کدام اتفاق رخ می‌دهد؟



(ب)



(الف)

(۱) سکه روی مقوا همراه با مقوا حرکت می‌کند. - نخ متصل به بالای گوی، پاره می‌شود.

(۲) سکه روی مقوا همراه با مقوا حرکت می‌کند. - نخ متصل به پایین گوی پاره می‌شود.

(۳) سکه در لیوان زیر مقوا می‌افتد. - نخ متصل به بالای گوی، پاره می‌شود.

(۴) سکه در لیوان زیر مقوا می‌افتد. - نخ متصل به پایین گوی، پاره می‌شود.

۴۸- شخصی روی یک ترازوی فنری در آسانسور ایستاده و آسانسور در حال حرکت است. در کدام یک از حالت‌های زیر، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، الزاماً کم‌تر از وزن جسم است؟

(۱) حرکت آسانسور تندشونده باشد. (۲) حرکت آسانسور کندشونده باشد.

(۳) سرعت آسانسور به سمت پایین باشد. (۴) شتاب آسانسور به سمت پایین باشد.

۴۹- می‌خواهیم به جسمی که جرم آن  $۲ \text{ kg}$  است، شتابی به بزرگی  $۳ \text{ m/s}^2$  بدهیم تا در راستای قائم رو به پایین شروع به حرکت کند. نیرویی که باید به جسم وارد کنیم، چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ( $g = ۱۰ \text{ N/kg}$  و مقاومت هوا ناچیز است.)

(۱)  $۱۴$ ، به سمت بالا

(۲)  $۱۴$ ، به سمت پایین

(۳)  $۲۶$ ، به سمت بالا

(۴)  $۲۶$ ، به سمت پایین

۵۰- جرم دو ذره باردار  $A$  و  $B$  به ترتیب  $۲ \text{ kg}$  و  $۳ \text{ kg}$  است. اگر نیروی الکتریکی که ذره  $A$  به ذره  $B$  وارد می‌کند، در SI به صورت  $\vec{F} = ۶\vec{i} - ۱۲\vec{j}$  باشد، شتاب ذره  $A$  بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (از سایر نیروهای وارد بر دو ذره چشم‌پوشی کنید.)

(۱)  $۲\vec{i} - ۴۰\vec{j}$

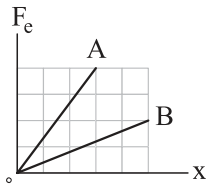
(۲)  $-۲۰\vec{i} + ۴۰\vec{j}$

(۳)  $۳۰\vec{i} - ۶۰\vec{j}$

(۴)  $-۳۰\vec{i} + ۶۰\vec{j}$

محل انجام محاسبات

۵۱- نمودار نیروی کشسانی دو فنر A و B بر حسب تغییر طول آنها به شکل زیر است. ثابت فنر A چند برابر ثابت فنر B است؟



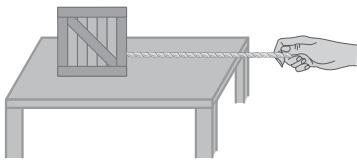
$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{8}{15} \quad (1)$$

$$\frac{10}{3} \quad (4)$$

$$\frac{3}{10} \quad (3)$$

۵۲- در شکل زیر، توسط یک نخ افقی با جرم ناچیز، جعبه ساکنی به جرم  $5 \text{ kg}$  را روی سطح افقی یک میز به ضریب اصطکاک جنبشی  $0.4$  به حرکت درمی آوریم. اگر تندی جعبه پس از  $80 \text{ cm}$  جابه جایی به  $8 \text{ m/s}$  برسد، کدام یک



از موارد زیر درست است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

(الف) اندازه نیروی کشش نخ  $18 \text{ N}$  است.

(ب) اندازه نیروی کشش نخ  $22 \text{ N}$  است.

(پ) نیرویی که نخ به دست شخص وارد می کند، به سمت چپ است.

(ت) اندازه نیرویی که طناب به جعبه وارد می کند، بزرگ تر از اندازه نیرویی است که جعبه به طناب وارد می کند.

(۲) الف - ت

(۱) الف - پ

(۴) ب - ت

(۳) ب - پ

۵۳- دو گوی هم اندازه A و B را که جرم گوی B بیشتر از جرم گوی A است، از بالای برجی به طور هم زمان رها می کنیم. با فرض این که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی ثابت و یکسان باشد، به ترتیب تندی برخورد کدام گوی با زمین بیشتر است و کدام گوی زودتر به زمین می رسد؟

(۲) A و A

(۱) B و B

(۴) B و A

(۳) A و B

۵۴- جسمی به جرم  $4 \text{ kg}$  را به انتهای فنری به طول  $30 \text{ cm}$  و ثابت  $600 \text{ N/m}$  می بندیم. انتهای دیگر فنر را به سقف آسانسوری متصل می کنیم. با حرکت آسانسور، طول فنر به  $35 \text{ cm}$  می رسد. در این حالت، شتاب آسانسور چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ )

(۲)  $2/5$ ، رو به پایین

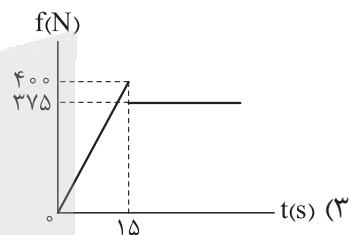
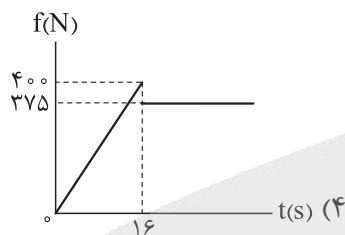
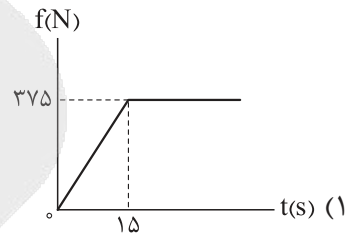
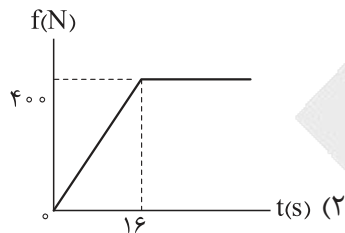
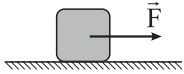
(۱)  $2/5$ ، رو به بالا

(۴)  $7/5$ ، رو به پایین

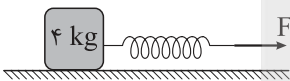
(۳)  $7/5$ ، رو به بالا

محل انجام محاسبات

۵۵- در شکل زیر، جسمی به جرم  $50 \text{ kg}$  روی سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی  $0/8$  و ضریب اصطکاک جنبشی  $0/75$  ساکن است. به این جسم نیروی افقی  $\vec{F}$  وارد می‌شود. اگر اندازه نیروی  $\vec{F}$  بر حسب زمان در SI به صورت  $F = 25t$  تغییر کند، نمودار اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم بر حسب زمان  $(t)$  کدام است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



۵۶- در شکل زیر، جسمی به جرم  $4 \text{ kg}$  روی سطح افقی توسط فنری افقی با ثابت  $500 \text{ N/m}$  و با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر بزرگی نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند  $50 \text{ N}$  باشد، طول فنر نسبت به طول عادی آن چند سانتی‌متر افزایش پیدا می‌کند؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$  و مقاومت هوا ناچیز است.)



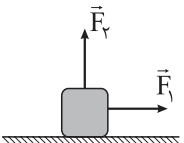
۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

۴ (۱)

۵۷- در شکل زیر، به جسمی به جرم  $8 \text{ kg}$  نیروی افقی و ثابت  $\vec{F}_1$  و نیروی قائم  $\vec{F}_2$  وارد می‌شود و جسم روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازه نیروی  $\vec{F}_2$ ،  $20 \text{ N}$  افزایش یابد، اندازه شتاب جسم  $1/5 \text{ m/s}^2$  تغییر می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی سطح افقی برابر کدام است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



$\frac{3}{5}$  (۴)

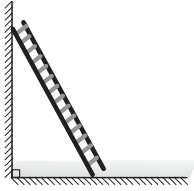
$\frac{5}{3}$  (۳)

$\frac{3}{10}$  (۲)

$\frac{10}{3}$  (۱)

محل انجام محاسبات

۵۸- در شکل زیر، نردبانی همگن به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است. ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان ۰/۷۵ است. در آستانه سر خوردن نردبان، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، چند برابر نیرویی است که دیوار به نردبان وارد می‌کند؟



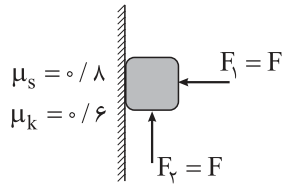
(۲)  $\frac{4}{5}$

(۱)  $\frac{3}{5}$

(۴)  $\frac{5}{4}$

(۳)  $\frac{5}{3}$

۵۹- در شکل زیر، جسمی به جرم ۹ kg با نیروی افقی  $\vec{F}_1$  به دیوار قائمی تکیه داده شده است و با وجود نیروی قائم  $\vec{F}_2$  در آستانه حرکت به سمت پایین قرار دارد. اگر اندازه هر یک از دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$ ، ۲ برابر شود، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می‌شود؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



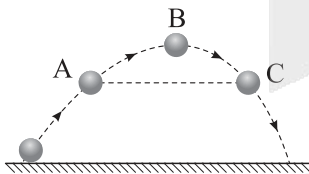
(۲)  $\frac{1}{4}$

(۱)  $\frac{1}{5}$

(۴)  $\frac{4}{5}$

(۳)  $\frac{3}{5}$

۶۰- شکل زیر توپی را نشان می‌دهد که از سطح افقی زمین به صورت مایل و رو به بالا پرتاب شده است. اگر اندازه شتاب توپ در سه نقطه A، B و C به ترتیب  $a_A$ ،  $a_B$  و  $a_C$  باشد، با در نظر گرفتن مقاومت هوا کدام مقایسه الزاماً درست است؟ (A و C در یک ارتفاع از سطح زمین قرار دارند.)



(۱)  $a_A > a_C > a_B$

(۲)  $a_B > a_A > a_C$

(۳)  $a_A > a_B$  و  $a_A > a_C$

(۴)  $a_A > a_B$  و  $a_C > a_B$

۶۱- کدام یک از موارد زیر درست است؟

(۱) کمیت دماسنجی ترموکوپل، جریان الکتریکی است.

(۲) با افزایش دمای آب، گرمای نهان تبخیر آن افزایش می‌یابد.

(۳) در رساناهای فلزی، سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرما بیشتر از اتم‌ها است.

(۴) در طی شب، پدیده همرفت موجب نسیمی از سوی دریا به سمت ساحل می‌شود.

محل انجام محاسبات

۶۲- مطابق جدول زیر، به سه جسم با جرم‌های معلوم، گرماهای معینی داده‌ایم و افزایش دمای هر کدام مشخص است. در مورد مقایسه ظرفیت گرمایی آن‌ها، کدام رابطه درست است؟

جسم	جرم (kg)	گرمای داده شده (J)	افزایش دما °C
A	۲	۱۸۰۰	۲
B	۱	۱۲۰۰	۲
C	۱/۵	۳۰۰۰	۴

$$C_A > C_C > C_B \quad (۲)$$

$$C_B > C_C > C_A \quad (۱)$$

$$C_C > C_A > C_B \quad (۴)$$

$$C_B > C_A > C_C \quad (۳)$$

۶۳- روی یک ورقه فلزی، حفره‌ای دایره‌ای شکل به قطر ۴ cm ایجاد می‌کنیم. اگر دمای ورقه °F ۱۳۵ افزایش یابد،

مساحت حفره چند میلی‌متر مربع افزایش می‌یابد؟  $(\alpha = ۳ \times ۱۰^{-۵} \text{ K}^{-۱})$

$$۰/۰۱۸ \quad (۲)$$

$$۰/۰۳۶ \quad (۱)$$

$$۱/۸ \quad (۴)$$

$$۳/۶ \quad (۳)$$

۶۴- یک کره مسی توپر به جرم ۹۰۰ g، چند کیلوژول گرما دریافت کند تا چگالی آن ۰/۶ درصد کاهش یابد؟ (گرمای ویژه

مس  $\frac{J}{kg.K}$  ۴۰۰ و ضریب انبساط طولی آن  $\frac{1}{K} ۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$  است.)

$$۱۲۰ \quad (۴)$$

$$۴۰ \quad (۳)$$

$$۱۲ \quad (۲)$$

$$۴ \quad (۱)$$

۶۵- در دمای صفر درجه سلسیوس، طول دو میله فلزی A و B، یکسان و برابر ۳۰ cm است. اگر ضریب انبساط طولی

دو میله به ترتیب  $\frac{1}{K} ۲ \times ۱۰^{-۵}$  و  $\frac{1}{K} ۶ \times ۱۰^{-۵}$  باشد، با افزایش هم‌زمان دمای میله‌ها، در دمای چند درجه فارنهایت

اختلاف طول دو میله به ۰/۶ mm می‌رسد؟

$$۱۲۲ \quad (۴)$$

$$۹۰ \quad (۳)$$

$$۸۲ \quad (۲)$$

$$۵۰ \quad (۱)$$

۶۶- یک ظرف سربی به گنجایش ۱ L در دمای °C ۲۰ به طور کامل از بنزن پر شده است. دمای ظرف و بنزن درون

آن را به چند کلوین برسانیم تا  $۶۲ \text{ cm}^۳$  بنزن از ظرف سرریز شود؟ (ضریب انبساط طولی سرب  $K^{-۱} ۳ \times ۱۰^{-۵}$  و ضریب

انبساط حجمی بنزن  $K^{-۱} ۱۲/۴۹ \times ۱۰^{-۳}$  است.)

$$۳۴۳ \quad (۴)$$

$$۳۲۳ \quad (۳)$$

$$۷۰ \quad (۲)$$

$$۵۰ \quad (۱)$$

محل انجام محاسبات

۶۷- در یک روز زمستانی، بخار آب موجود در اتاقی روی شیشه پنجره به شکل مایع درمی آید و قطره قطره می شود. اگر دمای شیشه برابر  $0^{\circ}\text{C}$  باشد، برای آن که  $50\text{ g}$  آب روی شیشه تشکیل شود، چند کیلوژول گرما و چگونه مبادله می شود؟ (گرمای نهان تبخیر آب در دمای  $0^{\circ}\text{C}$  برابر  $2480\text{ kJ/kg}$  است.)

(۱)  $124$ ، از بخار آب به شیشه منتقل می شود. (۲)  $124$ ، از شیشه به بخار آب منتقل می شود.

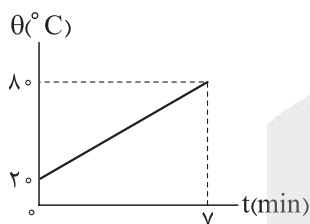
(۳)  $12/4$ ، از بخار آب به شیشه منتقل می شود. (۴)  $12/4$ ، از شیشه به بخار آب منتقل می شود.

۶۸- به مقداری یخ با دمای  $20^{\circ}\text{C}$  - گرما می دهیم تا در نهایت نیمی از آن ذوب شود. چند درصد از گرمای داده شده به یخ صرف ذوب کردن آن شده است؟ ( $L_F = 336\text{ kJ/kg}$  و  $c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ )

(۱)  $50$  (۲)  $60$

(۳)  $75$  (۴)  $80$

۶۹- یک کتری برقی محتوی  $2\text{ kg}$  آب است و  $80\%$  درصد از انرژی تولیدی کتری، صرف افزایش دمای آب می شود. اگر نمودار دمای آب بر حسب زمان به شکل زیر باشد، توان ورودی کتری برقی چند کیلووات است؟ ( $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}}$ )



(۱)  $1/2$

(۲)  $1/5$

(۳)  $1/6$

(۴)  $2$

۷۰- درون یک ظرف فلزی که دمای آن  $10^{\circ}\text{C}$  است،  $200\text{ g}$  آب با دمای  $30^{\circ}\text{C}$  می ریزیم و یک قطعه از جنس نقره به جرم  $1\text{ kg}$  و دمای  $90^{\circ}\text{C}$  را درون آن می اندازیم. اگر دمای مجموعه پس از ایجاد تعادل گرمایی به  $40^{\circ}\text{C}$  برسد، ظرفیت گرمایی ظرف در

SI کدام است؟ ( $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}}$ ،  $c_{\text{نقره}} = 240 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{C}}$  و از تبادله گرمایی با محیط چشم پوشی شود.)

(۱)  $120$  (۲)  $1200$

(۳)  $360$  (۴)  $3600$

۷۱- ظرفی محتوی مخلوطی از آب و یخ خالص در فشار  $1\text{ atm}$  در تعادل گرمایی است. یک قطعه فلز  $200\text{ g}$  به گرمای  $800 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$  و دمای  $210^{\circ}\text{C}$  را درون ظرف می اندازیم. اگر تا رسیدن به تعادل گرمایی، جرم یخ موجود در ظرف

$25\%$  درصد کاهش یابد، جرم یخ باقی مانده در ظرف چند گرم است؟ ( $L_F = 336\text{ J/g}$  و  $c_{\text{آب}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$ )

(۱)  $100$  (۲)  $200$  (۳)  $300$  (۴)  $400$

محل انجام محاسبات

۷۲- درون مقداری آب به جرم  $m$  و دمای  $40^\circ\text{C}$ ، قطعه یخی به جرم  $m'$  و دمای  $20^\circ\text{C}$  می‌اندازیم. کدام عبارت‌ها دربارهٔ تعادل گرمایی مجموعه درست است؟  $(\frac{J}{g.K} = 4/2 = 2c_{\text{ice}} = c_{\text{water}}, L_F = 336 \text{ J/g})$  و تبادل گرما با محیط ناچیز است.)

الف) اگر  $m' = \frac{2}{9}m$  باشد، دمای تعادل مجموعه  $0^\circ\text{C}$  می‌شود.

ب) اگر  $m' = 4m$  باشد، پس از تعادل هم، جرم یخ همان  $m'$  باقی می‌ماند.

پ) اگر  $m' = 12m$  باشد، دمای تعادل مجموعه  $0^\circ\text{C}$  می‌شود.

(۱) الف - ب

(۲) الف - پ

(۳) ب - پ

(۴) الف - ب - پ

۷۳- درون مخزنی به حجم  $15 \text{ L}$ ، مقداری گاز آرمانی با دمای  $27^\circ\text{C}$  وجود دارد. فشارسنج متصل به مخزن، فشار گاز را  $9 \text{ atm}$  نشان می‌دهد. دمای گاز را به  $77^\circ\text{C}$  و حجم مخزن را به  $35 \text{ L}$  می‌رسانیم. فشاری که فشارسنج در این حالت نشان می‌دهد، چند اتمسفر است؟ (فشار هوای محیط  $1 \text{ atm}$  است.)

(۱) ۴

(۲) ۴/۵

(۳) ۵

(۴) ۵/۵

۷۴- مخزنی به حجم  $60 \text{ L}$  حاوی مخلوطی از گازهای هیدروژن و نیتروژن در دمای  $127^\circ\text{C}$  و فشار  $4 \times 10^5 \text{ Pa}$  است. اگر جرم هیدروژن و نیتروژن موجود در مخزن برابر باشد، چند مول نیتروژن درون مخزن وجود دارد؟  $(R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$

$(M_{N_2} = 28 \text{ g/mol}, M_{H_2} = 2 \text{ g/mol})$

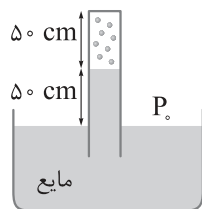
(۱) ۰/۲

(۲) ۰/۵

(۳) ۵

(۴) ۷

۷۵- در شکل زیر،  $4/0$  مول گاز آرمانی در انتهای لولهٔ وارونه با مساحت مقطع  $200 \text{ cm}^2$  محبوس است. اگر چگالی مایع  $8 \text{ g/cm}^3$  باشد، دمای گاز حبس شده چند درجهٔ سلسیوس است؟  $(P_0 = 100 \text{ kPa}$  و  $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}})$



(۱) ۴۰۰

(۲) ۳۰۰

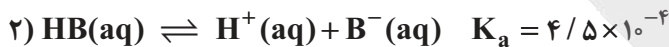
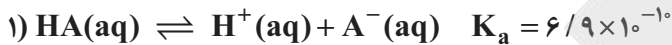
(۳) ۱۲۷

(۴) ۲۷

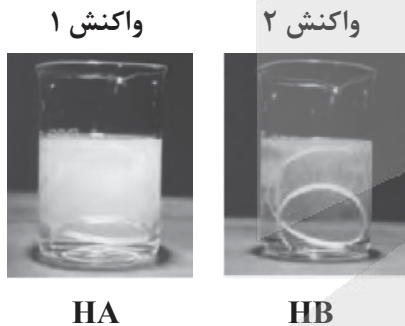
محل انجام محاسبات

۷۶- کدام مورد، درست است؟

- ۱) ثابت تعادل (K) برای هر واکنش تعادلی، همواره عددی ثابت است.
  - ۲) در هر گستره زمانی، شمار مول‌های یونیده شده HBr در آب، با شمار مول‌های HBr حاصل از پیوستن یون‌های  $H^+$  و  $Br^-$  به یکدیگر، برابر است.
  - ۳) واکنش‌های رفت و برگشت در سامانه‌های تعادلی، با سرعت برابری انجام می‌شوند.
  - ۴) از یونش  $0.625$  / مول استیک اسید در آب،  $0.3$  / مول یون هیدرونیوم و  $0.325$  / مول یون استات تولید می‌شود.
- ۷۷- با توجه به تعادل‌های زیر (در دما و غلظت یکسان)، کدام مطلب درست است؟

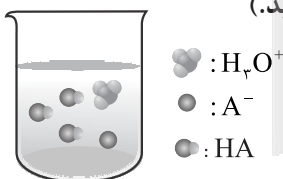


- ۱) رسانایی الکتریکی محلول HB، بیشتر از محلول HA است.
  - ۲) غلظت یون هیدرونیوم در محلول HB، کم‌تر است.
  - ۳) قدرت اسیدی HA بیشتر از HB است.
  - ۴) اگر HB فورمیک اسید باشد، HA می‌تواند اتانوائیک اسید باشد.
- ۷۸- با توجه به شکل زیر که چند ثانیه اول واکنش محلول دو اسید متفاوت با مقدار یکسانی از نوار منیزیم در دمای معینی را نشان می‌دهد، کدام عبارت به یقین درست است؟ (حجم هر دو محلول برابر است و در پایان هر دو واکنش، نوار فلزی از بین می‌رود.)



- ۱) ثابت یونش HA از HB بیشتر است.
- ۲) اگر غلظت اولیه دو اسید برابر باشد، حجم گاز نهایی تولیدی در واکنش «۱» بیشتر است.
- ۳) اگر HA و HB به ترتیب HF و HCl باشند، غلظت اولیه HA بسیار بیشتر از HB است.
- ۴) pH محلول HA بیشتر از pH محلول HB است.

۷۹- با توجه به شکل زیر که نمای ذره‌ای  $2/5$  L از محلول HA را در دمای اتاق نشان می‌دهد، به ترتیب pH محلول چه قدر بوده و غلظت اولیه اسید چند مولار است؟ (هر ذره را معادل  $0.02$  / مول در نظر بگیرید.)



- ۱)  $2/1$  -  $0.08$
- ۲)  $1/7$  -  $0.08$
- ۳)  $2/1$  -  $0.32$
- ۴)  $1/7$  -  $0.32$

محل انجام محاسبات

۸۰- در دمای ثابت، با رقیق کردن محلول یک اسید ضعیف با آب، چه تعداد از موارد زیر افزایش می‌یابد؟

الف) درجه یونش

ب) نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به هیدرونیوم

ج) pH محلول

د) ثابت یونش اسید

۱ (۱)      ۲ (۲)      ۳ (۳)      ۴ (۴)

۸۱- به نیم‌لیتر محلول ۰/۱ مولار باریم هیدروکسید، در هر دقیقه ۱۰۰ mL آب اضافه می‌شود. پس از چند دقیقه pH محلول به ۱۳ می‌رسد؟ (دما را ثابت و برابر با ۲۵°C فرض کنید.)

۵ (۱)      ۱۰ (۲)      ۱۵ (۳)      ۲۰ (۴)

۸۲- محلول‌های مولار از دو اسید HX و HY و دو باز AOH و BOH موجود می‌باشند. در دمای معینی، اختلاف pH محلول‌های HX و AOH، ۴ واحد از اختلاف pH محلول‌های HY و BOH بیشتر است. اگر pH محلول‌های AOH و BOH به ترتیب برابر ۱۲ و ۱۳ باشد، کدام عبارت در مورد این محلول‌ها درست است؟

(۱) اختلاف pH محلول‌های HX و HY برابر ۳ است.

(۲) نسبت ثابت یونش HX به HY و این نسبت در BOH به AOH، به یقین عددی بزرگ‌تر از یک است.

(۳) با افزایش دما به یک اندازه، pH هر چهار محلول به یک اندازه تغییر می‌کند.

(۴) اگر BOH محلول سود باشد، HX به یقین محلول جوهرنمک است.

۸۳- pH محلول ۰/۰۰۶ مولار کدام ترکیب در دمای ۲۵°C می‌تواند برابر ۱۲/۱ باشد؟

(۱) اتیلن گلیکول

(۲) دی‌متیل آمین

(۳) پتاسیم هیدروکسید

(۴) کلسیم هیدروکسید

۸۴- کدام مورد، درست است؟

(۱) شیر منیزی برخلاف شیر، نور را پخش نمی‌کند.

(۲) ضداسیدها بخشی از اسید معده را خنثی کرده و pH محتویات معده را کاهش می‌دهند.

(۳) در محلول شیشه‌پاک‌کن، رابطه  $[H^+] < [OH^-]$  برقرار است.

(۴) برای باز کردن مسیر لوله‌هایی که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده می‌شود.

۸۵- برای خنثی کردن یک لیتر محلول هیدروفلوئوریک اسید با  $pH = 2/4$ ، ۳/۱ گرم پودر سدیم اکسید به محلول اضافه می‌شود. درجه یونش اسید کدام است؟ ( $Na = 23, O = 16 : g.mol^{-1}$ )

$Na_2O + HF \rightarrow NaF + H_2O$  (معادله موازنه شود.)

۰/۰۲ (۱)      ۰/۰۴ (۲)      ۰/۰۵ (۳)      ۰/۰۵۵ (۴)

محل انجام محاسبات

۸۶- کدام مورد نادرست است؟

- (۱) با اضافه کردن مقداری آمونیاک به آب در دمای ثابت،  $[OH^-]$  افزایش و در نتیجه حاصل  $[H^+][OH^-]$  افزایش می‌یابد.
- (۲) یکی از فرآورده‌های واکنش جوش شیرین با هیدروکلریک اسید، یک اسید آرنیوس است.
- (۳) واکنش نمادین خنثی شدن اسید و باز، همانند واکنش یونش نیتریک اسید، یک واکنش یک‌طرفه است.
- (۴) شکوفه‌های گل ادریسی در خاکی با  $[OH^-] = 5 \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$ ، به رنگ آبی درمی‌آیند.

۸۷- کدام مورد، درست است؟

- (۱) انرژی الکتریکی تولیدشده به کمک الکتروشیمی، پاک اما پرهزینه است.
- (۲) یکی از کاربردهای الکتروشیمی در قلمرو کنترل کیفی، pH سنج دیجیتال است.
- (۳) با یک تیغه مس، یک تیغه روی و مقداری محلول اتانول و آب، می‌توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.
- (۴) با دو تیغه از جنس روی و با میوه‌ای مانند لیمو، می‌توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.

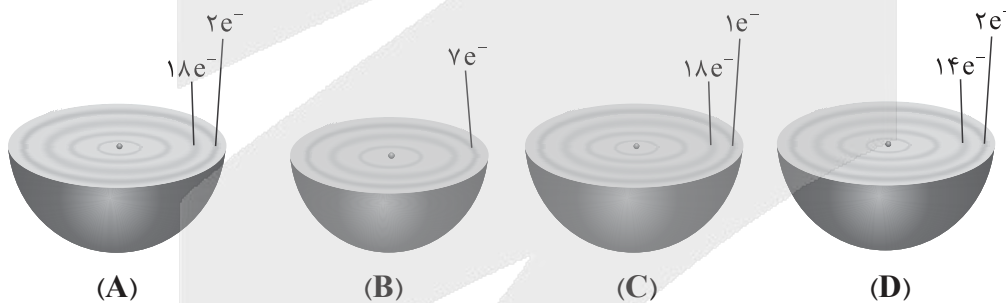
۸۸- با توجه به شکل زیر که الگویی ساده از یک واکنش اکسایش - کاهش بین دو اتم را نشان می‌دهد، گونه‌های B و C

به ترتیب کدام‌اند؟



- (۱) اکسنده - محصول کاهش
- (۲) کاهش‌یافته - محصول اکسایش
- (۳) کاهنده - محصول اکسایش
- (۴) اکسایش‌یافته - محصول کاهش

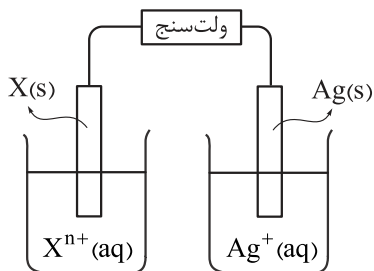
۸۹- با توجه به شکل‌های زیر که بخشی از اتم چند عنصر را نشان می‌دهند، کدام مورد، نادرست است؟



- (۱) اگر قطعه‌ای از فلز A را در محلولی حاوی یون‌های C قرار دهیم، دمای محلول به تدریج افزایش می‌یابد.
- (۲) قدرت کاهندگی A از D بیشتر است و B برخلاف A، خاصیت اکسندگی دارد.
- (۳) در واکنش A با B، به ازای مصرف هر مول A،  $6.02 \times 10^{23}$  الکترون بین اکسنده و کاهنده مبادله می‌شود.
- (۴) در واکنش  $D + C^{2+} \rightarrow D^{2+} + C$ ، D کاهنده و  $C^{2+}$  اکسنده است.

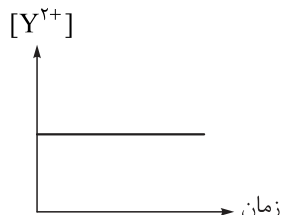
محل انجام محاسبات

۹۰- دانش آموزی یک سلول گالوانی مطابق شکل زیر تشکیل می‌دهد و بعد از اتصال ولت‌سنج در مدار، عدد صفر بر روی آن نمایش داده می‌شود. کدام عامل می‌تواند دلیل این اتفاق باشد؟



- (۱) فلز پایداری مانند طلا و پلاتین می‌باشد و اکسایش نمی‌یابد.
- (۲) تبادل یون میان دو نیم‌سلول انجام نمی‌شود.
- (۳) غلظت اولیه محلول دو الکترولیت با هم برابر نیستند.
- (۴) ابعاد و جرم دو الکترود تفاوت زیادی با هم دارد.

۹۱- برای بررسی رفتارهای الکتروشیمیایی چند فلز و محلول‌های حاوی یون‌های آن‌ها، آزمایش‌های زیر انجام شده است. با توجه به نتایج به دست آمده، کدام مورد نادرست است؟

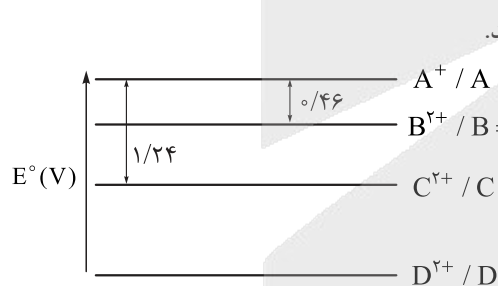


- (الف) با قراردادن تیغه A درون محلول  $X^{2+}$ ، دما افزایش یافت.
- (ب) با قراردادن تیغه A درون محلول  $Y^{2+}$ ، نمودار تغییرات غلظت یون‌های  $Y^{2+}$  به صورت روبه‌رو به دست آمد.

(۱) مقایسه قدرت کاهندگی فلزهای مورد آزمایش به صورت  $Y > A > X$  است.  
 (۲) با قراردادن تیغه X درون محلول  $Y^{2+}$ ، فلز Y ته‌نشین می‌شود.  
 (۳) اگر A با محلول مولار HCl واکنش دهد، Y به یقین با این محلول واکنش داده ولی در مورد X، نمی‌توان با یقین اظهار نظر کرد.

(۴) میزان افزایش دما در واکنش تیغه Y با محلول  $X^{2+}$ ، بیشتر از واکنش این تیغه با محلول  $A^{2+}$  است.

۹۲- با توجه به نمودار پتانسیل کاهش زیر و گونه‌های موجود در آن، کدام عبارت نادرست است؟ (A, B, C, D و عناصرهای فلزی‌اند.)



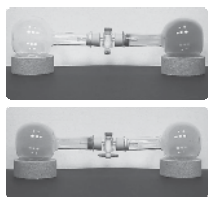
- (۱) به ترتیب  $A^{+}$  و  $D^{2+}$ ، قوی‌ترین و ضعیف‌ترین گونه‌های اکسندنده‌اند.
- (۲) دو فلز C و D می‌توانند با محلول ۱ مولار HCl واکنش دهند.
- (۳) اگر فلز C در اتصال با SHE، سلول گالوانی تشکیل دهد،  $B^{2+}/B = 0.34$ .
- (۴) واکنش فلز D با محلول‌هایی حاوی یون سایر فلزها، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود.

۹۳- قطعه‌ای از فلز آلومینیم به جرم ۴۰ گرم را در ۵۰۰ میلی‌لیتر محلول ۰/۵ مولار مس (II) سولفات وارد می‌کنیم. اگر پس از مدتی ۰/۳ مول الکترون بین گونه اکسند و کاهنده مبادله شود، جرم تیغه به چند گرم و غلظت محلول مس (II) سولفات به چند مولار خواهد رسید؟ (حجم محلول ثابت فرض شود و ۴۰ درصد فلز مس ایجاد شده روی تیغه آلومینیم رسوب می‌کند،  $Al = 27, Cu = 64 \text{ g.mol}^{-1}$ )

- (۱)  $41/14$  -  $0/2$
- (۲)  $44/98$  -  $0/2$
- (۳)  $41/14$  -  $0/3$
- (۴)  $44/98$  -  $0/3$

محل انجام محاسبات

۹۴- با توجه به شکل‌های زیر، کدام عبارت در مورد رفتار گازها نادرست است؟



(ت)

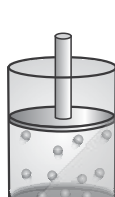


۲۰°C



۳۰°C

(پ)



(ب)

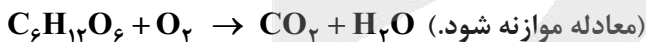


(الف)



- ۱) شکل (الف) بیان می‌کند، در دمای ثابت، حجم یک نمونه گاز با فشار رابطه عکس دارد.
  - ۲) شکل (ب) بیان می‌کند، در دما و فشار ثابت، حجم گاز، رابطه خطی با شمار مول‌های آن دارد.
  - ۳) شکل (پ) بیان می‌کند، در فشار ثابت، حجم یک نمونه گاز با افزایش دمای آن از ۲۰°C تا ۳۰°C، یک و نیم برابر می‌شود.
  - ۴) شکل (ت) بیان می‌کند، حجم یک نمونه گاز با حجم ظرف محتوی آن برابر است.
- ۹۵- بادکنکی حاوی گاز هلیم، از خلیج فارس در امتداد قائم تا ارتفاع سه کیلومتر اوج می‌گیرد. در کدام گزینه، تغییر حجم و دلیل علمی آن به درستی بیان شده است؟ (دمای سطح دریا را ۲۷°C فرض کنید).

- ۱) حجم کاهش می‌یابد. - با افزایش ارتفاع، دما کاهش یافته، جنب‌وجوش و فاصله بین ذرات گاز کم می‌شود.
  - ۲) حجم کاهش می‌یابد. - با افزایش ارتفاع، چگالی هلیم کاهش می‌یابد.
  - ۳) حجم افزایش می‌یابد. - با افزایش ارتفاع، دما و فشار گاز کاهش می‌یابد، ولی تأثیر کاهش فشار غالب‌تر بوده و فاصله بین ذرات گاز زیاد می‌شود.
  - ۴) حجم تغییر نمی‌کند. - با افزایش ارتفاع، دما و فشار گاز کاهش می‌یابد و تأثیر همدیگر را خنثی می‌کنند.
- ۹۶- فرد بالغی دچار مشکل تنفسی است. اگر این فرد در هر بار تنفس، ۴/۰ لیتر هوا را وارد ریه‌هایش کند و همه اکسیژن وارد شده به بدن او در مدت ۳ ساعت، سبب اکسایش ۴۳۲ گرم گلوکز مطابق واکنش زیر شود، این فرد در مدت یک دقیقه به طور میانگین چند بار نفس می‌کشد؟ (حجم مولی گازها را برابر ۲۰ لیتر در نظر بگیرید و ۲۰٪ حجم هوا را اکسیژن تشکیل می‌دهد،  $O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$ )



۱۶ (۲)

۱۴ (۱)

۲۰ (۴)

۱۸ (۳)

محل انجام محاسبات

۹۷- کدام موارد از مطالب زیر درباره نیتروژن، درست است؟

- (الف) پس از اکسیژن، فراوان ترین جزء هواکره بوده و از نظر شیمیایی، غیرفعال و واکنش ناپذیر است.  
 (ب) در صنعت، یک مول از آن در شرایط STP با ۳ مول هیدروژن واکنش داده و ۲ مول آمونیاک تولید می کند.  
 (ج) در دمای اتاق با گاز اکسیژن واکنش نمی دهد و با افزایش دمای سیستم تا  $100^{\circ}\text{C}$ ، به گاز NO تبدیل می شود.  
 (د) مدل فضاپرکن آن مشابه با مدل فضاپرکن مولکول ید است و در ساختار لوویس آن، چهار الکترون غیر پیوندی وجود دارد.
- (۱) الف - د      (۲) فقط د      (۳) ب - ج      (۴) فقط ب

۹۸- با توجه به فرایند هابر، کدام مورد درست است؟

- (۱) چالش بزرگ هابر، جداسازی واکنش دهنده های مصرف نشده از مخلوط واکنش بود.  
 (۲) حضور کاتالیزگر منجر به انجام شدن این واکنش در دما و فشار اتاق می شود.  
 (۳) برای جداسازی آمونیاک، مخلوط گازها تا دمای حدود  $300^{\circ}\text{C}$  سرد می شود.  
 (۴) فراورده واکنش، یک کود شیمیایی است که به طور مستقیم به خاک تزریق می شود.
- ۹۹- جدول زیر داده هایی را درباره خودروهای یک کشور توسعه یافته نشان می دهد.

E	D	C	B	A	برچسب آلاینده های خودرو
۱۷۰ - ۱۹۰	۱۵۵ - ۱۷۰	۱۴۰ - ۱۵۵	۱۲۰ - ۱۴۰	کم تر از ۱۲۰	گستره انتشار گاز کربن دی اکسید (گرم) به ازای طی یک کیلومتر

اگر یک خودرو به طور متوسط در یک ماه، ۱۵۰۰ کیلومتر مسافت طی کرده و به ازای هر صد کیلومتر، ۴۰ مول بنزین ( $\text{C}_8\text{H}_{18}$ ) مصرف کند، با توجه به کربن دی اکسید تولید شده، برچسب آلاینده های خودرو کدام است؟ (فرض کنید فقط ۲۰٪ از بنزین وارد شده به موتور به طور کامل می سوزد و فراورده ها از آگزوز بدون تغییر خارج می شوند.)

- (۱) A      (۲) B      (۳) C      (۴) E

۱۰۰- کدام عبارت نادرست است؟

- (۱) واکنش های شیمیایی و برهم کنش های فیزیکی میان بخش های گوناگون زمین، بیانگر پویابودن آن از دیدگاه شیمیایی است.  
 (۲) درشت مولکول های موجود در زیست کره، تجزیه شده و به صورت مولکول های کوچک وارد بخش های دیگر زمین می شوند.  
 (۳) به همان میزان که مواد گوناگون از سنگ کره وارد آب کره می شود، همان مقدار آب نیز از دریاها و اقیانوس ها خارج می شود.  
 (۴) حجم آبی که از ذوب شدن کوه های یخی تولید می شود، بسیار بیشتر از مجموع حجم آب های زیرزمینی و جاری است.

۱۰۱- کدام عبارت درست است؟

- (۱) آب دریاها مخلوطی همگن از انواع یون هاست.  
 (۲) آب مقطر، آبی است که طی فرایند تقطیر، تقریباً همه یون ها و مولکول های حل شده در آن حذف شده است.  
 (۳) از انحلال یک مول  $\text{NaNO}_3$  و یک مول  $\text{Na}_2\text{O}$  در آب، در مجموع ۵ مول یون تولید می شود.  
 (۴) وجود یون فلوئورید باعث تخریب مینای دندان شده و باید از آب آشامیدنی حذف شود.

محل انجام محاسبات

۱۰۲- نسبت شمار اتم‌های نافلزی به شمار یون‌های فلزی در آلومینیم سولفات، ۵ برابر نسبت شمار آنیون به کاتیون در کدام ترکیب است؟

(۱) کلسیم نیترات (۲) آمونیوم فسفات (۳) اسکاندیم کربنات (۴) منیزیم سولفات

۱۰۳- در ظرف‌های A و B به ترتیب محلول‌های نقره نیترات و پتاسیم سولفات وجود دارد. افزودن کدام ماده به هر دو ظرف منجر به تشکیل رسوب می‌شود و نسبت جرم مولی رسوب تشکیل شده در ظرف A به جرم مولی رسوب تشکیل شده در ظرف B کدام است؟

( $N = 14, O = 16, Na = 23, P = 31, S = 32, Cl = 35.5, K = 39, Ag = 108, Ba = 137 : g.mol^{-1}$ )

(۱) سدیم کلرید - ۰/۷۵ (۲) باریوم کلرید - ۰/۷۵ (۳) سدیم کلرید - ۰/۶۲ (۴) باریوم کلرید - ۰/۶۲

۱۰۴- درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب کدام است؟

• در ساختار آمونیوم کربنات فقط پیوند اشتراکی وجود دارد.

• فرمول شیمیایی کبالت (II) نیترات، به صورت  $CO(NO_3)_2$  است.

• ساختار لوویس و مدل فضاپرکن یون‌های  $SiO_4^{4-}$ ,  $SO_4^{2-}$ ,  $PO_4^{3-}$  کاملاً مشابه هم است.

• در یک واحد فرمولی از آمونیوم سولفات، دوازده جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

(۱) نادرست - نادرست - درست (۲) نادرست - نادرست - نادرست (۳) نادرست - نادرست - درست (۴) درست - درست - درست

(۱) نادرست - نادرست - درست (۲) نادرست - نادرست - درست (۳) نادرست - درست - نادرست (۴) درست - درست - نادرست

۱۰۵- از واکنش ۸ گرم هیدروکسید فلزی از گروه اول جدول دوره‌ای با سولفوریک اسید ( $H_2SO_4$ )،  $14/2$  گرم از نمک سولفات این فلز به دست می‌آید. جرم  $0/4$  مول از نیترات این فلز چند گرم است؟

( $S = 32, O = 16, N = 14, H = 1 : g.mol^{-1}$ )

۳۴ (۴)

۴۳/۲ (۳)

۱۱/۸ (۲)

۴۰/۴ (۱)

پاسخ‌نامه تشریحی آزمون را ساعت ۱۲:۳۰ از صفحه

شخصی خودتان در سایت آزمون خیلی سبز دریافت کنید.



azmoon.kheilisabz.com

اساتید، مشاوران و دانش‌آموزان گرامی؛

نظرات، پیشنهادات، انتقادات و بازخوردهای خود نسبت به سؤالات این آزمون را می‌توانید

از طریق آیدی @Kheilisabz\_edit در همه پیام‌رسان‌ها با ما به اشتراک بگذارید.

محل انجام محاسبات

# آزمون



# کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



# جزوه



# فیلم



# مشاوره



www.  
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف





# پاسخ نامه آزمون آزمایشی خیلی سبز



مرحله هشتم

پایه دوازدهم

۱۴۰۴/۰۷/آذر

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۰۵

نام درس	طراحان به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محسن بهرام پور - عادل حسینی - میلاد منصوری - محمدسجاد نقیه
هندسه	سید محمدرضا حسینی فرد - محمدطاهر شعاعی - حمید گلزاری - حسین هاشمی طاهری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری - سوگند روشنی - علیرضا شریف خطیبی - عطا صادقی - سروش موئینی
فیزیک	یاشار انگوتی - علیرضا جباری - رضا سبزمیدانی - نوید شاهی - محمدکاظم منشادی
شیمی	پیمان خواجهی مجد - هادی عبادی - یاسر عبداللهی - امیر قاسمی پور - محمد قهرمانی نژاد - محسن مجنونتی - عرفان نریمانی - مرتضی نصیرزاده

نام درس	مسئول درس	گزینشگر	مؤلف پاسخ نامه	کارشناسان علمی	ویراستاران به ترتیب حروف الفبا
حسابان و ریاضیات پایه	محمدسجاد نقیه	محمدسجاد نقیه	محمدرضا راسخ	فرشاد حسن زاده سروش موئینی	محمدمهدی حسینی منصور زرکش
هندسه	حمید گلزاری	حمید گلزاری	حمید گلزاری	امیرحسین ابومحبوب	سیدعباس حسینی ماهان فنی فر مریم نظری
ریاضیات گسسته و آمار و احتمال	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	مصطفی دیداری	امیرحسین ابومحبوب مریم نظری	ماهان فنی فر ابوالفضل ناصری
فیزیک	رضا سبزمیدانی	نوید شاهی	علیرضا جباری مسعود خندان	علیرضا جباری سعید محبی	پوریا علاقه مند بیبا غیاثوند امیر محمودی انزلی سعید محبی
شیمی	یاسر عبداللهی	مرتضی نصیرزاده	سروش عبادی یاسر عبداللهی	سینا رضادوست یاشار ذریه	پویا رستگاری پارسا طاهری منزه متین قنبری مهديس محبت پناه

مدیر تألیف آزمون: فاطمه آقاجانپور





# آزمون آزمایشی خیلی سبز

سرپرست تولید	الناز علی‌باری زاده
ویراستاران فنی	نیلوفر اعتمادی - نیوشا پیمان - هدیه خسروی زهره صفری - الهه صفری - فاطمه علی اکبری محیا غنی‌فرد - زهرا فرهادی‌مهر - نادره نازآوری ساعده نمازی
رسام	ندا فخاری سارا گنجی آزادپور
صفحه‌آرایی	صدف امام - مریم حسین‌زاده سپیده سخائی - الهام سهرابی - طاهره صادق‌نژاد مانده صبری - نیلوفر فرخجسته - فاطمه قیاسوند مهدیه گل‌پور - دریا لطفی





۱ اگر  $\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}$  حاصل  $\sin^5 x + \cos^5 x$  کدام است؟

$$\frac{5}{9} \quad (4)$$

$$\frac{11}{9\sqrt{3}} \quad (3)$$

$$\frac{13}{9\sqrt{3}} \quad (2)$$

$$\frac{1}{9} \quad (1)$$

### پاسخ: گزینه ۲

اول از همه با به توان دو رساندن رابطه داده شده، مقدار  $\sin x \cos x$  رو پیدا کن. بعدش می تونی از اتحاد چاق و لاغر برای توان ۵ استفاده کنی.

**Hint**



تعمیم اتحاد چاق و لاغر (اتحادهای توان  $n$ ):

اتحادهای مجموع و تفاضل مکعبات را می توان برای توان های طبیعی دلخواه  $n$  تعمیم داد. این دو اتحاد در تجزیه عبارتهای جبری بسیار پرکاربرد هستند:

● **تفاضل توان های  $n$ ام (برای هر  $n$  طبیعی):**

این اتحاد برای تمام توان های طبیعی برقرار است.

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \dots + b^{n-1})$$

در این اتحاد، تمام علامت های داخل پرانتز دوم (برانتز چاق) مثبت هستند.

● **مجموع توان های  $n$ ام (فقط برای  $n$  فرد):**

این اتحاد تنها زمانی برقرار است که توان  $n$ ، یک عدد طبیعی فرد باشد.

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \dots + b^{n-1})$$

در این اتحاد، علامت های داخل پرانتز دوم به صورت یکی در میان مثبت و منفی هستند.

گام اول: ابتدا به کمک اتحاد ذکر شده در نکته و سایر اتحادهای جبری و مثلثاتی، خواسته مسئله را بازنویسی می کنیم:

$$\sin^5 x + \cos^5 x = (\sin x + \cos x)(\sin^4 x - \sin^3 x \cos x + \sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos^3 x + \cos^4 x)$$

$$= (\sin x + \cos x)(\sin^4 x + \cos^4 x - \sin x \cos x(\sin^3 x + \cos^3 x) + \sin^2 x \cos^2 x)$$

$$\Rightarrow \sin^5 x + \cos^5 x = (\sin x + \cos x)((\sin^2 x + \cos^2 x)^2 - 2\sin^2 x \cos^2 x - \sin x \cos x(\sin^3 x + \cos^3 x))$$

$$\Rightarrow \sin^5 x + \cos^5 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x \cos x)^2 - \sin x \cos x$$

گام دوم: حال برای پیدا کردن مقدار  $\sin x \cos x$  داریم:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}} \Rightarrow (\sin x + \cos x)^2 = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin^2 x + \cos^2 x + 2\sin x \cos x = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow 1 + 2\sin x \cos x = \frac{1}{3} \Rightarrow \sin x \cos x = \frac{-1}{3}$$

گام سوم: با جای گذاری مقادیر داریم:

$$(\sin^5 x + \cos^5 x) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left(1 - \left(\frac{-1}{3}\right)^2 - \left(\frac{-1}{3}\right)\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(1 - \frac{1}{9} + \frac{1}{3}\right) = \frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{11}{9}\right) = \frac{11}{9\sqrt{3}}$$

فرض کنید  $\sin x$  و  $\cos x$  ریشه های یک معادله درجه دوم باشند:

$$\sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}, \sin x \cos x = \frac{-1}{3} \Rightarrow t^2 - \frac{1}{\sqrt{3}}t - \frac{1}{3} = 0$$

حال چون ریشه های هر معادله در خود معادله صدق می کنند، داریم:

$$\sin^2 x - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin x - \frac{1}{3} = 0 \xrightarrow{\times \sin^{n-2}(x)} \sin^n(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\sin^{n-1}(x) - \frac{1}{3}\sin^{n-2}(x) = 0$$

$$\cos^2 x - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos x - \frac{1}{3} = 0 \xrightarrow{\times \cos^{n-2}(x)} \cos^n(x) - \frac{1}{\sqrt{3}}\cos^{n-1}(x) - \frac{1}{3}\cos^{n-2}(x) = 0$$

$$\Rightarrow \sin^n(x) + \cos^n(x) = \frac{1}{\sqrt{3}}(\sin^{n-1}(x) + \cos^{n-1}(x)) + \frac{1}{3}(\sin^{n-2}(x) + \cos^{n-2}(x))$$

**یه جور دیگه**



با در نظر گرفتن  $S_n = \sin^n(x) + \cos^n(x)$ ، رابطه بازگشتی زیر را داریم:

$$S_n = \frac{1}{\sqrt{3}} S_{n-1} + \frac{1}{3} S_{n-2}, S_1 = \sin x + \cos x = \frac{1}{\sqrt{3}}, S_2 = \sin^2 x + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow S_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} S_2 + \frac{1}{3} S_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{3\sqrt{3}} = \frac{4}{3\sqrt{3}} \Rightarrow S_4 = \frac{1}{\sqrt{3}} S_3 + \frac{1}{3} S_2 = \frac{4}{9} + \frac{1}{3} = \frac{7}{9}$$

$$\Rightarrow S_5 = \frac{1}{\sqrt{3}} S_4 + \frac{1}{3} S_3 = \frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{7}{9}\right) + \frac{1}{3} \left(\frac{4}{3\sqrt{3}}\right) = \frac{7}{9\sqrt{3}} + \frac{4}{9\sqrt{3}} = \frac{11}{9\sqrt{3}}$$



۲ اگر  $\frac{\sin x}{1 + \cos x} = -2$  و انتهای کمان  $x$  در ناحیه سوم دایره مثلثاتی باشد، حاصل  $\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x}$  کدام است؟

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{4}{5} \quad (3)$$

$$\frac{3}{4} \quad (2)$$

$$\frac{4}{3} \quad (1)$$

### پاسخ: گزینه ۱

از فرض سؤال و اتحاد  $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$  استفاده کن تا مقدار  $\sin$  و  $\cos$  رو به دست بیاری!

**Hint**

روابط و اتحادهای پایه‌ای مثلثاتی:

**درس‌بوک**

برای هر زاویه  $\alpha$  که منجر کسرها را صفر نکند، روابط اساسی زیر بین نسبت‌های مثلثاتی برقرار است:

(۱) روابط کسری: این روابط، تانژانت و کتانژانت را برحسب سینوس و کسینوس تعریف می‌کنند.

$$\tan \alpha = \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha}, \quad \cot \alpha = \frac{\cos \alpha}{\sin \alpha}$$

(۲) روابط معکوس: تانژانت و کتانژانت معکوس یکدیگر هستند.

$$\cot \alpha = \frac{1}{\tan \alpha} \Rightarrow \tan \alpha \cdot \cot \alpha = 1$$

(۳) اتحادهای فیثاغورسی: این اتحادها از مهم‌ترین روابط در مثلثات هستند.

$$\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$$

• اتحاد اصلی:

$$\sin^2 \alpha = 1 - \cos^2 \alpha, \quad \cos^2 \alpha = 1 - \sin^2 \alpha$$

که از آن نتیجه می‌شود:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha}, \quad 1 + \cot^2 \alpha = \frac{1}{\sin^2 \alpha}$$

• اتحادهای مشتق‌شده:

گام اول: ابتدا عبارت خواسته سؤال را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\frac{1 + \tan x}{1 + \cot x} = \frac{1 + \tan x}{1 + \frac{1}{\tan x}} = \frac{1 + \tan x}{\frac{1 + \tan x}{\tan x}} = \tan x$$

گام دوم: حال به کمک فرض مسئله و اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\begin{cases} \sin x = -2 - 2 \cos x \\ \sin^2 x + \cos^2 x = 1 \end{cases} \Rightarrow (-2 - 2 \cos x)^2 + \cos^2 x = 1$$

$$\Rightarrow 4 \cos^2 x + 8 \cos x + 4 + \cos^2 x = 1 \Rightarrow 5 \cos^2 x + 8 \cos x + 3 = 0$$

$$\Rightarrow (\cos x + 1)(5 \cos x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} \cos x = \frac{-3}{5} & \pi < x < \frac{3\pi}{2} \rightarrow \cos x = \frac{-3}{5} \Rightarrow \sin x = \frac{-4}{5} \\ \cos x = -1 \end{cases}$$

گام سوم: حال برای محاسبه مقدار  $\tan x$  داریم:

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x} = \frac{\frac{-4}{5}}{\frac{-3}{5}} = \frac{4}{3}$$

با توجه به روابط  $2\alpha$  داریم:

یه جور دیگه

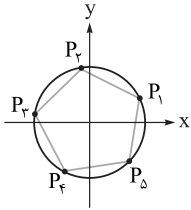
$$\frac{\sin x}{1 + \cos x} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{2 \cos^2 \frac{x}{2}} = \frac{\sin \frac{x}{2}}{\cos \frac{x}{2}} = \tan \frac{x}{2} \Rightarrow \tan \frac{x}{2} = -2$$

$$\tan x = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 - \tan^2 \frac{x}{2}} = \frac{-4}{1 - 4} = \frac{4}{3}$$

حال می‌توان نوشت:



۳ در دایره مثلثاتی زیر، اگر عرض نقطه  $P_1$  برابر  $\frac{1}{4}$  و چندضلعی  $P_1P_2P_3P_4P_5$  منتظم باشد، طول نقطه  $P_4$  کدام است؟



- (۱)  $-\sin 24^\circ$
- (۲)  $-\cos 24^\circ$
- (۳)  $-\sin 26^\circ$
- (۴)  $-\cos 26^\circ$

پاسخ: گزینه ۱

توی پنجضلعی منتظم، زاویه بین هر دو رأس متوالی از مرکز دایره،  $\frac{360}{5} = 72^\circ$  درجه است. با داشتن زاویه نقطه اول، می تونی زاویه نقطه چهارم رو پیدا کنی و کسینوسش رو حساب کنی.



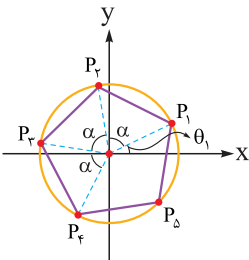
جدول کامل روابط مثلثاتی زوایای کمکی:



cot	tan	cos	sin	زاویه
$\cot(-\alpha) = -\cot \alpha$	$\tan(-\alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos \alpha$	$\sin(-\alpha) = -\sin \alpha$	$-\alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} - \alpha) = \cos \alpha$	$\frac{\pi}{2} - \alpha$
$\cot(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cos(\frac{\pi}{2} + \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\frac{\pi}{2} + \alpha) = \cos \alpha$	$\frac{\pi}{2} + \alpha$
$\cot(\pi - \alpha) = -\cot \alpha$	$\tan(\pi - \alpha) = -\tan \alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(\pi - \alpha) = \sin \alpha$	$\pi - \alpha$
$\cot(\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\tan(\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(\pi + \alpha) = -\cos \alpha$	$\sin(\pi + \alpha) = -\sin \alpha$	$\pi + \alpha$
$\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \tan \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \cot \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\sin \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = -\cos \alpha$	$\frac{3\pi}{2} - \alpha$
$\cot(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\tan \alpha$	$\tan(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cot \alpha$	$\cos(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = \sin \alpha$	$\sin(\frac{3\pi}{2} + \alpha) = -\cos \alpha$	$\frac{3\pi}{2} + \alpha$
$\cot(2k\pi + \alpha) = \cot \alpha$	$\tan(2k\pi + \alpha) = \tan \alpha$	$\cos(2k\pi + \alpha) = \cos \alpha$	$\sin(2k\pi + \alpha) = \sin \alpha$	$2k\pi + \alpha$

گام اول: با توجه به شکل مقابل و عرض نقطه  $P_1$  داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



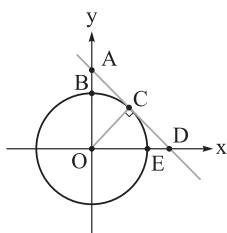
$$\sin \theta_1 = \frac{1}{4} \Rightarrow \theta_1 = 3^\circ$$

گام دوم: در پنجضلعی منتظم، زاویه بین هر دو رأس متوالی برابر  $\frac{360}{5} = 72^\circ$  است. حال برای رسیدن از  $P_1$  به  $P_4$  باید ۳ رأس به جلو حرکت کنیم، در نتیجه داریم:

$$x_{P_4} = \cos(\theta_1 + 3\alpha) = \cos(3^\circ + 3 \times 72^\circ) = \cos(246^\circ) = \cos(270^\circ - 24^\circ) = -\sin 24^\circ$$



۴ در دایره مثلثاتی زیر، اگر طول پاره خط AB برابر  $\frac{1}{3}$  باشد، طول پاره خط DE کدام است؟



- ۱)  $\frac{3}{\sqrt{7}} - 1$
- ۲)  $\frac{4}{\sqrt{7}} - 1$
- ۳)  $\frac{4}{\sqrt{5}} - 1$
- ۴)  $\sqrt{5} - 1$

پاسخ: گزینه ۲

Hint

با توجه به اطلاعات مسئله و مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که داری، سعی کن سینوس و کسینوس زاویه  $\theta$  رو برحسب طول پاره خط‌ها بنویسی. بعد از اتحاد  $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$  استفاده کن.

درس‌Box

تعریف دایره مثلثاتی و زاویه استاندارد:

دایره مثلثاتی، دایره‌ای به شعاع ۱ واحد است که مرکز آن روی مبدأ مختصات قرار دارد.

در این دایره، زاویه‌ها در وضعیت استاندارد سنجیده می‌شوند:

● ضلع ابتدایی: همواره روی جهت مثبت محور Xها (شعاع OA) قرار دارد.

● ضلع انتهایی: از دوران ضلع ابتدایی حول مبدأ به دست می‌آید.

● جهت دوران: دوران پادساعتگرد مثبت (+) و ساعتگرد منفی (-) در نظر گرفته می‌شود.

نقطه برخورد ضلع انتهایی زاویه  $\alpha$  با دایره را نقطه P می‌نامیم.

تعریف نسبت‌های مثلثاتی روی دایره:

اگر نقطه انتهایی کمان زاویه  $\alpha$  روی دایره، نقطه  $P(x, y)$  باشد:

سینوس و کسینوس:

● کسینوس زاویه  $\alpha$  برابر با طول نقطه P است ( $\cos \alpha = x$ ). محور طول‌ها به همین دلیل محور کسینوس‌ها نامیده می‌شود.

● سینوس زاویه  $\alpha$  برابر با عرض نقطه P است ( $\sin \alpha = y$ ). محور عرض‌ها به همین دلیل محور سینوس‌ها نامیده می‌شود.

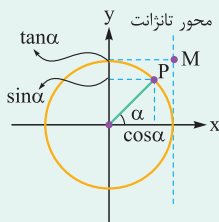
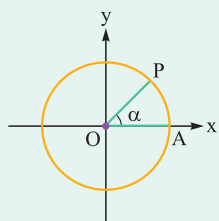
● از آن‌جا که X و Y روی دایره واحد هستند، همواره داریم:  $-1 \leq \sin \alpha \leq 1$  و  $-1 \leq \cos \alpha \leq 1$

تانژانت:

● خط  $x = 1$  (خط مماس بر دایره در نقطه A) را محور تانژانت‌ها می‌نامیم.

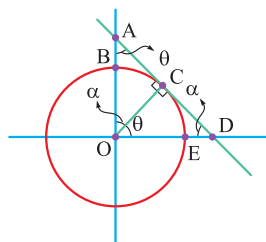
● برای یافتن مقدار تانژانت، ضلع انتهایی زاویه  $\alpha$  را امتداد می‌دهیم تا این محور را در نقطه‌ای

مانند M قطع کند. عرض نقطه M برابر با  $\tan \alpha$  است.



گام اول: ابتدا زاویه‌ها را به صورت زیر در شکل نام‌گذاری می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: حال در مثلث‌های AOC و OCD داریم:

$$\triangle AOC: \sin \theta = \frac{OC}{AO} = \frac{1}{1 + \frac{1}{3}} = \frac{3}{4}$$

$$\triangle OCD: \cos \theta = \frac{OC}{OD} = \frac{1}{OD}$$



گام سوم: حال به کمک اتحادهای مثلثاتی داریم:

$$\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1 \Rightarrow \frac{9}{16} + \frac{1}{OD^2} = 1 \Rightarrow \frac{1}{OD^2} = \frac{7}{16}$$

$$\Rightarrow OD^2 = \frac{16}{7} \Rightarrow OD = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

$$DE = OD - OE = \frac{4}{\sqrt{7}} - 1$$

گام چهارم: اندازه خواسته شده برابر است با:

در مثلث قائم‌الزاویه AOD، ارتفاع وارد بر وتر است و با استفاده از روابط طولی در مثلث قائم‌الزاویه داریم:

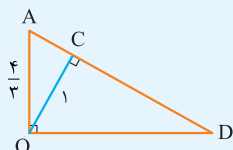
$$AC = \sqrt{OA^2 - OC^2} = \sqrt{\left(\frac{4}{3}\right)^2 - 1} = \frac{\sqrt{7}}{3}$$

$$\xrightarrow{OC^2 = AC \times CD} 1^2 = \frac{\sqrt{7}}{3} \times CD \Rightarrow CD = \frac{3}{\sqrt{7}}$$

حالا مجدداً از فیثاغورس استفاده می‌کنیم:

$$OC^2 : OD^2 = \sqrt{OC^2 + CD^2} = \sqrt{1^2 + \left(\frac{3}{\sqrt{7}}\right)^2} = \frac{4}{\sqrt{7}}$$

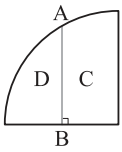
پس طول DE برابر است با  $\frac{4}{\sqrt{7}} - 1$ .



یہ جوڑ دیکھ



در شکل زیر پاره خط  $AB$  به طول  $\sqrt{3}$ ، عمود منصف شعاع ربع دایره است. محیط ناحیه  $C$  چه قدر از محیط ناحیه  $D$  بیشتر است؟



$$2 - \frac{\pi}{3} \quad (2)$$

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{6} \quad (4)$$

$$\sqrt{3} - \frac{\pi}{3} \quad (1)$$

$$2 - \frac{\pi}{6} \quad (3)$$

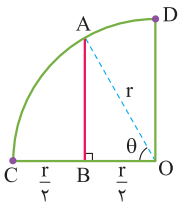
پاسخ: گزینه ۲

اول با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث  $OAB$ ، شعاع دایره رو پیدا کن. بعد محیط هر ناحیه رو حساب کن که شامل طول کمان و طول پاره خطها می شه.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا به کمک شکل زیر و رابطه فیثاغورس شعاع دایره را محاسبه می کنیم:



$$(OB)^2 + (AB)^2 = (OA)^2$$

$$\Rightarrow \left(\frac{r}{2}\right)^2 + (\sqrt{3})^2 = r^2 \Rightarrow 3 = r^2 - \frac{r^2}{4} \Rightarrow r^2 = 4 \Rightarrow r = 2$$

گام دوم: حال برای محاسبه طول کمانهای ناحیه های  $C$  و  $D$  داریم:

$$\cos \theta = \frac{OB}{OA} = \frac{1}{2} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{3} \xrightarrow{L=r\theta} |\widehat{AC}| = 2 \times \frac{\pi}{3} = \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow |\widehat{AD}| = 2 \times \left(\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{\pi}{3}$$

گام سوم: با توجه به اندازه های به دست آمده داریم:

$$P_C : OD + OB + AB + |\widehat{AD}| = 2 + 1 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3} = 3 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}$$

$$P_D : CB + AB + |\widehat{AC}| = 1 + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}$$

$$\Rightarrow P_C - P_D = \left(3 + \sqrt{3} + \frac{\pi}{3}\right) - \left(1 + \sqrt{3} + \frac{2\pi}{3}\right) = 2 - \frac{\pi}{3}$$



با فرض  $\tan 5^\circ = \frac{17}{2}$  حاصل  $\frac{3 \sin 40^\circ + 2 \cos 22^\circ}{3 \sin 14^\circ - \cos 5^\circ}$  کدام است؟

$\frac{21}{2}$  (۴)

$\frac{17}{2}$  (۳)

$\frac{13}{2}$  (۲)

$\frac{11}{2}$  (۱)

**پاسخ: گزینه ۲**

**Hint**

اول با استفاده از روابط زوایای کمکی (مثل  $14^\circ = 9^\circ + 5^\circ$ )، سینوس و کسینوس‌های عبارت رو ساده کن. بعد کل صورت و مخرج رو بر  $\cos 5^\circ$  تقسیم کن تا عبارت برحسب  $\tan 5^\circ$  ساده بشه.

**دروس Box**

روش محاسبه نسبت‌های مثلثاتی زاویا با استفاده از زوایای مرتبط:

برای به دست آوردن نسبت‌های مثلثاتی یک زاویه، می‌توانیم از روش گام به گام زیر پیروی کنیم:

(۱) تبدیل زاویه: ابتدا زاویه مورد نظر را به شکل  $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$  بازنویسی می‌کنیم، به طوری که  $k$  یک عدد صحیح باشد (زوج یا فرد بودن  $k$  مهم است).

(۲) تعیین ربع دایره: با فرض این‌که  $\alpha$  یک زاویه تند (حاده) است، مشخص می‌کنیم که انتهای کمان مربوط به زاویه اصلی  $(\frac{k\pi}{p} \pm \alpha)$  در کدام ربع (ناحیه) دایره مثلثاتی قرار می‌گیرد.

(۳) تعیین علامت نسبت: با توجه به ربعی که در مرحله قبل مشخص شد، علامت (+ یا -) نسبت مثلثاتی مورد نظر (سینوس، کسینوس، تانژانت یا کتانژانت) را برای آن ربع تعیین می‌کنیم.

(۴) حذف مضرب  $\frac{\pi}{p}$ : بخش  $\frac{k\pi}{p}$  را از عبارت  $\frac{k\pi}{p} \pm \alpha$  حذف می‌کنیم.

(۵) تبدیل یا حفظ نسبت:

• اگر  $k$  در مرحله ۱ زوج بود، نوع نسبت مثلثاتی تغییر نمی‌کند (سینوس به سینوس، کسینوس به کسینوس و ...).

• اگر  $k$  در مرحله ۱ فرد بود، نوع نسبت مثلثاتی به نسبت همانم خود تبدیل می‌شود (سینوس به کسینوس، کسینوس به سینوس، تانژانت به کتانژانت و کتانژانت به تانژانت).

گام اول: ابتدا به کمک درس‌بکس عبارت خواسته‌شده را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\frac{3 \sin(45^\circ - 5^\circ) + 2 \cos(27^\circ - 5^\circ)}{3 \sin(9^\circ + 5^\circ) - \cos 5^\circ} = \frac{3 \cos 5^\circ - 2 \sin 5^\circ}{3 \cos 5^\circ - \cos 5^\circ} = \frac{3 \cos 5^\circ - 2 \sin 5^\circ}{2 \cos 5^\circ}$$

گام دوم: با تقسیم عبارت‌های صورت و مخرج بر  $\cos 5^\circ$  داریم:

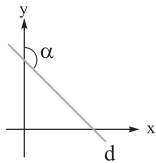
$$\frac{3 \cos 5^\circ - 2 \sin 5^\circ}{2 \cos 5^\circ} = \frac{3 - 2 \tan 5^\circ}{2} = \frac{3 - 2 \times \frac{17}{2}}{2} = \frac{6 - 34}{2} = \frac{-28}{2} = -14$$

**پاسخ خیلی تشریحی**

**په چور دیگه**

$$\text{عبارت} = \frac{3 \sin(36^\circ + 4^\circ) + 2 \cos(18^\circ + 4^\circ)}{3 \sin(18^\circ - 4^\circ) - \cos(9^\circ + 4^\circ)} = \frac{3 \sin 4^\circ - 2 \cos 4^\circ}{3 \sin 4^\circ - \sin 4^\circ}$$

$$= \frac{3}{2} - \cot 4^\circ = \frac{3}{2} - \tan 5^\circ = \frac{3}{2} - \frac{17}{2} = -\frac{14}{2}$$



در شکل مقابل، شیب خط  $d$  برابر  $-\frac{3}{4}$  است. حاصل  $\cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha)$  کدام است؟

$-\frac{4}{3}$  (۱)

$-\frac{3}{4}$  (۲)

$-\frac{2}{5}$  (۳)

$-\frac{5}{3}$  (۴)

پاسخ: گزینه ۱

شیب خط برابر با تانژانت زاویه‌ای هست که خط با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد. از این رابطه استفاده کن و بعد با کمک روابط مثلثاتی، مقدار خواسته شده رو پیدا کن.



رابطه شیب خط با تانژانت زاویه:

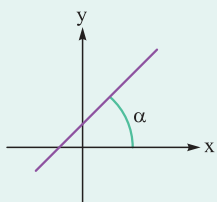


$m = \tan \alpha$

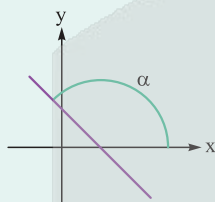
شیب خط ( $m$ ) برابر است با تانژانت زاویه‌ای ( $\alpha$ ) که آن خط با جهت مثبت محور  $x$  می‌سازد. این زاویه  $\alpha$  همواره در بازه  $(0, 180^\circ)$  در نظر گرفته می‌شود.

• اگر شیب خط مثبت باشد ( $m > 0$ )، زاویه  $\alpha$  یک زاویه تند خواهد بود ( $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ ).

• اگر شیب خط منفی باشد ( $m < 0$ )، زاویه  $\alpha$  یک زاویه باز خواهد بود ( $90^\circ < \alpha < 180^\circ$ ).

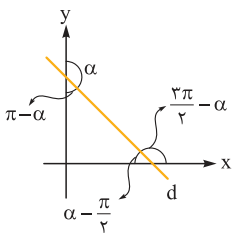


$m = \tan \alpha > 0$



$m = \tan \alpha < 0$

گام اول: ابتدا زوایا را روی شکل به صورت مقابل مشخص می‌کنیم:



$\tan(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{-3}{4} \Rightarrow \cot(\frac{3\pi}{2} - \alpha) = \frac{-4}{3}$

گام دوم: حال به کمک رابطه شیب خط و تانژانت داریم:



اگر  $f(x) = 2 \sin x - \cos(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\pi - x)$ ، آن گاه شیب خطی که یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم از

نمودار تابع  $f$  را به هم وصل می‌کند، حداقل کدام است؟

$\frac{-8}{\pi}$  (۴)

$\frac{-6}{\pi}$  (۳)

$\frac{-4}{\pi}$  (۲)

$\frac{-2}{\pi}$  (۱)

پاسخ: گزینهٔ ۴

اول ضابطهٔ تابع رو ساده کن. بعد مختصات یک نقطهٔ ماکزیمم و مینیمم متوالی رو از روی نمودار پیدا کن و شیب خط بینشون رو حساب کن.



درسی Box

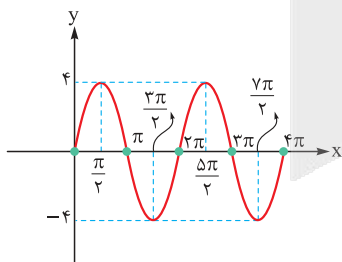
تابع سینوس $f(x) = \sin(x)$	تابع کسینوس $f(x) = \cos(x)$
دامنه و برد: (۱) دامنه: تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ برد: بازهٔ بستهٔ $[-1, 1]$	دامنه و برد: (۱) دامنه: تمام اعداد حقیقی $(\mathbb{R})$ برد: بازهٔ بستهٔ $[-1, 1]$
ریشه‌ها (نقاط $f(x) = 0$ ): $x = k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )	ریشه‌ها (نقاط $f(x) = 0$ ): $x = k\pi + \frac{\pi}{2}$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
نقاط ماکزیمم (مقدار ۱): $x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )	نقاط ماکزیمم (مقدار ۱): $x = 2k\pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )
نقاط مینیمم (مقدار -۱): $x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )	نقاط مینیمم (مقدار -۱): $x = 2k\pi + \pi$ ( $k \in \mathbb{Z}$ )

گام اول: ابتدا ضابطهٔ تابع  $f$  را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم: ✓ پاسخ خیلی تشریحی

$$f(x) = 2 \sin x - \cos(\frac{\pi}{4} + x) + \sin(\pi - x)$$

$$\Rightarrow f(x) = 2 \sin x + \sin x + \sin x = 4 \sin x$$

گام دوم: حال نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم:



گام سوم: برای این‌که شیب خطی که یک نقطهٔ ماکزیمم و یک نقطهٔ مینیمم از نمودار تابع حداقل شود باید نقاط ماکزیمم و مینیمم متوالی باشند:

$(\frac{\pi}{4}, 4), (\frac{3\pi}{4}, -4)$

$$m_{\min} = \frac{-4 - 4}{\frac{3\pi}{4} - \frac{\pi}{4}} = \frac{-8}{\frac{\pi}{2}} = \frac{-16}{\pi}$$



۹

تابع  $f(x) = \sin x + [\cos x]$  با دامنه  $[0, 2\pi]$  را در نظر بگیرید. کدام یک از خط‌های زیر با نمودار تابع  $f$ ، تعداد نقاط مشترک بیشتری دارد؟ ( $[\ ]$ ، نماد جزء صحیح است).

$y = -2$  (۴)

$y = -1$  (۳)

$y = 0$  (۲)

$y = 1$  (۱)

پاسخ: گزینه ۱

این جور سؤال‌ها که جزء صحیح دارن، باید به صورت بازه به بازه حل بشن. بین تو بازه  $[0, 2\pi]$  عبارت داخل جزء صحیح، یعنی  $[\cos x]$  چه مقادیری ( $\{-1, 0, 1\}$ ) می‌گیره و تابع رو تو هر بازه جداگانه رسم کن.

Hint

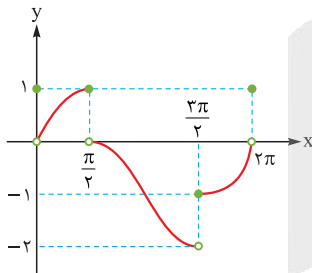
پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: ابتدا ضابطه تابع  $f$  را به صورت ساده‌تر می‌نویسیم:

$$\begin{cases} 0 < x \leq \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \Rightarrow [\cos x] = 0 \\ \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \Rightarrow [\cos x] = -1 \\ x = 0, 2\pi \Rightarrow [\cos x] = 1, \sin x = 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow f(x) = \begin{cases} \sin x - 1 & ; \frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2} \\ \sin x & ; 0 < x \leq \frac{\pi}{2} \text{ یا } \frac{3\pi}{2} \leq x < 2\pi \\ 1 & ; x = 0, 2\pi \end{cases}$$

گام دوم: حال نمودار تابع  $f$  را رسم می‌کنیم:

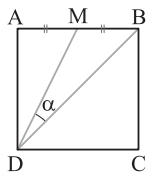


گام سوم: با توجه به نمودار برای نقاط مشترک داریم:

- بیشترین تعداد  $\rightarrow$  ۳ برخورد:  $y = 1$
- ۰ برخورد:  $y = 0$
- ۲ برخورد:  $y = -1$
- ۰ برخورد:  $y = -2$



۱۰ در مربع شکل زیر، M وسط AB است. مقدار  $\cos \alpha$  کدام است؟



(۲)  $\frac{3}{\sqrt{10}}$

(۱)  $\frac{2}{\sqrt{10}}$

(۴)  $\frac{1}{\sqrt{5}}$

(۳)  $\frac{3}{\sqrt{5}}$

پاسخ: گزینه ۲

اتحادهای مجموع و تفاضل تانژانت:

این اتحادها مقدار تانژانت مجموع یا تفاضل دو زاویه را برحسب تانژانت خود آن زاویهها محاسبه می‌کنند. این فرمول‌ها از تقسیم اتحادهای سینوس و کسینوس به دست می‌آیند.

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \tan \beta}$$

• اتحاد مجموع:

$$\tan(\alpha - \beta) = \frac{\tan \alpha - \tan \beta}{1 + \tan \alpha \tan \beta}$$

• اتحاد تفاضل:

راهبرد حل مسئله: پیدا کردن تانژانت زاویه نامعلوم:

در بسیاری از مسائل هندسی، برای محاسبه تانژانت یک زاویه نامشخص، می‌توان آن زاویه را به صورت مجموع یا تفاضل دو زاویه دیگر نوشت که تانژانت آن‌ها به سادگی از روی شکل قابل محاسبه است.

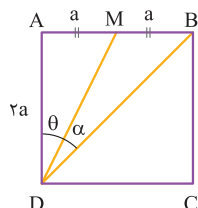
مراحل حل:

(۱) زاویه مورد نظر را برحسب مجموع یا تفاضل دو زاویه قابل محاسبه ( $\alpha$  و  $\beta$ ) می‌نویسیم.

(۲) مقدار  $\tan \alpha$  و  $\tan \beta$  را از اطلاعات مسئله (مثلاً از روی مثلث‌های قائم‌الزاویه در شکل) به دست می‌آوریم.

(۳) مقادیر به دست آمده را در فرمول  $\tan(\alpha \pm \beta)$  جای گذاری کرده و حاصل را محاسبه می‌کنیم.

گام اول: با توجه به شکل زیر، در مثلث‌های AMD و ABD داریم:



$$\Delta ABD : \tan(\alpha + \theta) = \frac{\tan \alpha + \tan \theta}{1 - \tan \alpha \tan \theta}$$

$$\Delta AMD : \tan \theta = \frac{AM}{AD} = \frac{1}{2}$$

گام دوم: حال با توجه به این که  $\alpha + \theta = 45^\circ$  داریم:

$$\begin{aligned} \tan(\alpha + \theta) = 1 &\Rightarrow \frac{\tan \alpha + \frac{1}{2}}{1 - \frac{\tan \alpha}{2}} = 1 \Rightarrow \tan \alpha + \frac{1}{2} = 1 - \frac{\tan \alpha}{2} \\ \Rightarrow \frac{3 \tan \alpha}{2} = \frac{1}{2} &\Rightarrow \tan \alpha = \frac{1}{3} \end{aligned}$$

گام سوم: حال به کمک اتحادهای مقدماتی مثلثاتی داریم:

$$1 + \tan^2 \alpha = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow 1 + \frac{1}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \Rightarrow \frac{10}{9} = \frac{1}{\cos^2 \alpha} \xrightarrow{\alpha \text{ حاده}} \cos \alpha = \frac{3}{\sqrt{10}}$$

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی



۱۱ اگر  $f(x) = \frac{1}{3} - 2 \cos^2 ax$  و دوره تناوب تابع  $y = \frac{1}{3} - 2f(2ax)$  برابر  $\frac{\pi}{4}$  باشد، مقدار مثبت  $a$  کدام است؟

۱)  $\sqrt{2}$       ۲) ۲      ۳) ۴      ۴) ۸

پاسخ: گزینه ۱

Hint

اول ضابطه تابع  $f(2ax)$  رو با جای گذاری  $2ax$  در  $f(x)$  به دست بیار، بعد با اتحادهای مثلثاتی (مخصوصاً اتحادهای کسینوس و دو برابر کمان)، ضابطه رو ساده کن تا بتونی دوره تناوبش رو پیدا کنی.

درس: Box

۱) تعریف تابع متناوب و دوره تناوب توابع معروف:

تابعی را متناوب می‌نامیم، اگر عدد مثبت  $T$  وجود داشته باشد که با افزودن آن به متغیر تابع، مقدار تابع تغییر نکند، یعنی:

$$f(x + T) = f(x)$$

کوچک‌ترین عدد مثبت  $T$  که در این شرط صدق کند، دوره تناوب اصلی تابع نامیده می‌شود.

دوره تناوب اصلی ( $T$ )	ضابطه تابع
$\frac{2\pi}{ a }$	$\sin(ax), \cos(ax)$
$\frac{\pi}{ a }$	$\sin^{2n}(ax), \cos^{2n}(ax)$ (توان زوج)
$\frac{\pi}{ a }$	$ \sin(ax) ,  \cos(ax) $
$\frac{\pi}{ a }$	$\tan(ax), \cot(ax)$
۱	$x - [x]$
۲	$(-1)^{[x]}$

۲) تأثیر تبدیلات بر دوره تناوب:

- تبدیلات بی تأثیر: انتقال‌های افقی و عمودی، قرینه‌سازی‌ها و انبساط / انقباض عمودی، دوره تناوب یک تابع را تغییر نمی‌دهند.
- تبدیلات تأثیرگذار: تنها تبدیل انبساط و انقباض افقی دوره تناوب را تغییر می‌دهد. اگر دوره تناوب تابع  $f(x)$  برابر  $T$  باشد، دوره تناوب تابع  $f(bx)$  از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$T_{\text{new}} = \frac{T_{\text{old}}}{|b|}$$

مثال دوره تناوب تابع  $y = 5 \sin(4x - 3) + 2$  برابر است با  $T = \frac{2\pi}{|4|} = \frac{\pi}{2}$ . مقادیر ۲، ۳، ۵، تأثیری در دوره تناوب ندارند.

نکته

اتحادهای مثلثاتی دو برابر کمان ( $2\alpha$ ):

این اتحادها که از قرارداد  $\beta = \alpha$  در فرمول‌های مجموع زاویه  $(\alpha + \beta)$  به دست می‌آیند، برای ساده‌سازی عبارات مثلثاتی بسیار پرکاربرد هستند.

$$\sin(2\alpha) = 2 \sin \alpha \cos \alpha$$

سینوس دو برابر کمان:

کسینوس دو برابر کمان:

این اتحاد سه شکل معادل و پرکاربرد دارد که هر سه از اتحاد اصلی و رابطه  $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$  به دست می‌آیند:

$$\cos(2\alpha) = \cos^2 \alpha - \sin^2 \alpha \quad (1)$$

$$\cos(2\alpha) = 2 \cos^2 \alpha - 1 \quad (2)$$

$$\cos(2\alpha) = 1 - 2 \sin^2 \alpha \quad (3)$$



پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا ضابطه تابع  $y = \frac{1}{3} - 2f(2ax)$  را مشخص می‌کنیم:

$$f(2ax) = \frac{1}{3} - 2 \cos^2(2ax) \Rightarrow y = \frac{1}{3} - 2\left(\frac{1}{3} - 2 \cos^2(2ax)\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{3} + 4 \cos^2(2ax) \Rightarrow y = \frac{-1}{3} + 4\left(\frac{1 + \cos(4ax)}{2}\right)$$

$$\Rightarrow y = \frac{-1}{3} + 2(1 + \cos(4ax)) \Rightarrow y = \frac{5}{3} + 2 \cos(4ax)$$

گام دوم: حال به کمک رابطه دوره تناوب داریم:

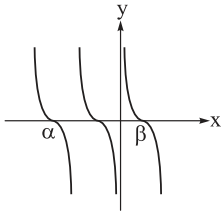
$$T = \frac{2\pi}{|4a|} \Rightarrow \frac{\pi}{4} = \frac{2\pi}{4a} \Rightarrow a^2 = 2 \xrightarrow{a>0} a = \sqrt{2}$$





۱۲

شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع  $f(x) = a \cot 3x$  است. حاصل  $\frac{\alpha}{\beta}$  کدام است؟



(۱) -۳

(۲) -۴

(۳) -۶

(۴) -۲

پاسخ: گزینه ۱

صفرهای تابع کتانژانت، همون نقاط برخورد با محور xها هستن. معادله  $\cot(3x) = 0$  رو حل کن تا طول این نقاط رو پیدا کنی و نسبتشون رو به دست بیاری.



کرتس Box

نمودار و ویژگی‌های توابع تانژانت و کتانژانت:

$y = \cot x$	$y = \tan x$	ویژگی
		نمودار
$\pi$	$\pi$	دوره تناوب
$\mathbb{R} - \{k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$	$\mathbb{R} - \{k\pi + \frac{\pi}{2} \mid k \in \mathbb{Z}\}$	دامنه
$x = k\pi + \frac{\pi}{2}$	$x = k\pi$	ریشه‌ها
در هر بازه، دامنه اکیداً نزولی است.	در هر بازه، دامنه اکیداً صعودی است.	یکنوایی
$\mathbb{R}$	$\mathbb{R}$	برد

گام اول: ابتدا توجه کنید که ضریب a روی طول نقاط  $\alpha$  و  $\beta$  بی‌تأثیر است. برای مشخص کردن طول نقاط  $\alpha$  و  $\beta$ ، نقاط برخورد

پاسخ خیلی تشریحی

نمودار تابع با محور xها را مشخص می‌کنیم:

$$f(x) = 0 \Rightarrow \cot 3x = 0 \Rightarrow \begin{cases} 3x = \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{\pi}{6} \Rightarrow \beta \\ 3x = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{-\pi}{6} \\ 3x = \frac{-3\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{-\pi}{2} \Rightarrow \alpha \end{cases}$$

$$\frac{\alpha}{\beta} = \frac{-\frac{\pi}{2}}{\frac{\pi}{6}} = -3$$

گام دوم: بنابراین نسبت خواسته شده برابر است با:

ضریب a که در مقدار صفرهای تابع تأثیر ندارد، حالا چون نسبت صفرها را می‌خواهیم، پس ضریب انقباض افقی هم بی‌تأثیر است، این یعنی می‌توان برای سادگی تابع  $y = \cot x$  را در نظر گرفت.

تیزبازی



۱۳

نمودار تابع  $f(x) = 3 \tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right)$  محور  $y$ ها را با عرض  $a$  و محور  $x$ ها را با طول  $b$  قطع می‌کند و  $x = c$  معادله یکی از مجانب‌های قائم آن است. اگر  $b > 0$  و  $c < 0$  باشد، کمترین مقدار  $\frac{b-c}{a}$  کدام است؟

$$\frac{5\pi}{4} \quad (4)$$

$$\frac{3\pi}{4} \quad (3)$$

$$\frac{3\pi}{2} \quad (2)$$

$$\pi \quad (1)$$

## پاسخ: گزینه ۱

عرض از مبدأ  $(a)$ ، ریشه  $(b)$  و مجانب  $(c)$  تابع تانژانت رو از روی ضابطه کلیش پیدا کن. بعد با توجه به شروط مسئله، مناسبترین مقادیر رو برای  $b$  و  $c$  انتخاب کن تا کمترین مقدار خواسته شده به دست بیاد.

Hint

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ابتدا مقدار  $a$ ، یعنی  $f(0)$  را محاسبه می‌کنیم:

$$a = f(0) = 3 \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) = 3$$

گام دوم: حال برای مشخص کردن محل برخورد نمودار تابع با محور  $x$ ها داریم:

$$3 \tan\left(\frac{2x+\pi}{4}\right) = 0 \Rightarrow \frac{2x+\pi}{4} = k\pi \quad (k \in \mathbb{Z})$$

$$\Rightarrow x = \frac{(4k-1)\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

گام سوم: مجانب‌های تابع تانژانت در نقاطی است که آرگومان (زاویه) آن مضرب فردی از  $\frac{\pi}{2}$  باشد:

$$\frac{2x+\pi}{4} = \frac{(2n+1)\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = \frac{(4n+1)\pi}{2} \quad (n \in \mathbb{Z})$$

گام چهارم: برای پیدا کردن کمترین مقدار  $\frac{b-c}{a}$  باید عبارت  $b-c$  کمترین شود. این اتفاق زمانی رخ می‌دهد که  $b$  کمترین مقدار مثبت و  $c$  بزرگترین مقدار منفی خود را داشته باشد:

$$b: k=1 \Rightarrow b = \frac{(4-1)\pi}{2} = \frac{3\pi}{2}$$

$$c: n=-1 \Rightarrow c = \frac{(-4+1)\pi}{2} = \frac{-3\pi}{2}$$

$$\Rightarrow \min\left(\frac{b-c}{a}\right) = \frac{\frac{3\pi}{2} - \left(-\frac{3\pi}{2}\right)}{3} = \frac{6\pi}{3} = 2\pi$$



معادله  $\sin^2 x \cdot \tan(x + \frac{\pi}{4}) = \cos^2 x \cdot \cot(\frac{\pi}{4} - x)$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب حقیقی دارد؟ **۱۴**

۴ (۲)

۲ (۱)

صفر (۴)

۶ (۳)

### پاسخ: گزینه ۱

اول با استفاده از اتحادهای مثلثاتی، همه نسبت‌ها رو به یک نوع تبدیل کن و معادله رو تا جایی که می‌شه ساده کن. بعد معادله رو حل کن و حواست به دامنه تعریف تانژانت و کتانژانت باشه تا جواب‌های غیر قابل قبول رو حذف کنی.



### درس‌Box

حل معادلات مثلثاتی پایه:

راهبرد کلی حل معادلات مثلثاتی:

برای حل معادلات مثلثاتی در فرم کلی، ابتدا سعی می‌کنیم آن‌ها را به یکی از سه حالت پایه‌های زیر تبدیل کنیم و سپس با استفاده از جواب‌های عمومی هر حالت، معادله را حل می‌کنیم.

(۱) معادله را به یکی از سه فرم اصلی  $\sin u = a$ ،  $\cos u = a$  یا  $\tan u = a$  تبدیل می‌کنیم.

(۲) یک زاویه مشخص  $A$  پیدا می‌کنیم که در رابطه صدق کند (مثلاً  $\sin A = a$ ).

(۳) معادله را به شکل  $\sin u = \sin A$  (یا برای کسینوس و تانژانت نوشته و از فرمول جواب عمومی آن استفاده می‌کنیم).

(۱) معادله سینوسی ( $\sin u = a$ ):

پس از تبدیل معادله به شکل  $\sin u = \sin A$ ، جواب‌های عمومی آن دو دسته هستند:

$$\begin{cases} u = 2k\pi + A \\ u = 2k\pi + (\pi - A) \end{cases} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دلیل: در دایره مثلثاتی، سینوس یک زاویه با سینوس زاویه مکمل آن برابر است.

(۲) معادله کسینوسی ( $\cos u = a$ ):

پس از تبدیل معادله به شکل  $\cos u = \cos A$ ، جواب‌های عمومی آن دو دسته هستند:

$$\begin{cases} u = 2k\pi + A \\ u = 2k\pi - A \end{cases} \quad \text{یا} \quad u = 2k\pi \pm A \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دلیل: کسینوس یک تابع زوج است، بنابراین کسینوس یک زاویه با کسینوس قرینه آن برابر است.

(۳) معادله تانژانتی ( $\tan u = a$ ):

پس از تبدیل معادله به شکل  $\tan u = \tan A$ ، جواب عمومی آن یک دسته است:

$$u = k\pi + A \quad (k \in \mathbb{Z})$$

دلیل: دوره تناوب تابع تانژانت برابر با  $\pi$  است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: ابتدا توجه کنید که:

$$\cot(\frac{\pi}{4} - x) = \tan(\frac{\pi}{4} - (\frac{\pi}{4} - x)) = \tan(\frac{\pi}{4} + x)$$

گام دوم: با بازنویسی معادله به کمک گام قبلی داریم:

$$\sin^2 x \cdot \tan(x + \frac{\pi}{4}) = \cos^2 x \cdot \tan(x + \frac{\pi}{4})$$

$$\Rightarrow \tan(x + \frac{\pi}{4})(\sin^2 x - \cos^2 x) = 0$$

$$\Rightarrow \tan(x + \frac{\pi}{4})(-\cos^2 x) = 0$$

گام سوم: با حل معادله اخیر به دست آمده، داریم:

$$\tan(x + \frac{\pi}{4}) = 0 \Rightarrow x + \frac{\pi}{4} = k\pi, (k \in \mathbb{Z}) \Rightarrow x = k\pi - \frac{\pi}{4}, (k \in \mathbb{Z}) \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \checkmark \\ x = \frac{7\pi}{4} \checkmark \end{cases}$$



$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{3\pi}{4} \checkmark \\ x = \frac{5\pi}{4} \\ x = \frac{7\pi}{4} \checkmark \end{cases}$$

غ.ق. مقدار تانژانت تعریف نشده می شود.

بنابراین معادله در بازه  $[0, 2\pi]$ ، ۲ جواب حقیقی دارد.

معادله را با فرض  $\cos x \neq 0$ ، می توان به صورت زیر بازنویسی کرد:

په جور دیگه

$$\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} = \frac{\cot(\frac{\pi}{4} - x)}{\tan(x + \frac{\pi}{4})} \Rightarrow \tan^2 x = 1 \Rightarrow \tan x = 1 \text{ یا } \tan x = -1$$

$$\tan x = 1 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} x = \frac{\pi}{4} \\ x = \frac{5\pi}{4} \end{cases}$$

غ.ق. مقدار تانژانت تعریف نشده می شود.

$$\tan x = -1 \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} \begin{cases} x = \frac{3\pi}{4} \checkmark \\ x = \frac{7\pi}{4} \checkmark \end{cases}$$



۱۵ انتهای کمان‌های زوایایی که در معادله  $\sin 2x = \tan x$  صدق می‌کنند، روی دایره مثلثاتی تشکیل چند نقطه می‌دهند؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۵ (۲)

۶ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

معادله رو به صورت  $f(x) = 0$  مرتب کن و از  $\sin x$  فاکتور بگیر. معادله به دو بخش ساده‌تر تبدیل می‌شه که جواب‌های هر کدام رو جداگانه روی دایره مثلثاتی مشخص می‌کنی.



حالات خاص معادلات مثلثاتی:



موقعیت روی دایره	جواب کلی	معادله
حالات خاص سینوسی		
	$u = k\pi$ (مضارب صحیح $\pi$ )	$\sin u = 0$
	$u = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$	$\sin u = 1$
	$u = 2k\pi + \frac{3\pi}{2}$	$\sin u = -1$
حالات خاص کسینوسی		
	$u = k\pi + \frac{\pi}{2}$ (مضارب فرد $\frac{\pi}{2}$ )	$\cos u = 0$
	$u = 2k\pi$ (مضارب زوج $\pi$ )	$\cos u = 1$
	$u = (2k+1)\pi$ (مضارب فرد $\pi$ )	$\cos u = -1$

گام اول: ابتدا به کمک اتحادهای مثلثاتی، معادله را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\begin{aligned} \sin 2x = \tan x &\Rightarrow 2 \sin x \cos x = \frac{\sin x}{\cos x} \\ \Rightarrow 2 \sin x \cos x - \frac{\sin x}{\cos x} &= 0 \Rightarrow \sin x \left( 2 \cos x - \frac{1}{\cos x} \right) = 0 \\ \Rightarrow \sin x \left( \frac{2 \cos^2 x - 1}{\cos x} \right) &= 0 \Rightarrow \sin x \times \frac{\cos 2x}{\cos x} = 0 \end{aligned}$$

گام دوم: برای حل معادله اخیر با توجه به مخرج داریم:

$$\begin{aligned} \sin x = 0 &\Rightarrow x = k\pi, k \in \mathbb{Z} \quad \text{نقطه ۲} \\ \cos 2x = 0 &\Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \quad \text{نقطه ۴} \\ \cos x \neq 0 &\Rightarrow x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \end{aligned}$$

بنابراین انتهای کمان‌های زوایای جواب‌های این معادله روی دایره مثلثاتی ۶ نقطه متمایز ایجاد می‌کنند.



۱۶ اگر دوره تناوب  $f(x) = \cos ax$  برابر  $\pi$  باشد، آن گاه معادله  $f(x) + f(2x) = -1$  در بازه  $[0, 2\pi]$  چند جواب دارد؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

## پاسخ: گزینه ۱



Hint

با استفاده از دوره تناوب داده شده، مقدار  $|a|$  رو پیدا کن. بعد معادله رو تشکیل بده و با اتحاد کسینوس دو برابر کمان، اون رو به یه معادله درجه دو برحسب  $\cos(2x)$  تبدیل و حل کن.

گام اول: ابتدا به کمک دوره تناوب، ضابطه تابع  $f$  را مشخص می‌کنیم:

$$\pi = \frac{2\pi}{|a|} \Rightarrow |a| = 2$$

مقدار  $a = 2$  را در نظر می‌گیریم، زیرا  $\cos(-2x) = \cos 2x$ .

گام دوم: حال معادله را تشکیل می‌دهیم و به کمک اتحادهای مثلثاتی آن را ساده می‌کنیم:

$$\cos 2x + \cos 4x = -1 \Rightarrow \cos 2x + 2\cos^2 2x - 1 = -1$$

$$\Rightarrow 2\cos^2 2x + \cos 2x = 0 \Rightarrow \cos 2x(2\cos 2x + 1) = 0$$

گام سوم: حال برای حل معادله اخیر در بازه  $[0, 2\pi]$  داریم:

$$\cos 2x = 0 \Rightarrow 2x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$$

$$\cos 2x = \frac{-1}{2} \Rightarrow \cos 2x = \cos \frac{2\pi}{3} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{2\pi}{3}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$\xrightarrow{0 \leq x \leq 2\pi} x = \frac{\pi}{3}, \frac{2\pi}{3}, \frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{3}$$

بنابراین این معادله در بازه  $[0, 2\pi]$ ، ۸ جواب دارد.



۱۷ تابع  $f(x) = \frac{x^2 + ax}{x+1} + bx + 3$  روی دامنه‌اش، هم صعودی و هم نزولی است. حاصل  $\frac{f(a)}{b}$  کدام است؟

۱ (۴)

-۱ (۳)

-۳ (۲)

۳ (۱)

### پاسخ: گزینه ۲

**Hint** تابعی که هم صعودی و هم نزولی باشد، حتماً یک تابع ثابت است. ضابطه تابع رو طوری ساده کن که بتونی ضریب  $x$  و عبارات وابسته به  $x$  رو مساوی صفر قرار بدی.

**نکته** تابع ثابت هم صعودی و هم نزولی است.



### پاسخ خیلی تشریحی ✓

**گام اول:** ابتدا ضابطه تابع  $f$  را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$f(x) = \frac{x^2 + x - x + ax}{x+1} + bx + 3 = \frac{x(x+1) + (a-1)x}{x+1} + bx + 3$$

$$\Rightarrow f(x) = x + \frac{(a-1)x}{x+1} + bx + 3 \Rightarrow f(x) = (1+b)x + \frac{(a-1)x}{x+1} + 3$$

**گام دوم:** حالا چون تابع  $f$  هم صعودی و هم نزولی است، بنابراین تابعی ثابت است، پس ضابطه تابع  $f$  نباید وابستگی به  $x$  داشته باشد:

$$\begin{cases} 1+b=0 \Rightarrow b=-1 \\ a-1=0 \Rightarrow a=1 \end{cases} \Rightarrow f(x) = 3, x \neq -1$$

$$\frac{f(a)}{b} = \frac{f(1)}{-1} = \frac{3}{-1} = -3$$

**گام سوم:** مقدار خواسته شده برابر است با:



چندجمله‌ای  $f(x)$  مفروض است. اگر چندجمله‌ای  $(f \circ f)(x)$  بر  $x-1$  بخش‌پذیر باشد و باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $f(x)$  بر  $x^2 + x - 2$  برابر  $3x + 1$  باشد، باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $x + f(x)$  بر  $x^2 - 5x + 4$  کدام است؟

$$\begin{array}{l} (1) \quad \frac{x+1}{3} \\ (2) \quad \frac{1-x}{3} \\ (3) \quad \frac{16-x}{3} \\ (4) \quad \frac{x-16}{3} \end{array}$$

پاسخ: گزینه ۲

از قضیه تقسیم و باقی‌مانده استفاده کن، اطلاعات مسئله را به زبان ریاضی بنویس؛ مثلاً بخش‌پذیری  $f \circ f$  بر  $x-1$ ، یعنی  $f(f(1)) = 0$ . با این اطلاعات می‌تونی مقادیر لازم رو برای حل دستگاه نهایی پیدا کنی.



درس‌Box

تقسیم چندجمله‌ای‌ها و قضایای مرتبط:

قانون اصلی تقسیم:

در تقسیم چندجمله‌ای  $A$  (مقسوم) بر  $B$  (مقسوم‌علیه)، خارج‌قسمت  $Q$  و باقی‌مانده  $R$  به گونه‌ای به دست می‌آیند که همواره رابطه زیر برقرار است:

$$A = B \cdot Q + R$$

درجه باقی‌مانده  $(R)$  همواره از درجه مقسوم‌علیه  $(B)$  کوچک‌تر است.

قضیه باقی‌مانده (برای مقسوم‌علیه درجه‌اول):

برای به دست آوردن باقی‌مانده تقسیم چندجمله‌ای  $P(x)$  بر عبارت درجه یک  $ax + b$ ، کافی است ریشه مقسوم‌علیه (یعنی  $x = -\frac{b}{a}$ ) را در مقسوم قرار دهیم. باقی‌مانده برابر است با:

$$R = P\left(-\frac{b}{a}\right)$$

قضیه عامل (بخش‌پذیری):

یک چندجمله‌ای  $P(x)$  بر عبارت  $(x-a)$  بخش‌پذیر است، اگر و تنها اگر باقی‌مانده تقسیم صفر باشد. با توجه به قضیه باقی‌مانده، این شرط معادل است با:

$$P(x) \Leftrightarrow P(a) = 0$$

به عبارت دیگر،  $(x-a)$  یک عامل (فاکتور) از  $P(x)$  است، اگر و تنها اگر  $a$  یک ریشه از  $P(x)$  باشد.

محاسبه باقی‌مانده در تقسیم بر عبارت درجه دوم:

برای محاسبه باقی‌مانده تقسیم یک چندجمله‌ای  $f(x)$  بر یک عبارت درجه دوم تجزیه‌پذیر، مانند  $(x-p)(x-q)$ ، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

(۱) باقی‌مانده را به صورت یک عبارت درجه یک، یعنی  $ax + b$  در نظر می‌گیریم.

$$f(x) = (x-p)(x-q) \cdot Q(x) + ax + b \quad (2) \text{ رابطه اصلی تقسیم را می‌نویسیم:}$$

(۳) ریشه‌های مقسوم‌علیه، یعنی  $p$  و  $q$  را در رابطه بالا جای‌گذاری می‌کنیم تا یک دستگاه دو معادله - دو مجهولی برای  $a$  و  $b$  به دست آید:

$$\begin{cases} f(p) = ap + b \\ f(q) = aq + b \end{cases}$$

(۴) با حل این دستگاه، مقادیر  $a$  و  $b$  را پیدا کرده و باقی‌مانده  $(ax + b)$  را مشخص می‌کنیم.

$$(f \circ f)(1) = 0$$

گام اول: ابتدا توجه کنید که چون  $(f \circ f)(x)$  بر  $x-1$  بخش‌پذیر است، پس:

$$f(x) = Q(x)(x^2 + x - 2) + 3x + 1 \Rightarrow f(1) = 4, f(-2) = -5$$

گام دوم: حال با توجه به قضیه تقسیم داریم:

$$\xrightarrow{(f \circ f)(1) = 0} f(4) = 0$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



**گام سوم:** حال برای پیدا کردن باقی مانده تقسیم چندجمله‌ای  $x + f(x)$  بر  $x^2 - 5x + 4$  با توجه به این که مقسوم‌علیه از درجه ۲ است، باقی مانده حداکثر از درجه ۱ است. فرض می‌کنیم باقی مانده  $R(x) = mx + n$  باشد، طبق قضیه تقسیم داریم:

$$x + f(x) = Q'(x)(x-1)(x-4) + mx + n \Rightarrow \begin{cases} x=1 \Rightarrow 1 + f(1) = m + n \\ x=4 \Rightarrow 4 + f(4) = 4m + n \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} m + n = 5 \\ 4m + n = 4 \end{cases} \Rightarrow 3m = -1 \Rightarrow m = -\frac{1}{3} \Rightarrow n = \frac{16}{3} \Rightarrow R(x) = \frac{16-x}{3}$$



۱۹ اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی از رأس آن عبور نکند، آن گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی

کدام است؟

- (۲) سهمی
- (۴) بیضی

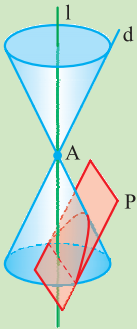
- (۱) هذلولی
- (۳) دایره

**مشاوره** بررسی وضعیت صفحه و سطح مخروطی، از تیپ‌های پرتکرار سؤال‌های امتحان نهایی است.

**پاسخ: گزینه ۲**

**پاسخ خیلی تشریحی**

اگر صفحه P با مولد d موازی باشد و از رأس مخروط عبور نکند، در این صورت فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک سهمی است. (در این حالت اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک آن‌ها یک خط است.)



پاسخ صحیح را از میان کلمات داخل پرانتز انتخاب کنید و در پاسخ برگ بنویسید.

الف) اگر صفحه‌ای موازی با مولد یک سطح مخروطی، از رأس آن عبور نکند، آن گاه فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک ..... است. (هذلولی - سهمی)

(سؤال ۲ (قسمت الف) - امتحان نهایی فرداد ۱۴۰۴)

امتحان  
نهایی



۲۰

نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض اند. تعداد نقاطی که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله هستند،

کدام نمی تواند باشد؟

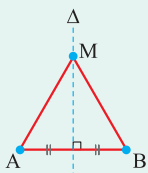
- (۱) ۱  
(۲) ۲  
(۳) ۳  
(۴) بی شمار

**مشاوره** این سؤال، یکی از تمرین های کتاب درسی است که در امتحان های نهایی هم مورد پرسش قرار گرفته است.

**پاسخ: گزینه ۲**

**درس Box**

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو نقطه A و B به یک فاصله هستند، عمودمنصف پاره خط AB است.

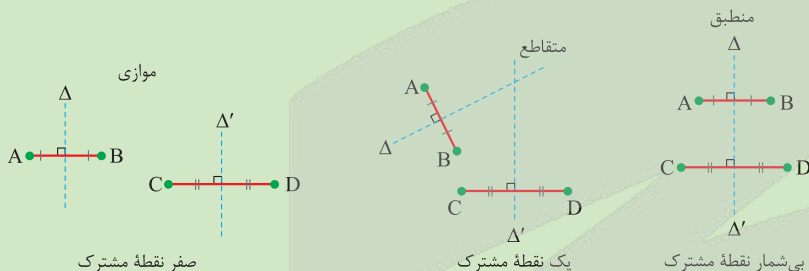


$$M \in \Delta \Leftrightarrow MA = MB$$

**گام اول:** نقاطی که از A و B به یک فاصله اند، روی عمودمنصف پاره خط AB واقع اند؛ نقاطی که از C و D به یک فاصله اند، روی عمودمنصف پاره خط CD واقع اند.

**گام دوم:** با توجه به گام قبل، نقطه مشترک عمودمنصف AB و عمودمنصف CD، نقطه ای است که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله است.

**گام سوم:** عمودمنصف AB و عمودمنصف CD حالت های زیر را می توانند نسبت به هم داشته باشند:



$\Delta$  و  $\Delta'$  نمی توانند دارای دقیقاً ۲ نقطه مشترک باشند.

**کتاب درسی**

نقاط A, B, C و D در صفحه مفروض اند. نقطه ای در این صفحه بیابید که از A و B به یک فاصله و از C و D نیز به یک فاصله باشد (بحث کنید).

(هندسه (۳) - تمرین ۲ صفحه ۳۹ کتاب درسی)



۲۱ اگر  $A$  یک ماتریس  $3 \times 3$  باشد، به طوری که  $|A| = 2$ ، آن گاه حاصل  $|2A^{-1}|^3 \times |(A^2)^{-1}|$  کدام است؟

۴ (۴)

۸ (۳)

۱۶ (۲)

۳۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

اگر  $A$  ماتریسی  $n \times n$ ،  $k$  عددی حقیقی و  $m$  عددی طبیعی باشد، آن گاه:

درس Box

$$۱) |A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

$$۲) |A^m| = |A|^m$$

$$۳) |kA| = k^n |A|$$

با توجه به درس یاکس، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$|2A^{-1}|^3 \times |(A^2)^{-1}| = (2^3 |A^{-1}|)^3 \times \frac{1}{|A^2|} = 2^9 \left(\frac{1}{|A|}\right)^3 \times \frac{1}{|A|^2} = \frac{2^9}{|A|^5} = \frac{2^9}{2^5} = 2^4 = 16$$



۲۲ اگر  $A$  ماتریسی مربعی و  $I$  ماتریس همانی هم مرتبه با آن و وارون ماتریس  $A - 2I$  برابر با ماتریس  $B$  باشد، حاصل  $B^{-1}(A+I)B$  کدام است؟

$$B^{-1} + 3I \quad (2)$$

$$A + 2I \quad (1)$$

$$A^{-1} + 2I \quad (4)$$

$$B + 2I \quad (3)$$

### پاسخ: گزینه ۲

درس Box

(۱) اگر ماتریس  $X$  وارون ماتریس  $Y$  باشد، آن گاه داریم:  $XY = YX = I$ .  
 (۲) ماتریس همانی ( $I$ ) عضو بی اثر عمل ضرب ماتریس ها است، یعنی  $IX = XI = X$ .  
 (۳) برای محاسبه ماتریس  $XYZ$  می توانیم ابتدا  $XY$  را حساب کرده، از چپ در  $Z$  ضرب کنیم یا ابتدا  $YZ$  را حساب کرده از راست در  $X$  ضرب کنیم، یعنی  $XYZ = (XY)Z = X(YZ)$ .

چون ماتریس  $B$  وارون ماتریس  $A - 2I$  است، پس داریم:  $A - 2I = B^{-1}$ . اکنون به صورت زیر عمل می کنیم:

$$B^{-1}(A+I)B = B^{-1}[(A-2I)+2I]B = B^{-1}(A-2I)B + 2B^{-1}IB = B^{-1}B^{-1}B + 2B^{-1}B = B^{-1}I + 2I = B^{-1} + 2I$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۲۳ اگر  $A = [a_{ij}]_{3 \times 3}$  به طوری که  $a_{ij}$  عضو کوچک تر مجموعه  $\{i, j\}$  باشد و  $\begin{bmatrix} |A|+1 & -3|A| \\ -|A| & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$

آن گاه  $x + y$  کدام است؟

- ۸ (۱)      -۷ (۲)      ۷ (۳)      -۸ (۴)

مشاوره این سؤال مشابه سؤال ۱۳۹ کنکور ریاضی داخل ۱۴۰۱ طراحی شده است.

پاسخ: گزینه ۳

اگر  $A$  یک ماتریس مربعی باشد، به طوری که  $AX = B$ ، آن گاه  $X = A^{-1}B$ .

گام اول: ماتریس  $A$  را به دست می آوریم:

$$A = [a_{ij}]_{3 \times 3} ; a_{ij} = \min\{i, j\} \Rightarrow A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

گام دوم: با بسط دادن نسبت به سطر اول، دترمینان ماتریس  $A$  را به دست می آوریم:

$$|A| = 1 \times (6 - 4) - 1 \times (3 - 2) + 1 \times (2 - 2) = 2 - 1 = 1$$

گام سوم: حالا با توجه به فرض سؤال، می توانیم  $x$  و  $y$  را به دست آوریم:

$$\begin{bmatrix} |A|+1 & -3|A| \\ -|A| & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{4-3} \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow x = 4, y = 3 \Rightarrow x + y = 7$$



اگر  $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$  و ماتریس  $X$  در رابطه ماتریسی  $X = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$  صدق کند، کوچک ترین

(سؤال ۱۳۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)

درایه قطر اصلی ماتریس  $X$  کدام است؟

- ۸ (۴)      ۶ (۳)      -۳ (۲)      -۱۵ (۱)



در مثلث متساوی‌الاضلاع  $ABC$  به طول ضلع  $a$ ، مکان هندسی نقاطی درون مثلث که مجموع فاصله‌های آن‌ها از دو ضلع  $AB$  و  $AC$ ، دو برابر فاصله آن‌ها از ضلع  $BC$  است، کدام است؟

(۲) پاره‌خطی به طول  $\frac{2}{3}a$  موازی با  $BC$

(۱) پاره‌خطی به طول  $\frac{2}{3}a$  عمود بر  $BC$

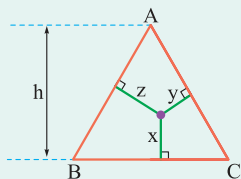
(۴) پاره‌خطی به طول  $\frac{1}{3}a$  موازی با  $BC$

(۳) پاره‌خطی به طول  $\frac{1}{3}a$  عمود بر  $BC$

**مشاوره** سوالی نسبتاً دشوار که ترکیبی از «مکان هندسی» از هندسه (۳) و «خواص مثلث متساوی‌الاضلاع» از هندسه (۱) است.

### پاسخ: گزینه ۲

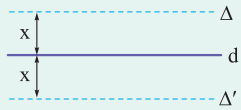
(۱) مجموع فاصله‌های هر نقطه درون یک مثلث متساوی‌الاضلاع از سه ضلع آن برابر با ارتفاع آن مثلث است.



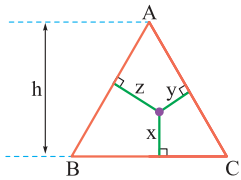
$$x + y + z = h$$

(۲) در دو مثلث متشابه، نسبت ارتفاع‌های نظیر، برابر با نسبت تشابه است.

(۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط ثابت  $d$  به فاصله معلوم  $x$  هستند، دو خط موازی با  $d$  و به فاصله  $x$  از آن است ( $\Delta$  و  $\Delta'$ ).



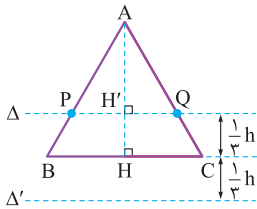
گام اول: فرض کنید در شکل زیر  $y + z = 2x$ ، داریم:



$$x + y + z = h \Rightarrow x + 2x = h \Rightarrow x = \frac{1}{3}h$$

یعنی نقطه مطلوب، به فاصله  $\frac{1}{3}h$  از ضلع  $BC$  واقع است.

گام دوم: مکان هندسی نقاطی که از  $BC$  به فاصله  $\frac{1}{3}h$  هستند، دو خط موازی با  $BC$ ، به فاصله  $\frac{1}{3}h$  از آن است.



گام سوم: با توجه به شکل گام قبل، قسمتی از دو خط  $\Delta$  و  $\Delta'$  که درون مثلث  $ABC$  قرار می‌گیرند، پاسخ سؤال است (پاره‌خط  $PQ$ ). به دلیل متشابه‌بودن دو مثلث  $APQ$  و  $ABC$ ، داریم:

$$\frac{PQ}{BC} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{PQ}{a} = \frac{\frac{2}{3}h}{h} \Rightarrow PQ = \frac{2}{3}a$$

### کرتس Box

### پاسخ خیلی تشریحی ✓



۲۵

تعداد نقاط مرزی یک چندضلعی شبکه‌ای، چهار برابر تعداد نقاط درونی آن است. مساحت این چندضلعی کدام می‌تواند باشد؟

۱۰۳ (۱)

۱۰۲ (۲)

۱۰۱ (۳)

۱۰۰ (۴)

## پاسخ: گزینه ۲

درس‌Box

اگر تعداد نقاط درونی یک چندضلعی شبکه‌ای  $i$  و تعداد نقاط مرزی آن  $b$  باشد، مساحت چندضلعی شبکه‌ای برابر است با:

$$S = \frac{b}{2} + i - 1$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓ گام اول: می‌دانیم  $S = \frac{b}{2} + i - 1$  و طبق فرض  $b = 4i$ ، پس:

$$S = \frac{4i}{2} + i - 1 \Rightarrow S = 3i - 1 \quad (*)$$

گام دوم: از تساوی (\*) نتیجه می‌گیریم  $i = \frac{S+1}{3}$ . از آن جا که  $i$  باید عددی صحیح باشد، گزینه‌ای جواب سؤال است که در آن  $S+1$  مضرب ۳ باشد که فقط در گزینه (۲) این اتفاق می‌افتد.



۲۶ تعداد قطره‌هایی که از سه رأس متوالی یک چندضلعی محدب می‌گذرد ۲۶ تا است. تعداد کل قطرهای این چندضلعی کدام است؟

۶۴ (۴)

۵۴ (۳)

۴۵ (۲)

۳۵ (۱)

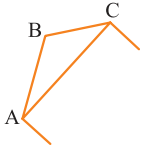
پاسخ: گزینه ۳

درس‌Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

از هر رأس یک  $n$  ضلعی محدب،  $(n-3)$  قطر می‌گذرد و تعداد کل قطرهای آن برابر است با  $\frac{n(n-3)}{2}$ .

گام اول: از رأس  $A$ ،  $(n-3)$  قطر، از رأس  $B$ ،  $(n-3)$  قطر و از رأس  $C$  نیز  $(n-3)$  قطر می‌گذرد، اما قطر  $AC$  را هم در میان قطرهای گذرنده از  $A$  و هم در میان قطرهای گذرنده از  $C$  شمرده‌ایم، پس بنا به فرض سؤال، باید:



$$3(n-3) - 1 = 26 \Rightarrow 3(n-3) = 27 \Rightarrow n-3 = 9 \Rightarrow n = 12$$

گام دوم: تعداد کل قطرهای ۱۲ ضلعی محدب برابر است با:

$$\frac{12 \times (12-3)}{2} = 54$$



۲۷ در دوزنقه متساوی الساقین به طول ساق ۵ و قاعده‌های ۳ و ۹، فاصله هر رأس قاعده بزرگ، از ساق مقابل آن، کدام است؟

۱۰/۲ (۲)

۸/۴ (۱)

۹/۶ (۴)

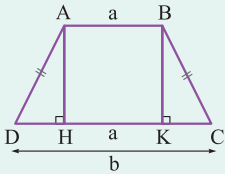
۷/۲ (۳)

**مشاوره** در حل سؤال‌های دوزنقه متساوی الساقین، رسم دو ارتفاع دوزنقه را امتحان کنید.

**پاسخ: گزینه ۳**

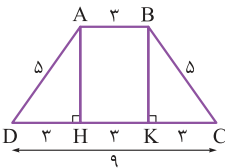
**درس Box**

مطابق شکل، اگر از دو سر قاعده کوچک یک دوزنقه متساوی الساقین، ارتفاع‌های آن را رسم کنیم، داریم:



$$DH = CK = \frac{b-a}{2}$$

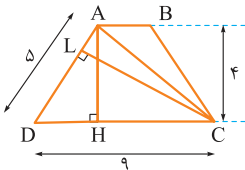
**گام اول:** ارتفاع‌های دوزنقه را از دو سر قاعده کوچک آن رسم می‌کنیم، داریم:



$$DH = CK = \frac{9-3}{2} = 3$$

با استفاده از قضیه فیثاغورس در مثلث ADH داریم  $AH = 4$ .

**گام دوم:** با توجه به شکل، طول  $CL$  مد نظر سؤال است. اگر از  $A$  به  $C$  وصل کنیم، داریم:



$$S_{ACD} = \frac{1}{2} AH \cdot CD = \frac{1}{2} \times 4 \times 9 = 18$$

**گام سوم:** از طرفی داریم  $S_{ACD} = \frac{1}{2} CL \cdot AD$ ، پس:

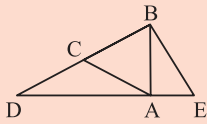
$$18 = \frac{1}{2} CL \times 5 \Rightarrow CL = \frac{2 \times 18}{5} = \frac{36}{5} = 7 \frac{1}{5}$$

**پاسخ خیلی تشریحی**

۲۸

در شکل زیر، مثلث ABC متساوی الاضلاع و مثلث ACD متساوی الساقین است. اگر  $BE = \frac{2}{3} AD$ ، آن گاه نسبت مساحت مثلث BDE به مساحت ABC کدام است؟

**مشاوره** این سؤال مشابه سؤال ۲۸ کنکور ریاضی خارج از کشور ۱۴۰۴، البته با سطح دشواری آسان‌تر از آن طراحی شده است.



(۲) ۳  
(۴)  $\frac{3\sqrt{3}}{2}$

(۱)  $\frac{8}{3}$   
(۳)  $\frac{9}{4}$

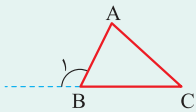
**پاسخ: گزینه ۱**

چرا مثلث BDE در رأس B قائم‌الزاویه است؟

**Hint**

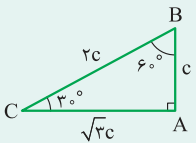
**درس Box**

(۱) در هر مثلث، هر زاویه خارجی برابر است با مجموع دو زاویه داخلی غیرمجاور آن.



$$\hat{B}_1 = \hat{A} + \hat{C}$$

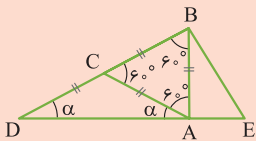
(۲) در مثلث قائم‌الزاویه‌ای که زاویه‌های حاده آن  $30^\circ$  و  $60^\circ$  هستند، ضلع روبه‌روی زاویه  $30^\circ$ ، نصف وتر است.



(۳) مساحت مثلث متساوی الاضلاعی به طول ضلع X برابر با  $\frac{\sqrt{3}}{4} X^2$  است.

**گام اول:** وقتی مثلث ABC متساوی الاضلاع است، هر سه زاویه آن  $60^\circ$  هستند و وقتی مثلث ACD متساوی الساقین است، زاویه‌های مجاور AD با هم برابرند که آن‌ها را  $\alpha$  در نظر گرفته‌ایم. زاویه  $ACB$  برای مثلث ACD زاویه خارجی است، پس:

**پاسخ خیلی تشریحی**

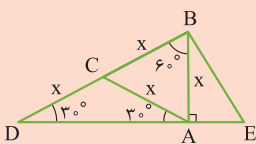


$$60^\circ = \alpha + \alpha \Rightarrow \alpha = 30^\circ$$

**گام دوم:** از آن‌جا که  $\hat{BAD} = 90^\circ$ ، پس BA عمود است بر DE. در مثلث قائم‌الزاویه ABD، ضلع روبه‌رو به زاویه  $60^\circ$

$$AD = \frac{\sqrt{3}}{2} BD = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 2x = \sqrt{3}x$$

است، پس:



**گام سوم:** طبق فرض، داریم  $BE = \frac{2}{3} AD$ ، یعنی:

$$BE = \frac{2\sqrt{3}}{3} x \Rightarrow x = \frac{\sqrt{3}}{2} BE \Rightarrow AB = \frac{\sqrt{3}}{2} BE$$

پس زاویه‌های حاده مثلث قائم‌الزاویه ABE،  $30^\circ$  و  $60^\circ$  هستند، پس  $\hat{DBE} = 60^\circ + 30^\circ = 90^\circ$ ، یعنی مثلث BDE در رأس B قائم‌الزاویه است.

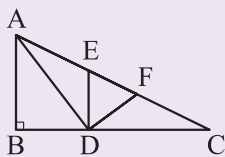
**گام چهارم:** خواسته سؤال برابر است با:

$$\frac{S_{BDE}}{S_{ABC}} = \frac{\frac{1}{2} BD \cdot BE}{\frac{\sqrt{3}}{4} x^2} = \frac{\frac{1}{2} (2x) \left( \frac{2\sqrt{3}}{3} x \right)}{\frac{\sqrt{3}}{4} x^2} = \frac{8}{3}$$



در مثلث شکل زیر، اگر مثلث DEF متساوی الاضلاع و مثلث های ADE و CFD متساوی الساقین باشند، آن گاه  $\frac{AD}{BD}$

(سؤال ۲۸ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (فارج از کشور))



کدام است؟

۲ (۱)

$\frac{1}{5}$  (۲)

$\sqrt{2}$  (۳)

$\sqrt{3}$  (۴)



۲۹

از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، یک چهارضلعی پدید می‌آید. اگر محیط این چهارضلعی دو برابر طول قطر مستطیل باشد، آن‌گاه نسبت طول به عرض مستطیل کدام است؟

۴ (۴)

$2 + \sqrt{3}$  (۳)

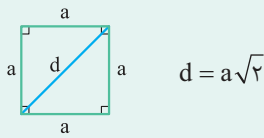
$2\sqrt{3}$  (۲)

۲ (۱)

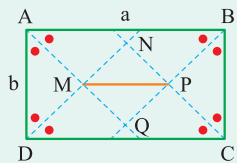
پاسخ: گزینه ۳

کرتی Box

(۱) طول قطر هر مربع،  $\sqrt{2}$  برابر طول ضلع آن است.

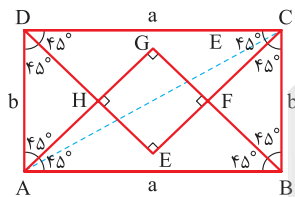


(۲) از برخورد نیمسازهای داخلی مستطیلی به طول  $a$  و عرض  $b$ ، مربعی به طول قطر  $a - b$  پدید می‌آید.



گام اول: شکل مناسب را رسم می‌کنیم. می‌دانیم از برخورد نیمسازهای زوایای داخلی یک مستطیل، مربعی پدید می‌آید که طول قطر آن برابر تفاضل طول اضلاع مستطیل است؛ بنابراین اندازه ضلع این مربع  $\frac{1}{\sqrt{2}}$  برابر قطر آن است. مطابق شکل، داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$EH = \frac{AB - AD}{\sqrt{2}} = \frac{a - b}{\sqrt{2}} \text{ (ضلع مربع)}$$

$$\Rightarrow \text{محیط مربع EFGH} = 4EH = \frac{4(a - b)}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}(a - b)$$

گام دوم: طبق فرض سؤال، داریم:

$$\text{محیط EFGH} = 2AC \Rightarrow 2\sqrt{2}(a - b) = 2\sqrt{a^2 + b^2} \Rightarrow 2a^2 + 2b^2 - 4ab = a^2 + b^2 \Rightarrow a^2 - 4ab + b^2 = 0$$

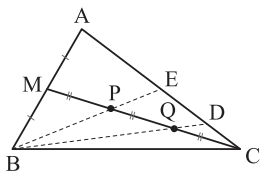
$$\xrightarrow{\div b^2} \left(\frac{a}{b}\right)^2 - 4\left(\frac{a}{b}\right) + 1 = 0 \quad (*)$$

گام سوم: فرض کنیم  $t = \frac{a}{b}$ ؛ در این صورت از معادله (\*) داریم:

$$t^2 - 4t + 1 = 0 \xrightarrow{\text{حل معادله با روش } \Delta} t = 2 \pm \sqrt{4 - 1} \xrightarrow{t > 1} t = 2 + \sqrt{3}$$



۳۰ مطابق شکل، نقاط P و Q میانه CM را به سه قسمت برابر تقسیم کرده‌اند، نسبت  $\frac{DE}{AC}$  برابر با کدام است؟

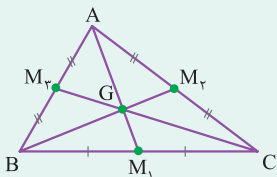


- / ۳ (۱)
- / ۲۵ (۲)
- / ۲ (۳)
- / ۳۵ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

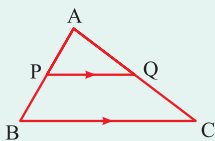
کرتس Box

(۱) میانه‌های هر مثلث هم‌سازند و نقطه هم‌رسی میانه‌ها، هر کدام از میانه‌ها را به نسبت ۲ به ۱ تقسیم می‌کند.



$$\frac{AG}{GM_1} = \frac{BG}{GM_2} = \frac{CG}{GM_3} = \frac{2}{1}$$

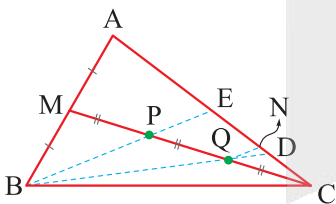
(۲) تعمیم قضیه تالس: در شکل زیر، اگر PQ موازی با BC باشد، آن‌گاه داریم:



$$\frac{AP}{AB} = \frac{AQ}{AC} = \frac{PQ}{BC}$$

گام اول: از آن‌جا که CM میانه و  $\frac{CP}{PM} = 2$ ، نقطه P محل هم‌رسی میانه‌های ABC است، پس BE هم میانه و E وسط AC و  $BP = 2PE$  است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



گام دوم: از Q خطی موازی با BE رسم می‌کنیم، بنا به تعمیم قضیه تالس در مثلث CPE داریم:

$$QN \parallel PE \Rightarrow \frac{QN}{PE} = \frac{CN}{CE} = \frac{CQ}{CP} = \frac{1}{2} \Rightarrow \begin{cases} QN = \frac{1}{2} PE \Rightarrow QN = \frac{1}{6} BE \\ CN = \frac{1}{2} CE \Rightarrow CN = NE = \frac{1}{4} AC \end{cases}$$

گام سوم: بنا به تعمیم قضیه تالس در مثلث BDE داریم:

$$QN \parallel BE \Rightarrow \frac{ND}{DE} = \frac{QN}{BE} = \frac{1}{6} \Rightarrow \xrightarrow{\text{تفضیل در صورت}} \frac{NE}{DE} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{\frac{1}{4} AC}{DE} = \frac{5}{6} \Rightarrow \frac{DE}{AC} = \frac{6}{20} = \frac{3}{10}$$



۳۱

چند عدد صحیح  $a$  وجود دارد که به ازای آن‌ها رابطه  $|a| = (4a, 125)$  درست باشد؟

- (۱) صفر
- (۲) ۲
- (۳) ۴
- (۴) ۸

**مشاوره** در سال ۱۴۰۴ یک تست در آزمون نهایی مطرح شد که مشابه این سؤال بود. پس حواستان باشد که حل تست‌های متنوع، هم برای کنکور لازم است و همه برای نهایی!

**پاسخ: گزینه ۴**

$a$  مقسوم‌علیه ۱۲۵ است.



**پاسخ خیلی تشریحی**

**گام اول:** عدد  $|a|$  ب‌م‌دو عدد  $4a$  و  $125$  است. از طرفی مقسوم‌علیه‌های طبیعی ۱۲۵ اعداد  $1, 5, 25, 125$  هستند، پس کافی است همین اعداد و قرینه آن‌ها را امتحان کنیم. دقت کنید که  $(a, b)$  با  $(-a, b)$  فرقی ندارد.

**گام دوم:**

$$a = \pm 1 \Rightarrow (4, 125) = |1| = 1 \quad \checkmark$$

$$a = \pm 5 \Rightarrow (4 \times 5, 125) = |5| = 5 \quad \checkmark$$

$$a = \pm 25 \Rightarrow (4 \times 25, 125) = |25| = 25 \quad \checkmark$$

$$a = \pm 125 \Rightarrow (4 \times 125, 125) = |125| = 125 \quad \checkmark$$

**گام سوم:** به ازای هر هشت عدد، رابطه داده‌شده درست است.

(سؤال ۳ - امتحان نوایی فرداد ۱۴۰۴)

به ازای چند مقدار  $a$ ، تساوی  $(2a, 27) = a$  برقرار است؟

۸ (د)

۴ (ج)

۲ (ب)

۱ (الف)





**۳۲**  $n$  یک عدد طبیعی دورقمی است. دو عدد  $a$  و  $b$  به پیماندهای  $3n+1$  و  $n^2-n+3$  که نسبت به هم غیراول هستند، هم‌نهشت‌اند. این دو عدد به کدام پیمانده قطعاً هم‌نهشت هستند؟

۳۷ (۴)

۲۳ (۳)

۳۱ (۲)

۴۱ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲

ب.م.م دو عدد پیمانده را به دست آورید.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: ب.م.م دو عدد  $3n+1$  و  $n^2-n+3$  را برابر  $d$  فرض می‌کنیم، پس:

$$\begin{cases} d | n^2 - n + 3 \\ d | 3n + 1 \end{cases}$$

گام دوم: سعی می‌کنیم  $n$  را از روابط بالا حذف کنیم:

$$\begin{cases} d | n^2 - n + 3 \xrightarrow{\times 3} d | 3n^2 - 3n + 9 \xrightarrow{+} d | -4n + 9 \\ d | 3n + 1 \xrightarrow{\times(-n)} d | -3n^2 - n \end{cases}$$

دوباره رابطه به دست آمده را با  $d | 3n + 1$  می‌گیریم:

$$\begin{cases} d | 3n + 1 \xrightarrow{\times 4} d | 12n + 4 \xrightarrow{+} d | 31 \xrightarrow{d \neq 1} d = 31 \\ d | -4n + 9 \xrightarrow{\times 3} d | -12n + 27 \end{cases}$$

گام سوم: دو عدد  $a$  و  $b$  به پیماندهای  $3n+1$  و  $n^2-n+3$  هم‌نهشت هستند، پس به پیمانده ب.م.م آن‌ها نیز (طبق نکته) هم‌نهشت هستند.

اگر  $a \equiv b$  و  $a \equiv b$  آن‌گاه  $a \equiv b$  به پیمانده ب.م.م  $m$  و  $n$  نیز هم‌نهشت هستند.  $(a \equiv b)^{(m, n)}$



۳۳ اگر  $۹k + ۴ \equiv ۵ \pmod{۷}$  و  $۱۵k - ۸ \equiv ۷ \pmod{۷}$ ، باقی مانده  $k^۲ + ۱$  بر  $۳۵$  کدام است؟

- (۱) صفر
- (۲) ۱
- (۳) ۲
- (۴) ۳

**مشاوره** عاد کردن و قضیه تقسیم و هم‌نهستی ۳ موضوع کاملاً مرتبط با هم هستند. حواستان باشد که تبدیل مسئله عاد کردن و قضیه تقسیم به هم‌نهستی همواره باید در ذهنتان باشد.

**پاسخ: گزینه ۲**

دو رابطه را به زبان هم‌نهستی نوشته و  $k^۲ + ۱$  را بسازید.

**Hint**

ویژگی‌های هم‌نهستی:

**درسی Box**

ویژگی	توضیح
۱	دو طرف هم‌نهستی را می‌توانیم با عددی ثابت جمع (یا تفریق) کنیم.
۲	اگر عددی از یک طرف هم‌نهستی به طرف دیگر برود، علامت آن عوض می‌شود.
۳	دو طرف هم‌نهستی را می‌توانیم در عدد ثابت C ضرب کنیم.
۴	دو طرف هم‌نهستی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی دلخواه n برسانیم.
۵	اگر دو هم‌نهستی به پیمانه m داشته باشیم، می‌توانیم سمت راست‌ها را با هم جمع (ضرب) و سمت چپ‌ها را نیز با هم جمع (ضرب) کنیم.
۶	مضارب پیمانه را می‌توانیم به هر کدام از طرفین اضافه یا کم کنیم.
۷	به جای پیمانه می‌توانیم مقسوم‌علیه‌های آن را قرار دهیم.

اگر باقی‌مانده تقسیم X بر m، برابر r باشد، داریم:

$$x \equiv r \pmod{m} \leftrightarrow m \mid x - r \leftrightarrow x = mq + r \leftrightarrow x \in [r]_m$$

**قضیه ک.م.م پیمانه:** اگر a و b به پیمانه m و n هم‌نهشت باشند، به پیمانه  $[m, n]$  (یعنی ک.م.م پیمانه‌ها) نیز هم‌نهشت هستند.

**گام اول:**  $۹k + ۴ \equiv ۵ \pmod{۷}$  بر ۵ بخش‌پذیر است، پس به زبان هم‌نهستی  $۹k + ۴ \equiv ۵ \pmod{۷}$ .

شبه همین  $۱۵k - ۸ \equiv ۷ \pmod{۷}$ .

**گام دوم:**

$$۹k + ۴ \equiv ۵ \pmod{۷} \xrightarrow{۹ \equiv -۱} -k \equiv -۴ \pmod{۷} \rightarrow k \equiv ۴ \equiv -۱ \pmod{۷}$$

$$۱۵k - ۸ \equiv ۷ \pmod{۷} \xrightarrow[۸ \equiv ۱]{۱۵ \equiv ۱} k - ۱ \equiv ۷ \pmod{۷} \rightarrow k \equiv ۱ \pmod{۷}$$

**گام سوم:** دو طرف رابطه هم‌نهستی را یکسان کرده و از قضیه ک.م.م پیمانه‌ها استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} k^۲ \equiv (-۱)^۲ = ۱ \pmod{۷} \\ k^۲ \equiv ۱ \pmod{۷} \end{cases} \rightarrow k^۲ \equiv ۱ \pmod{۷} \xrightarrow{+۱} k^۲ + ۱ \equiv ۲ \pmod{۷}$$

**نکته**

**پاسخ خیلی تشریحی**



۳۴

در تقسيم عدد  $a$  بر عدد طبيعى  $b$ ، باقى مانده از مربع مقسوم عليه  $۴۳$  واحد كم تر است. کدام گزينه در مورد مقسوم عليه درست است؟

- (۱) عددى اول
- (۲) مضرب ۳
- (۳) دورقمى
- (۴) مربع كامل

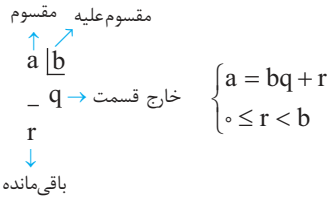
پاسخ: گزينه ۱

به شرط باقى مانده توجه كنيد.



پاسخ خيلى تشریحى ✓

گام اول: داريم:



گام دوم: باقى مانده به صورت  $b^2 - ۴۳$  است. شرط باقى مانده اين است كه  $b - ۴۳ < b^2 - ۴۳ \leq 0$ . با كمى دقت و جست و جو تنها عدد طبيعى كه در اين رابطه درست درمى آيد  $b = ۷$  است كه عددى اول است.



۲۵

چند عدد  $n$  از مجموعه  $\{1, 2, 3, \dots, 30\}$  وجود دارد که باقی مانده تقسیم  $n^2$  بر ۸ برابر ۴ باشد؟

۵ (۴)

۶ (۳)

۷ (۲)

۸ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

$n$  باید زوج باشد، از افراز اعداد زوج به  $4k$  و  $4k+2$  استفاده کنید.

Hint

گام اول: هر عدد صحیح به یکی از صورت‌های  $4k$  و  $4k+1$  و  $4k+2$  و  $4k+3$  است. سعی می‌کنیم شکل  $n$ های قابل قبول را پیدا کنیم.

پاسخ خیلی تشریحی

گام دوم: اگر این عدد فرد باشد (به صورت  $4k+1$  یا  $4k+3$ )، مربع آن به صورت  $8k+1$  است، پس مربع آن در تقسیم بر ۸ باقی‌مانده‌ای برابر ۱ دارد (نه ۴).

گام سوم: اگر  $n$  زوج باشد به صورت  $4k$  یا  $4k+2$  است. داریم:

$$n = 4k \Rightarrow n^2 = 16k^2 \equiv 0$$

$$n = 4k+2 \Rightarrow n^2 = 16k^2 + 16k + 4 \equiv 4$$

پس اعدادی قابل قبول هستند که به صورت  $4k+2$  باشند.

گام چهارم: تعداد اعداد به صورت  $4k+2$  در مجموعه داده شده برابر است با:

$$1 \leq 4k+2 \leq 30 \Rightarrow k = 0, 1, 2, \dots, 7$$

پس ۸ عدد وجود دارد.

مربع هر عدد فرد به صورت  $8k+1$  است.

نکته



۳۶

عدد  $26^{1405} + 216^{1403}$  به کدام کلاس هم‌نهشتی به پیمانه ۱۹ متعلق است؟

- (۱) [۰]      (۲) [۷]  
 (۳) [۱۳]      (۴) [۱۸]

**مشاوره** مهم‌ترین کاربرد هم‌نهشتی، پیدا کردن باقی‌مانده است. همواره باید آماده حل چنین سؤالی در کنکور و نهایی باشید.

**پاسخ: گزینه ۴**

به جای پایه‌ها هم‌نهشت آن‌ها را قرار دهید و دقت کنید که  $7^3 \equiv 1 \pmod{19}$ .



**پیدا کردن باقی‌مانده با استفاده از هم‌نهشتی:** مهم‌ترین کاربرد هم‌نهشتی پیدا کردن باقی‌مانده اعداد بزرگ در تقسیم بر  $m$  است. مراحل کار به صورت زیر است:

روش	مثال (باقی‌مانده تقسیم عدد $4 - 2 \times 3^{19}$ بر ۸)
(۱) یک هم‌نهشتی اولیه را می‌نویسیم. اگر این هم‌نهشتی جوری باشد که سمت راست ۱ یا -۱ باشد، بهتر است.	$3^2 \equiv 1$
(۲) با توان‌رسانی و ضرب و جمع، مقسوم را می‌سازیم.	$3^2 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان}^9} 3^{18} \equiv 1 \xrightarrow{\times 3} 3^{19} \equiv 3$ $\xrightarrow{\times 2} 2 \times 3^{19} \equiv 6 \xrightarrow{-4} 2 \times 3^{19} - 4 \equiv 2$
(۳) اگر سمت راست منفی باشد یا بزرگ‌تر از پیمانه باشد، آن‌قدر از پیمانه به آن اضافه یا کم می‌کنیم تا در محدوده باقی‌مانده ( $0 \leq r < m$ ) قرار گیرد.	

گام اول: ابتدا بهتر است پایه‌ها را کوچک کنیم:

$216 \equiv 7 \pmod{19}$  ,  $26 \equiv 7 \pmod{19}$

پس کافی است باقی‌مانده تقسیم  $7^{1403} + 7^{1405}$  را بر ۱۹ به دست آوریم.

گام دوم: باید یک هم‌نهشتی اولیه بنویسیم:

$7^3 \equiv 1 \pmod{19} \xrightarrow{\times 7} 7^3 \equiv 7 \pmod{19}$

گام سوم: باقی‌مانده  $7^{1403}$  بر ۳، برابر ۲ است؛ پس  $7^{1403} = 3k + 2$  شبیه همین،  $7^{1405} = 3k' + 1$ ، پس:

$7^3 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان}^k} 7^{3k} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7^2} 7^{3k+2} \equiv 49 \equiv 11$

$7^3 \equiv 1 \xrightarrow{\text{توان}^{k'}} 7^{3k'} \equiv 1 \xrightarrow{\times 7} 7^{3k'+1} \equiv 7$

گام چهارم: با جمع طرفین دو رابطه، باقی‌مانده عدد داده‌شده بر ۱۹، برابر ۱۸ به دست می‌آید، پس  $7^{1403} + 7^{1405} \in [18]_{19}$ .

**پاسخ خیلی تشریحی**

اگر  $m$  بزرگ‌ترین عدد طبیعی باشد که  $36 \equiv (10 - m)!$ ، آن‌گاه باقی‌مانده تقسیم  $m^{123}$  بر ۱۵، کدام است؟

(سؤال ۱۳۵ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

- (۱) ۱      (۲) ۲      (۳) ۴      (۴) ۶





چند عدد ۳ رقمی به صورت  $\overline{aba}$  و مضرب ۶ وجود دارد؟ **۲۷**

- |        |        |
|--------|--------|
| ۸ (۲)  | ۷ (۱)  |
| ۱۳ (۴) | ۱۲ (۳) |

**مشاوره** کتاب درسی در قسمت قاعده بخش پذیری بر اعداد خاص، تمرین‌های خاصی ندارد، پس برای کنکور حتماً روی منابع مکمل، کار کنید.

**پاسخ: گزینه ۴**

$a$  باید زوج باشد. حالا قاعده بخش پذیری بر ۳ را بنویسید.

**گام اول:** عدد داده شده بر ۶ بخش پذیر است، پس بر ۲ و ۳ بخش پذیر است.

**گام دوم:** عدد داده شده زوج است، پس  $a$  زوج است. طبق قاعده بخش پذیری بر ۳ داریم:

$$\overline{aba} \equiv 0 \rightarrow a + b + a \equiv 0 \rightarrow 2a + b \equiv 0$$

**گام سوم:** اگر  $a \equiv 0$  عدد دورقمی می‌شود، پس قابل قبول نیست اما چون  $a$  زوج است؛ داریم:

$$a = 2 \rightarrow 4 + b \equiv 0 \rightarrow b \equiv -4 \equiv 2 \xrightarrow{0 \leq b \leq 9} b = 2, 5, 8$$

$$a = 4 \rightarrow 8 + b \equiv 0 \rightarrow b \equiv -8 \equiv 1 \xrightarrow{0 \leq b \leq 9} b = 1, 4, 7$$

$$a = 6 \rightarrow 12 + b \equiv 0 \rightarrow b \equiv 0 \xrightarrow{0 \leq b \leq 9} b = 0, 3, 6, 9$$

$$a = 8 \rightarrow 16 + b \equiv 0 \rightarrow b \equiv -16 \equiv 2 \xrightarrow{0 \leq b \leq 9} b = 2, 5, 8$$

**گام چهارم:** در حالت اول اعداد ۲۲۲ و ۲۵۲ و ۲۸۲ به دست می‌آید و ... (شبهه همین برای سایر حالت‌ها)، پس در کل ۱۳ عدد وجود دارد.

میانگین بزرگ‌ترین و کوچک‌ترین عدد سه‌رقمی به صورت  $\overline{aba}$  که مضرب عدد ۱۲ باشند، کدام است؟

(سؤال ۱۳۳۳ کنکور ریاضی ۱۴۰۰)

- |         |         |
|---------|---------|
| ۵۴۰ (۲) | ۳۴۸ (۱) |
| ۵۷۴ (۴) | ۵۷۰ (۳) |





رقم یکان عدد  $a$  برابر ۴ است. رقم یکان جواب معادله  $(a+3)x \equiv 1 \pmod{10}$  کدام است؟

۲۸

۷ (۴)

۵ (۳)

۳ (۲)

۱ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

$$\begin{aligned} & \pmod{10} \\ a & \equiv 4 \end{aligned}$$

Hint

درسی Box

ویژگی تقسیم دو طرف هم‌نهستی و رقم یکان:

توضیح	ریاضی	ویژگی تقسیم
اگر عدد $c$ که قرار است از دو طرف ساده شود با پیمانه، عامل مشترک نداشته باشد، آن را ساده می‌کنیم.	$ca \equiv cb, (c, m) = 1 \rightarrow a \equiv b \pmod{m}$	۱
اگر عدد $c$ با پیمانه، ب‌م $d$ داشته باشد، $c$ را از دو طرف ساده می‌کنیم، ولی پیمانه به $d$ تقسیم می‌شود.	$ca \equiv cb, (c, m) = d \rightarrow a \equiv b \pmod{\frac{m}{d}}$	۲

رقم یکان: رقم یکان هر عدد، همان باقی‌مانده تقسیم آن عدد بر  $10$  است، پس برای یافتن رقم یکان یک عدد کافی است ببینیم با چه عددی به پیمانه  $10$  هم‌نهشت است.

گام اول: رقم یکان عدد  $a$  همان باقی‌مانده تقسیم  $a$  بر  $10$  است، پس  $a \equiv 4 \pmod{10}$ .

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$7x \equiv 1 \pmod{10}$$

گام دوم:  $a \equiv 4 \pmod{10}$ ، پس  $a+3 \equiv 7 \pmod{10}$ . با قراردادن آن در معادله داده‌شده داریم:

گام سوم: معادله هم‌نهستی را حل می‌کنیم. اگر  $2 \times 10$  به سمت راست اضافه کنیم دو طرف به  $7$  ساده می‌شوند:

$$7x \equiv 1 + 2 \times 10 \pmod{10} = 21 \xrightarrow[\text{با } (7, 10)=1]{\div 7} x \equiv 3 \pmod{10}$$

گام چهارم: باقی‌مانده  $x$  بر  $10$  برابر  $3$  است، پس رقم یکان  $x$  (جواب معادله) برابر  $3$  است.



۳۹

۳۱ خرداد در یک سال یکی از روزهای شنبه یا سه‌شنبه یا پنج‌شنبه است. ۳۰ آبان همان سال کدام روز هفته

نمی‌تواند باشد؟

(۱) دوشنبه

(۳) جمعه

(۲) چهارشنبه

(۴) یکشنبه

### پاسخ: گزینه ۴

ببینید از ۳۱ خرداد چند روز باید جلو برویم تا به ۳۰ آبان برسیم.

#### تقویم‌نگاری

فرض کنید تاریخی از سال در یک روز مشخص هفته باشد، می‌خواهیم بدانیم تاریخ دیگر چند شنبه است.

(۱) اختلاف روزهای دو تاریخ را به دست می‌آوریم.

(۲) باقی‌مانده عدد بالا را در تقسیم بر ۷ محاسبه می‌کنیم.

(۳) اگر تاریخ جلوتر را بخواهیم به اندازه باقی‌مانده از آن روز هفته، جلو می‌رویم و اگر تاریخ عقب‌تر را بخواهیم به اندازه باقی‌مانده عقب می‌رویم.

گام اول: خرداد تمام شده است، پس ۳۱×۳ روز در تابستان و ۳۰×۲ روز تا انتهای آبان اگر جلو برویم به ۳۰ آبان می‌رسیم.

گام دوم: باقی‌مانده این عدد را به ۷ به دست می‌آوریم:

$$3 \times 31 + 2 \times 30 \equiv 3(3) + 2(2) \equiv 13 \equiv 6$$

گام سوم: اگر از شنبه، ۶ روز جلو برویم به جمعه، اگر از سه‌شنبه ۶ روز جلو برویم به دوشنبه و اگر از پنج‌شنبه ۶ روز جلو برویم

به چهارشنبه می‌رسیم، پس ۳۰ آبان دوشنبه، جمعه و چهارشنبه می‌تواند باشد؛ ولی یکشنبه نمی‌تواند باشد.

حواست باشه: اگر در روز nام ماه باشیم، برای این که ببینیم تا انتهای ماه چند روز باید جلو برویم، کافی است تعداد روزهای ماه

را منهای n کنیم. مثلاً اگر در روز ۱۷ام ماه تیر باشیم، باید ۳۱-۱۷ روز جلو برویم تا ماه تیر تمام بشود.

Hint

کارتی Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۴. معادله سیاله  $11x + 7y = 389$ ، چند جواب در مجموعه اعداد صحیح نامنفی دارد؟

- (۱) ۳  
(۲) ۴  
(۳) ۵

**مشاوره** طراحان کنکور علاقه زیادی به معادله سیاله دارند. مشابه این سؤال بارها و بارها در کنکور آمده است.

**پاسخ: گزینه ۲**

دو طرف را به پیمانه ۷ ببرید.

**Hint**

**درس Box**

معادله هم‌نهشتی و روش حل آن

**تعریف:** به معادله  $ax \equiv b \pmod{m}$  معادله هم‌نهشتی می‌گوییم.  $a$  و  $b$  ضرایب عددی و  $x$  مقدار مجهول است. برای حل معادله هم‌نهشتی  $ax \equiv b \pmod{m}$  مراحل زیر را طی می‌کنیم:

- اگر  $a$  و  $b$  اعداد بزرگی هستند، به جایشان یک عدد هم‌نهشت با آن‌ها به پیمانه  $m$  را قرار می‌دهیم.
  - با اضافه کردن مضارب پیمانه به  $b$ ، کاری می‌کنیم تا دو طرف بر  $a$  بخش پذیر باشند.
  - با استفاده از ویژگی تقسیم، دو طرف را به  $a$  ساده می‌کنیم تا  $x$  به دست آید.
- شرط جواب داشتن معادله هم‌نهشتی:  $ax \equiv b \pmod{m}$  این است که  $b \mid (a, m)$ .

حل معادله سیاله خطی

**تعریف:** به معادله  $ax + by = c$  که همه ضرایب و مجهولات عدد صحیح هستند، معادله سیاله خطی می‌گوییم.

**شرط جواب:** شرط این که معادله  $ax + by = c$  جواب داشته باشد، این است که  $(a, b) \mid c$  (و برعکس).

**روش حل معادله سیاله:** معادله سیاله را به معادله هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم. برای این کار دو طرف معادله را به پیمانه  $a$  می‌بریم.  $ax$  که مضرب  $a$  است، هم‌نهشت صفر می‌شود، پس داریم:

$$ax + by \equiv c \pmod{a} \Rightarrow by \equiv c \pmod{a}$$

دقت کنید که می‌توانستیم به پیمانه  $b$  ببریم که در این صورت معادله به صورت  $ax \equiv c \pmod{b}$  درمی‌آید.

- این که به کدام یک از پیمانه‌های  $b$  یا  $a$  ببریم فرقی نمی‌کند، اما معمولاً به پیمانه‌ای که کوچکتر (از نظر قدر مطلق) است، ببریم بهتر است.
- بعد از این که معادله هم‌نهشتی را حل و آن متغیر را پیدا کردید، باید آن را در معادله سیاله قرار دهید تا مجهول دیگر هم به دست آید.

**نکته**

**پاسخ خیلی تشریحی**

گام اول: دو طرف را به پیمانه ۷ می‌بریم تا جمله  $7y$  حذف شود:

$$11x + 7y \equiv 389 \pmod{7} \Rightarrow 11x \equiv 389 \pmod{7} \xrightarrow[389 \equiv 4]{11 \equiv 4} 4x \equiv 4 \pmod{7}$$

$$\xrightarrow[(-4, 7) = 1]{+4} x \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow x = 7k + 1$$

گام دوم:  $x$  را در معادله اول جای گذاری می‌کنیم تا  $y$  هم به دست آید:

$$11(7k + 1) + 7y = 389 \Rightarrow 77k + 11 + 7y = 389$$

$$\Rightarrow y = \frac{-77k + 378}{7} = -11k + 54$$

گام سوم: جواب‌های نامنفی را می‌خواهیم، پس  $x \geq 0$  و  $y \geq 0$ .

$$\begin{cases} 7k + 1 \geq 0 \\ -11k + 54 \geq 0 \end{cases} \rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4$$

پس معادله، ۵ جواب دارد.

خواست باشد: در گام سوم به جای حل دو نامعادله بهتر است به  $k$  عدد صحیح بدهیم. از معادله اول  $k$  منفی نمی‌تواند باشد و در معادله دوم هم حداکثر  $k$  برابر ۴ می‌تواند باشد.

معادله سیاله  $17x + 18y = 987$  در مجموعه اعداد طبیعی، چند دسته جواب دارد؟ (سؤال ۳۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۱ - نوبت اول)

- (۱) ۶ (۲) ۵ (۳) ۴ (۴) ۳

کنکور



متحرکی با شتاب ثابت  $\vec{a} = (-3 \text{ m/s}^2)\vec{i}$  در راستای محور  $x$  در حال حرکت است. اگر سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول برابر  $(2/5 \text{ m/s})\vec{i}$  باشد، سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه سوم برابر چند متر بر ثانیه است؟

$$\begin{aligned} (1) \quad & 27/5 \vec{i} \\ (2) \quad & 17/5 \vec{i} \\ (3) \quad & -17/5 \vec{i} \\ (4) \quad & -27/5 \vec{i} \end{aligned}$$

پاسخ: گزینه ۴

شتاب متوسط ( $\vec{a}_{av}$ )

درس Box

در هر بازه زمانی دلخواه، نسبت تغییر سرعت به بازه زمانی را شتاب متوسط می‌گوییم:

$$\vec{a}_{av} = \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{\vec{v}_2 - \vec{v}_1}{t_2 - t_1}$$

$\vec{a}_{av}$ : شتاب متوسط ( $\text{m/s}^2$ )

$\vec{v}_1$ : سرعت متحرک در لحظه  $t_1$  ( $\text{m/s}$ )

$\vec{v}_2$ : سرعت متحرک در لحظه  $t_2$  ( $\text{m/s}$ )

شتاب متوسط، کمیتی برداری و هم‌جهت با بردار تغییر سرعت ( $\Delta \vec{v}$ ) است، زیرا  $\Delta t$  همواره مثبت است.

در حرکت روی خط راست برای سادگی، رابطه شتاب متوسط را می‌توان به صورت زیر به کار برد:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1}$$

در حرکت با شتاب ثابت روی خط راست، سرعت متوسط متحرک در بازه زمانی  $t_2 - t_1 = \Delta t$  برابر است با سرعت آن در وسط

$$t' = \frac{t_1 + t_2}{2}$$

همین بازه زمانی، یعنی سرعت در لحظه

در حرکت با شتاب ثابت، شتاب لحظه‌ای و شتاب متوسط برابر هستند:

$$a = a_{av}$$

گام اول: لحظه وسط در ۵ ثانیه اول حرکت را با  $t_1$  نشان می‌دهیم:

$$t_1 = \frac{0 + 5}{2} = 2/5 \text{ s}$$

لحظه وسط در ۵ ثانیه سوم حرکت را با  $t_2$  نشان می‌دهیم:

$$t_2 = \frac{10 + 15}{2} = 12/5 \text{ s}$$

گام دوم: سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه اول حرکت، با سرعت متحرک در لحظه  $t_1 = 2/5 \text{ s}$  برابر است. یعنی:

$$v_1 = 2/5 \text{ m/s}$$

سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه سوم حرکت که آن را با  $v_2$  نمایش می‌دهیم، با سرعت متحرک در لحظه  $t_2 = 12/5 \text{ s}$  برابر است.

گام سوم: سرعت متحرک در لحظه  $t_2$  را به دست می‌آوریم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_2 - v_1}{t_2 - t_1} \Rightarrow -3 = \frac{v_2 - 2/5}{12/5 - 2/5} \Rightarrow -30 = v_2 - 2/5 \Rightarrow v_2 = -27/5 \text{ m/s}$$

بنابراین سرعت متوسط متحرک در ۵ ثانیه سوم حرکت نیز  $-27/5 \text{ m/s}$  است که بر حسب بردار یکه به صورت  $(-27/5 \text{ m/s})\vec{i}$  نوشته می‌شود.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



متحرکی با شتاب ثابت در راستای محور  $x$  حرکت می‌کند. در بازه‌ای که سرعت متحرک از  $\vec{v}_1 = (-5 \text{ m/s})\vec{i}$  به

$\vec{v}_2 = (15 \text{ m/s})\vec{i}$  می‌رسد، تندی متوسط متحرک چند متر بر ثانیه است؟

۱۲/۵ (۴)

۶/۲۵ (۳)

۱۰ (۲)

۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

نمودار سرعت - زمان در حرکت با شتاب ثابت

درس Box

(۱) با توجه به این که معادله سرعت در این نوع حرکت، از درجه اول می‌باشد، نمودار آن به صورت یک خط شیبدار است و شیب آن، شتاب متحرک را نشان می‌دهد.

(۲) نقطه شروع این نمودار روی محور  $v$ ، سرعت اولیه ( $v_0$ ) را نشان می‌دهد.

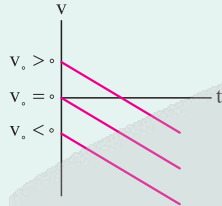
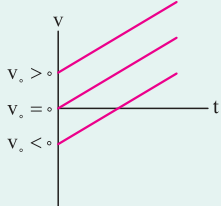
(۳) مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، در هر بازه زمانی، برابر با جابه‌جایی متحرک در آن بازه است. (مساحت بخشی از سطح را که زیر محور زمان است، منفی در نظر می‌گیریم؛ زیرا سرعت و جابه‌جایی در این بخش، منفی هستند).

(۴) قدرمطلق مساحت سطح بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، مسافت پیموده‌شده در بازه زمانی مورد نظر را نشان می‌دهد.

(۵) اگر مکان اولیه معلوم باشد، می‌توان نمودار مکان - زمان را براساس نمودار سرعت - زمان رسم نمود:

(شیب خط مثبت)

(شیب خط منفی)



تندی متوسط و سرعت متوسط

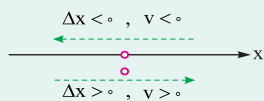
تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است اما سرعت متوسط کمیتی برداری محسوب می‌شود که با بردار جابه‌جایی هم‌جهت است. تعریف این دو کمیت، به صورت زیر است:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

$s_{av}$ : تندی متوسط (m/s)

$l$ : مسافت (m)

$\Delta x$ : مدت زمان (s)



$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

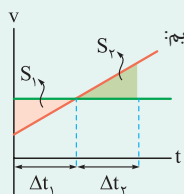
$x_1$ : مکان متحرک در لحظه  $t_1$  (m)

$x_2$ : مکان متحرک در لحظه  $t_2$  (m)

$\Delta t$ : اندازه جابه‌جایی (m)

● علامت‌های جبری  $\Delta x$  و  $v_{av}$  جهت جابه‌جایی و سرعت متوسط را نشان می‌دهند. اگر علامت آن‌ها مثبت باشد، یعنی متحرک در جهت محور  $x$  حرکت می‌کند و اگر منفی باشد، یعنی متحرک در خلاف جهت محور  $x$  حرکت می‌کند.

● اگر نسبت تشابه دو مثلث برابر  $k$  باشد، نسبت مساحت این دو مثلث  $k^2$  است. مثلاً در شکل مقابل داریم:



$$\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} = k \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = k^2$$

● وقتی در یک بازه زمانی، علامت سرعت عوض می‌شود یعنی متحرک تغییر جهت داده و مسافت با جابه‌جایی برابر نیست. در

نتیجه، تندی متوسط نیز با سرعت متوسط برابر نیست.



## فيزيك

● رابطه سرعت متوسط متحرك در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

$v_1$ : سرعت متحرك در لحظه  $t_1$  (m/s)

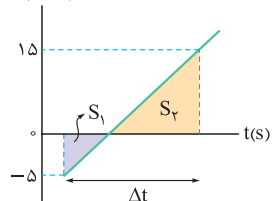
$v_2$ : سرعت متحرك در لحظه  $t_2$  (m/s)

گام اول: ابتدا سرعت متوسط متحرك را به دست مي آوريم و نمودار سرعت - زمان آن را رسم مي كنيم:

$$v_{av} = \frac{v_1 + v_2}{2} = \frac{-5 + 15}{2} = 5 \text{ m/s}$$

نسبت مساحت هاي دو مثلث  $S_1$  و  $S_2$  را حساب مي كنيم:

$v$  (m/s)



$$\frac{S_2}{S_1} = k^2 \xrightarrow{k = \frac{15}{-5} = 3} \frac{S_2}{S_1} = 3^2 = 9$$

گام دوم: به كمك مساحت سطح بين نمودار سرعت - زمان و محور زمان، جابه جايي متحرك را برحسب  $S_1$  و  $S_2$  مي نويسيم و

در رابطه  $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t}$  به كار مي بريم:

$$v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{-S_1 + S_2}{\Delta t} \xrightarrow{\frac{S_2 = 9S_1}{v_{av} = 5 \text{ m/s}}} 5 = \frac{8S_1}{\Delta t} \Rightarrow \frac{S_1}{\Delta t} = \frac{5}{8}$$

گام سوم: تندی متوسط را حساب مي كنيم:

$$s_{av} = \frac{1}{\Delta t} = \frac{S_1 + 9S_1}{\Delta t} = \frac{10S_1}{\Delta t} = 10 \times \frac{5}{8} = \frac{50}{8} = 6.25 \text{ m/s}$$

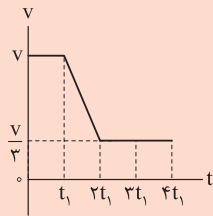
حواستون باشه كه در متن سؤال، تندی متوسط را خواسته، نه سرعت متوسط را؛ بنابراین مراقب باشيد كه در دام گزينه (1) نيفتيد.

پاسخ خيلى تشريحي ✓

گول نخوري ✗



نمودار سرعت - زمان متحرکی که در راستای محور X حرکت می کند، به شکل زیر است. تندی متوسط متحرک در



کدام بازه زمانی کم تر است؟

- (۱)  $t = 0$  تا  $t_1$
- (۲)  $t = 0$  تا  $2t_1$
- (۳)  $t = 0$  تا  $3t_1$
- (۴)  $t = 0$  تا  $4t_1$

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: می دانیم مساحت بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، جابه جایی متحرک را نشان می دهد. از طرفی چون سرعت متحرک تغییر علامت نداده است، سرعت متوسط و تندی متوسط در همه بازه های زمانی یکسان هستند. بر این اساس تندی متوسط متحرک را در بازه های زمانی خواسته شده به دست می آوریم و با هم مقایسه می کنیم:

$$s_{av} = \frac{l}{\Delta t}$$

(۱) بازه زمانی  $0$  تا  $t_1$ :

$$s_{av_1} = \frac{l_1}{\Delta t_1} = \frac{vt_1}{t_1 - 0} = v$$

(۲) بازه زمانی  $0$  تا  $2t_1$ :

$$s_{av_2} = \frac{l_2}{\Delta t_2} = \frac{vt_1 + \frac{(v + \frac{v}{3})(2t_1 - t_1)}{2}}{2t_1 - 0} = \frac{(v + \frac{2}{3}v)t_1}{2t_1} = \frac{\frac{5}{3}vt_1}{2t_1} = \frac{5}{6}v$$

(۳) بازه زمانی  $0$  تا  $3t_1$ :

$$s_{av_3} = \frac{l_3}{\Delta t_3} = \frac{\frac{5}{3}vt_1 + \frac{v}{3}(3t_1 - 2t_1)}{3t_1 - 0} = \frac{\frac{6}{3}vt_1}{3t_1} = \frac{2}{3}v$$

(۴) بازه زمانی  $0$  تا  $4t_1$ :

$$s_{av_4} = \frac{l_4}{\Delta t_4} = \frac{2vt_1 + \frac{v}{3}(4t_1 - 3t_1)}{4t_1 - 0} = \frac{\frac{7}{3}vt_1}{4t_1} = \frac{7}{12}v$$

گام دوم: با مقایسه تندی های متوسط به دست آمده داریم:

$$s_{av_4} < s_{av_3} < s_{av_2} < s_{av_1}$$

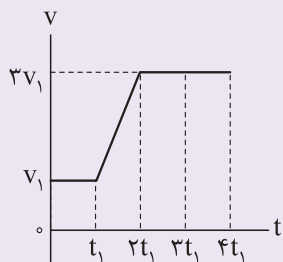
بنابراین، در بازه زمانی  $t = 0$  تا  $4t_1$ ، تندی متوسط متحرک کم ترین مقدار را دارد.

با گذشت زمان، تندی متحرک کاهش یافته و سپس ثابت مانده است؛ بنابراین از لحظه شروع ( $t = 0$ )، کم ترین تندی متوسط مربوط به کل بازه زمانی حرکت است.

تیوبازی ۳۵

نمودار سرعت - زمان متحرکی که روی مسیری مستقیم حرکت می کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط در

(سؤال ۴۵ - کنکور ریاضی ۱۴۰۴ (فاج از کشور))



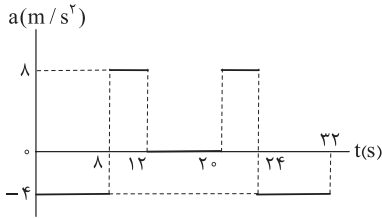
کدام بازه زمانی بیشتر است؟

- (۱)  $t = 0$  تا  $t_1$
- (۲)  $t = 0$  تا  $2t_1$
- (۳)  $t = 0$  تا  $3t_1$
- (۴)  $t = 0$  تا  $4t_1$





نمودار شتاب - زمان متحرکی که در راستای محور  $x$  حرکت می کند، به شکل زیر است. اگر سرعت متحرک در مبدأ زمان برابر  $\vec{v}_0 = (16 \text{ m/s})\vec{i}$  باشد، در بازه زمانی  $t_1 = 0$  تا  $t_2 = 32 \text{ s}$  کدام یک از موارد زیر درباره این متحرک درست است؟



- (۱) متحرک ۸ s در خلاف جهت محور  $x$  حرکت کرده است.
- (۲) متحرک ۳ مرتبه تغییر جهت داده است.
- (۳) حرکت متحرک ۱۲ s به صورت تندشونده است.
- (۴) اندازه جابه جایی متحرک ۵۱۲ m است.

پاسخ: گزینه ۴

نمودار شتاب - زمان در حرکت با شتاب ثابت

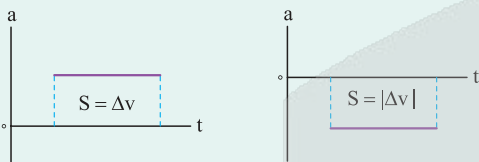
(۱) این نمودار به صورت یک خط افقی موازی محور زمان است.

(۲) مساحت سطح محدود بین این نمودار و محور زمان، در هر بازه زمانی برابر با تغییر سرعت  $(\Delta v)$  در آن بازه است  $(S = \Delta v)$ ، به نحوی که مساحت سطحی را که بالای محور زمان است، مثبت و مساحت سطحی را که زیر محور زمان است منفی در نظر می گیریم.

(۳) اگر نمودار شتاب - زمان، شامل دو یا چند مرحله مختلف باشد که هر کدام شتاب ثابت خود را دارند، می توان نوشت:

$$\Delta v_{\text{کل}} = \Delta v_1 + \Delta v_2 + \dots$$

(۴) اگر سرعت اولیه معلوم باشد، می توان نمودار سرعت - زمان را براساس نمودار شتاب - زمان رسم نمود.

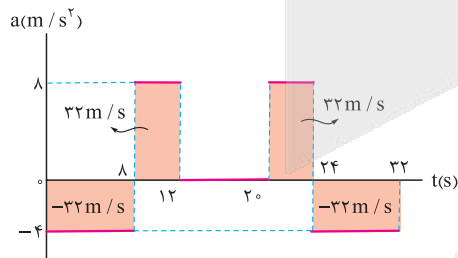


• اگر متحرک در جهت محور  $x$  حرکت کند،  $v > 0$  و اگر خلاف جهت محور  $x$  حرکت کند،  $v < 0$  است. هم چنین در لحظه ای که متحرک روی محور  $x$  تغییر جهت می دهد  $v = 0$  است.

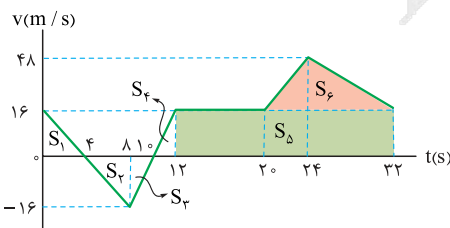
• اگر نمودار  $v-t$  از محور  $t$  دور شود یعنی حرکت تندشونده است. در این صورت سرعت  $(v)$  و شتاب  $(a)$  هم علامت هستند.  $av > 0$

اما اگر نمودار  $v-t$  به محور  $t$  نزدیک شود یعنی حرکت کندشونده است. در این صورت سرعت  $(v)$  و شتاب  $(a)$  غیرهم علامت هستند.  $av < 0$

گام اول: به کمک مساحت محدود بین نمودار شتاب - زمان و محور زمان، تغییر سرعت در هر مرحله را به دست می آوریم:



گام دوم: با معلوم بودن سرعت اولیه  $(v_0)$ ، نمودار سرعت - زمان متحرک را در مدت ۳۲ s رسم می کنیم. مثلث های  $S_1$  و  $S_4$  با یکدیگر هم نهشت هستند. مثلث های  $S_3$  و  $S_6$  نیز با یکدیگر هم نهشت هستند.



درس Box

پاسخ خیلی تشریحی ✓

پایه دوازدهم ریاضی  
هفتم آذرماه ۱۴۰۴  
مرحله هشتم



گام سوم: اکنون به بررسی گزینه‌ها می‌پردازیم:

گزینه (۱): در بازه زمانی ۴ s تا ۱۰ s سرعت متحرک منفی است، یعنی مدت ۶ s در خلاف جهت محور X حرکت کرده و گزینه (۱) نادرست است.

گزینه (۲): سرعت متحرک، دوبار (در لحظه‌های ۴ s و ۱۰ s) تغییر علامت و تغییر جهت داده است؛ بنابراین گزینه (۲) نیز نادرست است.

گزینه (۳): بازه‌هایی که حرکت متحرک تندشونده است. عبارت‌اند از: ۴ s تا ۸ s، ۱۰ s تا ۱۲ s و ۲۰ s تا ۲۴ s که مجموعاً ۱۰ s می‌شود؛ بنابراین گزینه (۳) نیز نادرست است.

گزینه (۴): به کمک مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، جابه‌جایی متحرک را به دست می‌آوریم:

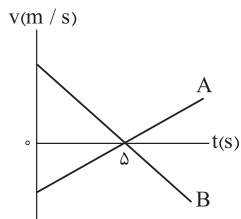
$$\Delta x = \overbrace{S_1 + S_2 + S_3 + S_4} + S_5 + S_6 = (20 \times 16) + \frac{12 \times 22}{2} = 320 + 192 = 512 \text{ m}$$



۴۵

نمودار سرعت - زمان دو متحرک A و B که در راستای محور x حرکت می کنند، به شکل زیر و فاصله آن‌ها در مبدأ زمان برابر ۷۵ m است. اگر در لحظه‌ای که جهت حرکت دو متحرک تغییر می کند، دو متحرک در یک مکان باشند،

فاصله دو متحرک در لحظه  $t = ۸$  s برابر چند متر است؟



۲۷ (۱)

۳۰ (۲)

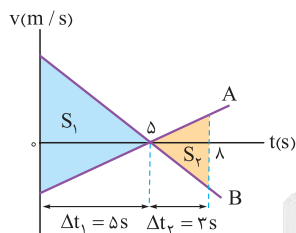
۴۵ (۳)

۱۲۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

**گام اول:** با توجه به نمودار داده شده، در لحظه  $t = ۵$  s که علامت سرعت هر دو متحرک تغییر می کند، جهت حرکت آن دو نیز عوض می شود. در همین لحظه، مکان دو متحرک نیز یکسان شده است؛ بنابراین دو متحرک از لحظه  $t = ۰$  تا  $t = ۵$  s به طرف یکدیگر حرکت می کنند و به هم می رسند، سپس از لحظه  $t = ۵$  s تا  $t = ۸$  s در خلاف جهت یکدیگر از هم دور می شوند. **گام دوم:** اندازه مساحت سطح محدود بین نمودار سرعت - زمان و محور زمان، مسافت طی شده توسط متحرک را نشان می دهد. با توجه به تشابه دو مثلث  $S_۱$  و  $S_۲$  داریم:



$$\frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{\Delta t_2}{\Delta t_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{S_2}{S_1} = \left(\frac{3}{5}\right)^2 \Rightarrow S_2 = \frac{75 \times 9}{25} = 27 \text{ m}$$



در شرایط خلأ، گلوله‌ای از ارتفاع  $H$  رها می‌شود. اگر تندی گلوله  $۰/۸$  s قبل از برخورد به زمین برابر  $۴۰$  m/s باشد،  $H$  برابر چند متر است؟ ( $g = ۱۰$  m/s<sup>۲</sup>)

۱۲۵/۲ (۴)

۱۱۵/۲ (۳)

۹۳/۲ (۲)

۸۳/۲ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

دستی Box

وقتی جسمی بدون سرعت اولیه از ارتفاعی رها شده و سقوط آزاد انجام می‌دهد، بعد از گذشت زمان  $t$ ، تندی آن ( $v$ ) و مسافت طی شده توسط آن یا ارتفاع سقوط ( $H$ ) از روابط زیر به دست می‌آیند:

$v = gt$

$H = \frac{1}{2}gt^2$

$v$ : تندی (m/s)

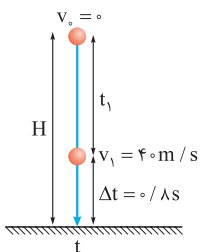
$g$ : شتاب گرانش در نزدیکی سطح زمین  $= ۱۰$  m/s<sup>۲</sup>

$t$ : زمان سقوط (s)

$H$ : مسافت طی شده یا ارتفاع سقوط (m)

گام اول: زمانی را که طول می‌کشد تا تندی گلوله به  $۴۰$  m/s برسد ( $t_1$ )، به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$v_1 = gt_1 \Rightarrow 40 = 10 \cdot t_1 \Rightarrow t_1 = 4$  s

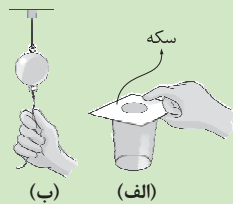
گام دوم: کل زمان سقوط ( $t$ ) و از آنجا ارتفاع سقوط را حساب می‌کنیم:

$t = t_1 + \Delta t = 4 + 0.8 = 4.8$  s

$H = \frac{1}{2}gt^2 = \frac{1}{2} \times 10 \times (4.8)^2 = 115.2$  m



در شکل (الف)، مقوای روی لیوان و در شکل (ب)، نخ متصل به پایین گوی سنگین را به صورت ناگهانی می کشیم. به ترتیب در هر شکل کدام اتفاق رخ می دهد؟



- ۱) سکه روی مقوا همراه با مقوا حرکت می کند. - نخ متصل به بالای گوی، پاره می شود.
- ۲) سکه روی مقوا همراه با مقوا حرکت می کند. - نخ متصل به پایین گوی پاره می شود.
- ۳) سکه در لیوان زیر مقوا می افتد. - نخ متصل به بالای گوی، پاره می شود.
- ۴) سکه در لیوان زیر مقوا می افتد. - نخ متصل به پایین گوی، پاره می شود.

پاسخ: گزینه ۴

قانون اول نیوتون:



یک جسم، حالت سکون یا حرکت با سرعت ثابت خود را حفظ می کند، مگر آن که نیروی خالص غیر صفری به آن وارد شود. یعنی وقتی نیروهای وارد بر جسمی متوازن باشند، اگر جسم ساکن باشد، همچنان ساکن می ماند و اگر در حال حرکت باشد، سرعتش تغییر نمی کند.

لختی:

با توجه به قانون اول نیوتون، وقتی نیروی خالص وارد بر اجسام صفر است، تمایل دارند که وضعیت حرکت خود را حفظ کنند. به این تمایل اجسام به حفظ حالت قبلی خود، لختی گفته می شود. هر چه تغییر سرعت، ناگهانی تر باشد، لختی قابل ملاحظه تر است.

**گام اول:** با توجه به قانون اول نیوتون و با فرض کم بودن اصطکاک بین سکه و مقوا، سکه می خواهد در جای خود بماند، پس وقتی زیر آن خالی می شود، درون لیوان می افتد. (رد گزینه های (۱) و (۲))

**گام دوم:** اگر نیروی ناگهانی وارد شده بر نخ پایینی بیشتر از تحمل نخ باشد، لختی گلوله و مقاومت آن در مقابل حرکت، سبب می شود که نخ پایینی پاره شود. (رد گزینه (۳))

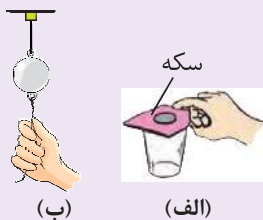
پاسخ خیلی تشریحی ✓

نخ بالایی در صورتی پاره می شود که به آرامی نیروی وارد بر گوی سنگین را توسط نخ پایینی افزایش دهیم.



الف) در شکل (الف) مقوا را به سرعت می کشیم، برای سکه چه اتفاقی می افتد؟ چرا؟

ب) در شکل (ب)، اگر به آرامی نیروی وارد بر گوی سنگین را زیاد کنیم کدام نخ پاره می شود؟ اگر ناگهان نخ را بکشیم، کدام نخ پاره می شود؟ علت را توضیح دهید. (فیزیک (۳) - پرسش ۲ - ۳ صفحه ۳۲ کتاب درسی رشته ریاضی)





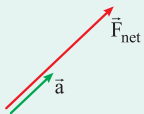
- شخصی روی یک ترازوی فنری در آسانسور ایستاده و آسانسور در حال حرکت است. در کدام یک از حالت‌های زیر، مقداری که ترازو نشان می‌دهد، الزاماً کم‌تر از وزن جسم است؟
- (۱) حرکت آسانسور تندشونده باشد.  
 (۲) حرکت آسانسور کندشونده باشد.  
 (۳) سرعت آسانسور به سمت پایین باشد.  
 (۴) شتاب آسانسور به سمت پایین باشد.

## پاسخ: گزینه ۴

قانون دوم نیوتون

کرتی Box

هرگاه نیروهای وارد بر جسمی متوازن نباشند، یعنی بر جسم نیروی خالصی وارد شود، جسم تحت تأثیر آن نیرو، شتاب می‌گیرد که این شتاب با نیروی خالص وارد بر جسم نسبت مستقیم دارد و در همان جهت نیروی خالص است، اما با جرم جسم نسبت وارون دارد.



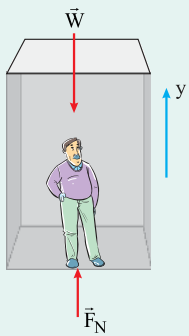
$$\vec{a} = \frac{\vec{F}_{\text{net}}}{m} \Rightarrow \vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

 $\vec{F}_{\text{net}}$ : نیروی خالص (N)

 $\vec{a}$ : شتاب ( $m/s^2$ )

 $m$ : جرم (kg)

• اگر شخصی به وزن  $mg$  درون آسانسوری ایستاده باشد و آسانسور با شتاب ثابت  $a$  در راستای قائم حرکت نماید، نیروی  $F_N$  از کف آسانسور بر پای شخص وارد می‌شود:



$$\vec{F}_{\text{net}} = m\vec{a}$$

{ کندشونده ↑ / تندشونده ↓ }

$$F_N - mg = ma$$

{ یکنواخت ↑ / یکنواخت ↓ }

$$F_N = m(g + a)$$

{ کندشونده ↑ / کندشونده ↓ }

وقتی می‌گوییم شتاب آسانسور رو به بالا است، یعنی  $a > 0$ .

وقتی می‌گوییم شتاب آسانسور رو به پایین است، یعنی  $a < 0$ .

وقتی می‌گوییم آسانسور با تندی ثابت حرکت می‌کند یعنی  $a = 0$ .

علامت شتاب حرکت آسانسور را تعیین می‌کنیم. مقداری که ترازوی فنری نشان می‌دهد همان مقدار نیروی  $F_N$  است:

$$F_N - mg = ma \xrightarrow{F_N < mg} ma < 0 \xrightarrow{m > 0} a < 0$$

بنابراین شتاب آسانسور رو به پایین است.

باید توجه داشت که منفی بودن شتاب، به تنهایی تعیین‌کننده تندشونده یا کندشونده بودن حرکت نیست.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

نکته



۴۹

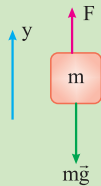
می خواهیم به جسمی که جرم آن  $2 \text{ kg}$  است، شتابی به بزرگی  $3 \text{ m/s}^2$  بدهیم تا در راستای قائم رو به پایین شروع به حرکت کند. نیرویی که باید به جسم وارد کنیم، چند نیوتون و در چه جهتی است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$  و مقاومت هوا ناچیز است.)

- (۱)  $14$ ، به سمت بالا  
(۲)  $14$ ، به سمت پایین  
(۳)  $26$ ، به سمت بالا  
(۴)  $26$ ، به سمت پایین

پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: از آنجا که شتاب جسم رو به پایین است، علامت شتاب منفی و  $a = -3 \text{ m/s}^2$  است.  
گام دوم: با توجه به قانون دوم نیوتون داریم:



$$F_{\text{net}} = ma$$

$$\Rightarrow F - mg = ma \Rightarrow F = m(g + a) \xrightarrow[g=10 \text{ m/s}^2, a=-3 \text{ m/s}^2]{m=2 \text{ kg}} F = 2(10 - 3) = 14 \text{ N}$$

گام سوم: از آنجا که  $F > 0$  است، جهت این نیرو به سمت بالا است و گزینه (۱) درست است.

می خواهیم به جسمی که جرم آن  $2 \text{ kg}$  است، شتاب  $3 \text{ m/s}^2$  بدهیم. اگر جسم در راستای قائم با شتاب رو به پایین شروع به حرکت کند و از مقاومت هوا صرف نظر کنیم:  
(الف) نیروهای وارد بر جسم را رسم کنید.  
(ب) اندازه نیرویی که باید به جسم وارد کنیم چند نیوتون است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )

امتحان  
نهایی



۵۰

جرم دو ذره باردار A و B به ترتیب  $2 \text{ kg}$  و  $3 \text{ kg}$  است. اگر نیروی الکتریکی که ذره A به ذره B وارد می کند، در SI به صورت  $\vec{F} = 6\vec{i} - 12\vec{j}$  باشد، شتاب ذره A بر حسب متر بر مربع ثانیه کدام است؟ (از سایر نیروهای وارد بر دو ذره چشم پوشی کنید).

$$-20\vec{i} + 40\vec{j} \quad (2)$$

$$20\vec{i} - 40\vec{j} \quad (1)$$

$$-30\vec{i} + 60\vec{j} \quad (4)$$

$$30\vec{i} - 60\vec{j} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

قانون سوم نیوتون

درس Box

هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم هم به جسم اول نیرویی هم اندازه، هم راستا ولی در خلاف جهت وارد می کند. علاوه بر این ها، نیروهای کنش و واکنش همواره:

(۱) به صورت جفت وجود دارند، یعنی به دو جسم وارد می شوند و برابری ندارند.

(۲) ممکن است منجر به اثرات متفاوتی شوند.

(۳) هم نوع اند، مثلاً هر دو گرانشی یا هر دو الکتریکی یا هر دو مغناطیسی اند.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21}$$

$F_{12}$ : نیرویی که جسم اول به دوم وارد می کند (کنش یا عمل)

$$F_{12} = F_{21}$$

$F_{21}$ : نیرویی که جسم دوم به اول وارد می کند (واکنش یا عکس العمل)

$$m_1 a_1 = m_2 a_2$$

گام اول: نیرویی که ذره A به ذره B وارد می کند را با  $\vec{F}_{AB}$  نشان می دهیم:

$$\vec{F}_{AB} = 6\vec{i} - 12\vec{j} \text{ (N)}$$

بنا به قانون سوم نیوتون، نیرویی که ذره B به ذره A وارد می کند را با  $\vec{F}_{BA}$  نشان می دهیم:

$$\vec{F}_{BA} = -\vec{F}_{AB} = -6\vec{i} + 12\vec{j} \text{ (N)}$$

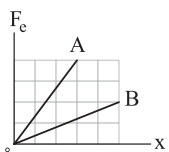
گام دوم: به کمک قانون دوم نیوتون، شتابی که ذره A پیدا می کند را به دست می آوریم:

$$\vec{a}_A = \frac{\vec{F}_{BA}}{m_A} = \frac{-6\vec{i} + 12\vec{j}}{2} = -3\vec{i} + 6\vec{j} \text{ (m/s}^2\text{)}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



نمودار نیروی کشسانی دو فنر A و B بر حسب تغییر طول آن‌ها به شکل زیر است. ثابت فنر A چند برابر ثابت فنر B است؟



$$\frac{15}{8} \quad (2)$$

$$\frac{10}{3} \quad (4)$$

$$\frac{8}{15} \quad (1)$$

$$\frac{3}{10} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۴

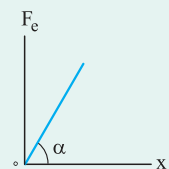
نیروی کشسانی فنر

درس Box

اگر فنری را نسبت به نقطه تعادل خود به اندازه X بکشیم یا فشرده کنیم، نیروی بازگرداننده‌ای در فنر ایجاد می‌شود که به طرف نقطه تعادل است و نیروی کشسانی فنر نام دارد.

$$F_e = kx$$

قانون هوک: نیروی کشسانی فنر با ثابت فنر و تغییر طول فنر، متناسب است.



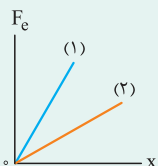
$$k = \text{شیب خط}$$

$F_e$ : اندازه نیروی کشسانی فنر (N)

k: ثابت فنر (N/m)

$x = \Delta L$ : تغییر طول فنر (m)

هر چه ثابت فنر بیشتر باشد، شیب نمودار  $F_e - x$  بیشتر و فنر، سخت‌تر است. مثلاً در نمودار زیر،  $k_1 > k_2$  است.



گام اول: با توجه به رابطه قانون هوک داریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

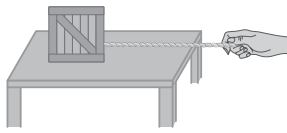
$$F_e = kx \Rightarrow k = \frac{F_e}{x}$$

گام دوم: بر این اساس، نسبت ثابت فنر A به ثابت فنر B را به دست می‌آوریم:

$$\frac{k_A}{k_B} = \frac{F_{e,A}}{F_{e,B}} \times \frac{x_B}{x_A} = \frac{4}{2} \times \frac{5}{3} = \frac{10}{3}$$



در شکل زیر، توسط یک نخ افقی با جرم ناچیز، جعبه ساکنی به جرم  $5 \text{ kg}$  را روی سطح افقی یک میز به ضریب اصطکاک جنبشی  $0.4$  به حرکت درمی آوریم. اگر تندی جعبه پس از  $80 \text{ cm}$  جابه جایی به  $0.8 \text{ m/s}$  برسد، کدام یک از موارد زیر درست است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



الف) اندازه نیروی کشش نخ  $18 \text{ N}$  است.

ب) اندازه نیروی کشش نخ  $22 \text{ N}$  است.

پ) نیرویی که نخ به دست شخص وارد می کند، به سمت چپ است.

ت) اندازه نیرویی که طناب به جعبه وارد می کند، بزرگ تر از اندازه نیرویی است که جعبه به طناب وارد می کند.

- (۱) الف - پ      (۲) الف - ت      (۳) ب - پ      (۴) ب - ت

پاسخ: گزینه ۳

درس: Box

(۱) رابطه مستقل از زمان در حرکت با شتاب ثابت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x$$

$v$ : سرعت متحرک در مکان  $x$  ( $\text{m/s}$ )

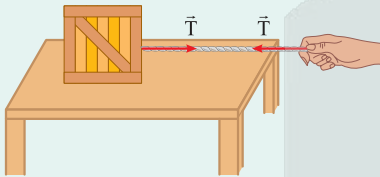
$v$ : سرعت متحرک در مکان  $x$  ( $\text{m/s}$ )

$\Delta x = x - x_0$ : جابه جایی ( $\text{m}$ )

$a$ : شتاب ( $\text{m/s}^2$ )

(۲) نیروی کشش طناب:

وقتی طناب متصل به جسمی تحت کشش قرار دارد، طناب جسم را با نیرویی می کشد که جهت آن از جسم به سمت بیرون و در راستای طناب است. این نیرو را با  $\vec{T}$  نشان می دهند و نیروی کشش طناب می نامند.



(۳) نیروی اصطکاک جنبشی (لغزشی) ( $f_k$ ):

نیروی اصطکاکی است که هنگام لغزش جسم، موازی با سطح و در خلاف جهت لغزش بر جسم اثر می کند.

$$f_k = \mu_k F_N$$

$\mu_k$ : ضریب اصطکاک جنبشی

$F_N$ : اندازه نیروی عمودی سطح ( $\text{N}$ )

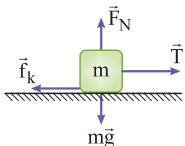
گام اول: به کمک رابطه مستقل از زمان، شتاب حرکت را به دست می آوریم:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta x \Rightarrow (0.8)^2 - 0 = 2a(0.8) \Rightarrow a = 0.4 \text{ m/s}^2$$

گام دوم: نیروی اصطکاک جنبشی وارد بر جسم را حساب می کنیم:

$$f_k = \mu_k F_N \xrightarrow{\substack{F_N = mg = 5 \times 10 = 50 \text{ N} \\ \mu_k = 0.4}} f_k = 0.4 \times 50 = 20 \text{ N}$$

گام سوم: نیروهای وارد بر جسم را رسم می کنیم و به کمک قانون دوم نیوتون، اندازه نیروی کشش ( $T$ ) را پیدا می کنیم:



$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow T - f_k = ma \Rightarrow T - 20 = 5 \times 0.4 \Rightarrow T = 22 \text{ N}$$

بنابراین عبارت «ب» درست و عبارت «الف» نادرست است.

گام چهارم: طبق قانون سوم نیوتون، عبارت «ت» نادرست است، اما عبارت «پ» درست است؛ زیرا وقتی دست شخص طناب را به طرف راست می کشد، عکس العمل این نیرو، دست شخص را به طرف چپ می کشد.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



دو گوی هم اندازه  $A$  و  $B$  را که جرم گوی  $B$  بیشتر از جرم گوی  $A$  است، از بالای برجی به طور هم زمان رها می کنیم. با فرض این که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی ثابت و یکسان باشد، به ترتیب تندی برخورد کدام گوی با زمین بیشتر است و کدام گوی زودتر به زمین می رسد؟

- (۱)  $B$  و  $B$  (۲)  $A$  و  $A$  (۳)  $A$  و  $B$  (۴)  $B$  و  $A$

## پاسخ: گزینه ۱

نیروی مقاومت شاره ( $\vec{f}_D$ ): وقتی جسمی درون یک شاره قرار دارد و نسبت به آن حرکت می کند، از طرف شاره، نیرویی در خلاف جهت حرکت جسم به آن وارد می شود که آن را با  $\vec{f}_D$  نشان می دهیم و نیروی مقاومت شاره می نامیم.

گام اول: بر این گوی ها، دو نیروی وزن و مقاومت هوا وارد می شود. طبق قانون دوم نیوتون، نیروی خالص وارد بر هر گوی برابر با حاصل ضرب جرم در شتاب است. نیروی مقاومت هوا را با  $f_D$  و وزن را با  $mg$  نشان می دهیم و برای بررسی ساده تر حرکت گوی ها، جهت مثبت محور  $y$  را به طرف پایین انتخاب می کنیم:

$$mg - f_D = ma \Rightarrow a = \frac{mg - f_D}{m} = g - \frac{f_D}{m} \Rightarrow \uparrow a = g - \frac{f_D}{m}$$

پس با در نظر گرفتن مقاومت هوا، هر چه  $m$  بیشتر باشد، شتاب حرکت بیشتر است:

$$m_B > m_A \Rightarrow a_B > a_A$$

گام دوم: طبق رابطه سرعت - جابه جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت، می توان نوشت:

$$v^2 - v_0^2 = 2a\Delta y \xrightarrow{v_0=0, \Delta y=h} v^2 = 2ah \xrightarrow{a_B > a_A} v_B > v_A$$

بنابراین تندی برخورد گوی  $B$  بیشتر است.

گام سوم: با استفاده از معادله جابه جایی داریم:

$$\Delta y_A = \Delta y_B \Rightarrow \frac{1}{2} a_A t_A^2 = \frac{1}{2} a_B t_B^2 \xrightarrow{a_B > a_A} t_B < t_A \Rightarrow \text{گوی } B \text{ زودتر می رسد.}$$

دو گوی هم اندازه را که جرم یکی سه برابر دیگری است ( $m_2 = 3m_1$ ) از بالای برجی به ارتفاع  $h$  به طور هم زمان رها می کنیم. با فرض این که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، ثابت و یکسان باشد، با نوشتن روابط لازم، شتاب حرکت گوی ها را با هم مقایسه کنید.

(سوال ۸ - امتحان نهایی فردا ۱۴۰۳ - رشته تهرپی)



## فیزیک

۵۴

جسمی به جرم  $4 \text{ kg}$  را به انتهای فنری به طول  $30 \text{ cm}$  و ثابت  $600 \text{ N/m}$  می‌بندیم. انتهای دیگر فنر را به سقف آسانسوری متصل می‌کنیم. با حرکت آسانسور، طول فنر به  $35 \text{ cm}$  می‌رسد. در این حالت، شتاب آسانسور چند متر بر مربع ثانیه و در چه جهتی است؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$ )

(۱)  $2/5$ ، رو به بالا

(۲)  $2/5$ ، رو به پایین

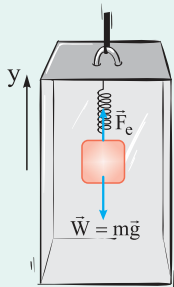
(۳)  $7/5$ ، رو به بالا

(۴)  $7/5$ ، رو به پایین

### پاسخ: گزینه ۲

کرتی Box

اگر وزنه آویخته به فنر قائم، باعث افزایش طول آن شود، در حال تعادل  $F_e = mg$  خواهد بود.



برای وزنه آویخته به فنر قائم درون آسانسور می‌توان نوشت:

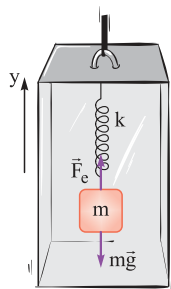
$$F_e = m(g + a)$$

● اگر شتاب آسانسور رو به بالا باشد  $a > 0$  است.

● اگر شتاب آسانسور رو به پایین باشد  $a < 0$  است.

اگر ثابت فنر را با  $k$  و تغییر طول فنر را با  $x$  نشان دهیم، داریم:

### پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\begin{cases} F_e = m(g + a) \\ F_e = kx \end{cases} \Rightarrow kx = m(g + a)$$

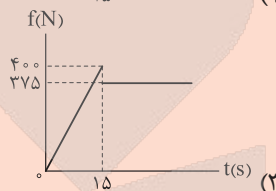
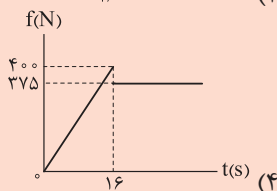
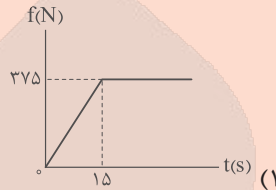
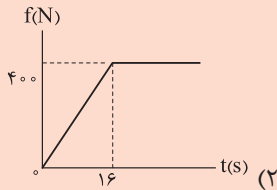
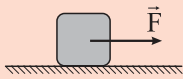
$$\frac{k=600 \text{ N/m}, m=4 \text{ kg}, g=10 \text{ N/kg}}{x=35-30=5 \text{ cm}=\frac{5}{100} \text{ m}} \rightarrow 600 \times \frac{5}{100} = 4(10 + a)$$

$$\Rightarrow 30 = 40 + 4a \Rightarrow a = -\frac{10}{4} = -2.5 \text{ m/s}^2$$

از آنجا که شتاب به دست آمده علامت منفی دارد، جهت این شتاب رو به پایین است.



در شکل زیر، جسمی به جرم  $50 \text{ kg}$  روی سطح افقی به ضریب اصطکاک ایستایی  $0.8$  و ضریب اصطکاک جنبشی  $0.75$  ساکن است. به این جسم نیروی افقی  $\vec{F}$  وارد می‌شود. اگر اندازه نیروی  $\vec{F}$  بر حسب زمان در SI به صورت  $F = 25t$  تغییر کند، نمودار اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم بر حسب زمان ( $t$ ) کدام است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



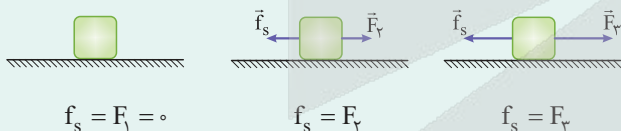
پاسخ: گزینه ۴

درس Box

نیروی اصطکاک ایستایی یا در حال سکون ( $f_s$ )

وقتی نیرویی بخواهد جسمی را روی سطحی به حرکت درآورد ولی قادر به تکان دادن آن نباشد، معلوم می‌شود نیروی دیگری هم اندازه آن و در جهت مخالف، بر جسم اثر می‌کند که مانع حرکت می‌شود. این نیروی مخالف، همان  $f_s$  است و مقادیرهای متفاوتی بین صفر تا یک مقدار بیشینه دارد.

نیروی  $f_s$  را می‌توان با توجه به توازن نیروها و قانون دوم نیوتون تعیین کرد. مثلاً در شکل‌های زیر، برای جسم ساکن داریم:



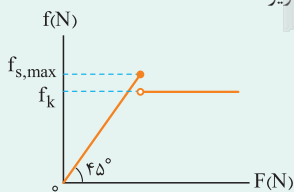
بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی که جسم برای شروع حرکت با آن روبه‌رو می‌شود، نیروی اصطکاک ایستایی در آستانه حرکت ( $f_{s,max}$ ) نامیده می‌شود و در واقع به اندازه کم‌ترین نیروی محرکی است که می‌تواند حرکت جسم را آغاز کند:

$$f_{s,max} = \mu_s F_N$$

$\mu_s$ : ضریب اصطکاک ایستایی

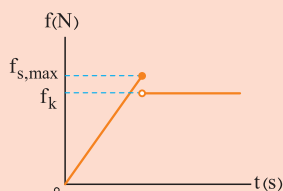
$F_N$ : اندازه نیروی عمودی سطح (N)

نمودار اندازه نیروی اصطکاک وارد بر یک جسم بر حسب اندازه نیروی محرک (F) به صورت زیر است:



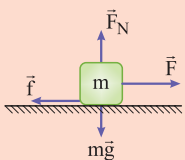
گام اول: در این سؤال، نیروی محرک (F) با زمان (t) متناسب است ( $F = 25t$ )؛ بنابراین نمودار نیروی اصطکاک بر حسب زمان

نیز به صورت مقابل است. ردّ گزینه‌های (۱) و (۲)



پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام دوم: اندازه نیروی اصطکاک جنبشی ( $f_k$ ) و اندازه نیروی اصطکاک در آستانه حرکت ( $f_{s,max}$ ) را به دست می آوریم:



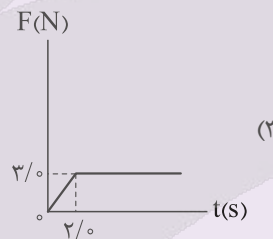
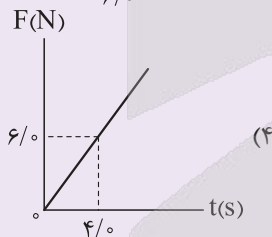
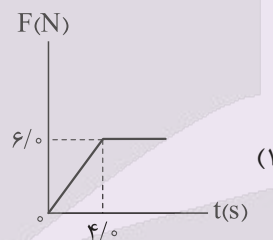
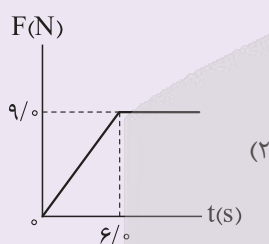
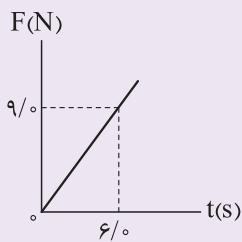
$$f_k = \mu_k F_N \quad \frac{F_N = mg = 5 \times 10 = 50 \text{ N}}{\mu_k = 0.75} \rightarrow f_k = 0.75 \times 50 = 37.5 \text{ N}$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N \quad \frac{F_N = 50 \text{ N}}{\mu_s = 0.8} \rightarrow f_{s,max} = 0.8 \times 50 = 40 \text{ N} \Rightarrow f_{s,max} = F = 40 \text{ N}$$

$$F = 25t \Rightarrow 40 = 25t \Rightarrow t = 1.6 \text{ s}$$

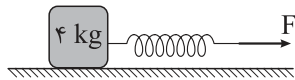
کنکور

جسمی به جرم  $3 \text{ kg}$  بر روی یک سطح افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک بین جسم و سطح برابر با  $0.2$  است. یک نیروی افقی متغیر با زمان، مطابق نمودار مقابل، به جسم وارد می شود. نمودار نیروی اصطکاک بر حسب زمان کدام است؟ (ضریب اصطکاک جنبشی و ضریب اصطکاک ایستایی، یکسان فرض شوند و  $g = 10 \text{ m/s}^2$ ) (تست ۵۵-کنکور تهرمی تیر ۱۴۰۴)





در شکل زیر، جسمی به جرم  $4 \text{ kg}$  روی سطح افقی توسط فنری افقی با ثابت  $500 \text{ N/m}$  و با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر بزرگی نیرویی که سطح افقی به جسم وارد می‌کند  $50 \text{ N}$  باشد، طول فنر نسبت به طول عادی آن چند سانتی‌متر افزایش پیدا می‌کند؟ ( $g = 10 \text{ N/kg}$  و مقاومت هوا ناچیز است.)



۱۰ (۴)

۸ (۳)

۶ (۲)

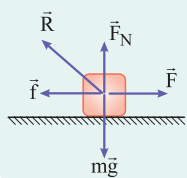
۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۲

درسی Box

نیروی سطح

از طرف سطح تماس، دو نیروی  $\vec{F}_N$  (نیروی عمودی سطح) و  $\vec{f}$  (نیروی اصطکاک) بر جسم اثر می‌کنند. این دو نیرو بر هم عمود بوده و برابری آن‌ها، نیروی سطح بر جسم نام دارد که آن را با  $\vec{R}$  نشان می‌دهیم:

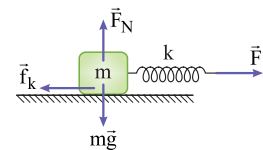


$$R = \sqrt{F_N^2 + f^2}$$

گام اول: با معلوم بودن اندازه نیروی سطح ( $R$ )، نیروی اصطکاک جنبشی را حساب می‌کنیم:

$$R = \sqrt{F_N^2 + f_k^2} \xrightarrow[\substack{F_N = mg = 4 \times 10 = 40 \text{ N} \\ R = 50 \text{ N}}]{\substack{50 = \sqrt{40^2 + f_k^2} \\ \Rightarrow f_k = 30 \text{ N}}}$$

گام دوم: چون جسم با سرعت ثابت حرکت می‌کند، شتاب آن صفر بوده و به کمک قانون دوم نیوتون می‌توان نوشت:



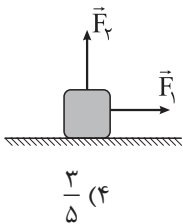
$$F_{\text{net}} = ma \xrightarrow{a=0} F_{\text{net}} = 0 \Rightarrow F - f_k = 0 \xrightarrow{F=kx} kx = f_k$$

$$\xrightarrow[\substack{k=500 \text{ N/m} \\ f_k=30 \text{ N}}]{500 \cdot x = 30 \Rightarrow x = 0.06 \text{ m} = 6 \text{ cm}}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



در شکل زیر، به جسمی به جرم  $8 \text{ kg}$  نیروی افقی و ثابت  $\vec{F}_1$  و نیروی قائم  $\vec{F}_2$  وارد می‌شود و جسم روی سطح افقی به صورت تندشونده در حال حرکت است. اگر اندازه نیروی  $\vec{F}_2$ ،  $20 \text{ N}$  افزایش یابد، اندازه شتاب جسم  $1/5 \text{ m/s}^2$  تغییر می‌کند. ضریب اصطکاک جنبشی سطح افقی برابر کدام است؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



$\frac{3}{5}$  (۴)

$\frac{5}{3}$  (۳)

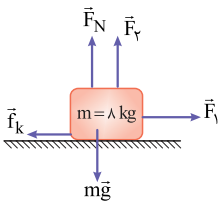
$\frac{3}{10}$  (۲)

$\frac{10}{3}$  (۱)

پاسخ: گزینه ۴

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: از آن جا که جسم به صورت تندشونده حرکت می‌کند، اندازه نیروی  $\vec{F}_1$  از اندازه نیروی اصطکاک جنبشی ( $f_k$ ) بیشتر است. از طرفی چون افزایش نیروی  $\vec{F}_2$  سبب کاهش نیروی اصطکاک می‌شود، اندازه شتاب جسم نسبت به حالت اول افزایش می‌یابد:



گام دوم: قانون دوم نیوتون را در هر دو حالت و در راستای افقی برای جسم می‌نویسیم:

حالت اول:

$$F_{\text{net}} = ma_1 \Rightarrow F_1 - f_k = ma_1 = 8a_1 \quad (I)$$

$$\Rightarrow F_1 - 8a_1 = f_k$$

حالت دوم:

$$F'_{\text{net}} = ma'_1 \Rightarrow F_1 - f'_k = m(a_1 + 1/5) \Rightarrow F_1 - f'_k = 8a_1 + 12 \Rightarrow F_1 - 8a_1 = f'_k + 12 \quad (II)$$

از ترکیب روابط (I) و (II) داریم:

$$f_k = f'_k + 12$$

گام سوم: نیروی عمودی سطح را در هر دو حالت پیدا می‌کنیم:

حالت اول:

$$F_N + F_2 - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg - F_2 = 80 - F_2$$

حالت دوم:

$$F'_N + (F_2 + 20) - mg = 0 \Rightarrow F'_N + F_2 + 20 - 80 = 0 \Rightarrow F'_N = 60 - F_2$$

گام چهارم: نتایج به دست آمده در گام‌های دوم و سوم را با هم ترکیب می‌کنیم و ضریب اصطکاک جنبشی سطح افقی را

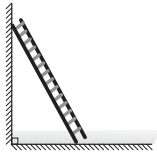
حساب می‌کنیم:

$$f_k = f'_k + 12 \Rightarrow \mu_k F_N = \mu_k F'_N + 12 \Rightarrow \mu_k (80 - F_2) = \mu_k (60 - F_2) + 12$$

$$\Rightarrow 80\mu_k - \mu_k F_2 = 60\mu_k - \mu_k F_2 + 12 \Rightarrow 20\mu_k = 12 \Rightarrow \mu_k = \frac{3}{5}$$



در شکل زیر، نردبانی همگن به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است. ضریب اصطکاک ایستایی بین سطح افقی و پای نردبان  $0.75$  است. در آستانه سر خوردن نردبان، نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، چند برابر نیرویی است که دیوار به نردبان وارد می‌کند؟



$$\frac{4}{5} \quad (2)$$

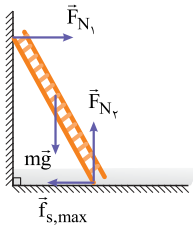
$$\frac{3}{5} \quad (1)$$

$$\frac{5}{4} \quad (4)$$

$$\frac{5}{3} \quad (3)$$

### پاسخ: گزینه ۳

گام اول: نیروهای وارد بر نردبان را در هر دو راستای افقی و قائم روی شکل نشان می‌دهیم. نیروی خالص وارد بر نردبان صفر است و می‌توان نوشت:



$$F_{N_2} - mg = 0 \Rightarrow F_{N_2} = mg$$

$$F_{N_1} - f_{s,\max} = 0 \Rightarrow F_{N_1} = f_{s,\max} \Rightarrow F_{N_1} = \mu_s F_{N_2}$$

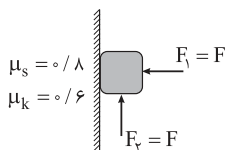
$$\xrightarrow{\mu_s = 0.75} F_{N_1} = 0.75 F_{N_2} \Rightarrow F_{N_2} = \frac{4}{3} F_{N_1}$$

گام دوم: نسبت بزرگی نیروی سطح افقی بر نردبان ( $R$ ) به بزرگی نیروی دیوار بر نردبان ( $F_{N_1}$ ) را به دست می‌آوریم:

$$R = \sqrt{f_{s,\max}^2 + F_{N_2}^2} \xrightarrow{\substack{f_{s,\max} = F_{N_1} \\ F_{N_2} = \frac{4}{3} F_{N_1}}} R = \sqrt{F_{N_1}^2 + \frac{16}{9} F_{N_1}^2} \Rightarrow R = \sqrt{\frac{25}{9} F_{N_1}^2} = \frac{5}{3} F_{N_1} \Rightarrow \frac{R}{F_{N_1}} = \frac{5}{3}$$



در شکل زیر، جسمی به جرم  $9 \text{ kg}$  با نیروی افقی  $\vec{F}_1$  به دیوار قائمی تکیه داده شده است و با وجود نیروی قائم  $\vec{F}_2$  در آستانه حرکت به سمت پایین قرار دارد. اگر اندازه هر یک از دو نیروی  $\vec{F}_1$  و  $\vec{F}_2$ ،  $2$  برابر شود، اندازه نیروی اصطکاک وارد بر جسم چند برابر می شود؟ ( $g = 10 \text{ m/s}^2$ )



$$\frac{1}{4} \quad (2)$$

$$\frac{1}{5} \quad (1)$$

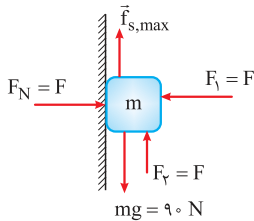
$$\frac{4}{5} \quad (4)$$

$$\frac{3}{5} \quad (3)$$

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: نیروهای وارد بر جسم را در هر دو راستای افقی و قائم رسم می کنیم. از آن جا که جسم در آستانه حرکت رو به پایین قرار دارد،  $f_{s,max}$  رو به بالا بر جسم اثر می کند و جسم در حال تعادل است.



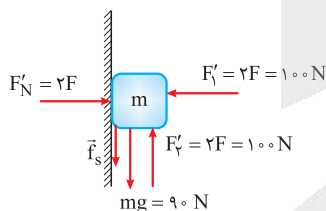
$$F_{net,x} = 0 \Rightarrow F_N - F_1 = 0 \Rightarrow F_N = F_1 \Rightarrow F_N = F$$

$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow f_{s,max} - mg - F_2 = 0 \Rightarrow f_{s,max} - 90 + F = 0 \Rightarrow \mu_s F_N + F = 90$$

$$\frac{\mu_s = 0.8}{F_N = F} \rightarrow 0.8F + F = 90 \Rightarrow 1.8F = 90 \Rightarrow F = 50 \text{ N}$$

$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s F = 0.8 \times 50 = 40 \text{ N}$$

گام دوم: نیروهای وارد بر جسم را در حالت دوم نیز رسم می کنیم؛ این دفعه نیروی اصطکاک کاهش می یابد و جهت آن نیز برعکس می شود:



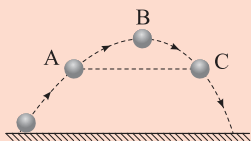
$$F_2' - mg - f_s = 0 \Rightarrow 100 - 90 - f_s = 0 \Rightarrow f_s = 10 \text{ N}$$

گام سوم: نسبت نیروی اصطکاک در دو حالت را پیدا می کنیم:

$$\frac{f_s}{f_{s,max}} = \frac{10}{40} = \frac{1}{4}$$



شکل زیر توپی را نشان می‌دهد که از سطح افقی زمین به صورت مایل و رو به بالا پرتاب شده است. اگر اندازه شتاب توپ در سه نقطه A، B و C به ترتیب  $a_A$ ،  $a_B$  و  $a_C$  باشد، با در نظر گرفتن مقاومت هوا کدام مقایسه الزاماً درست است؟ (A و C در یک ارتفاع از سطح زمین قرار دارند).



(۱)  $a_A > a_C > a_B$

(۲)  $a_B > a_A > a_C$

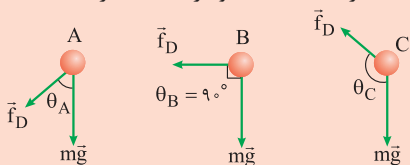
(۳)  $a_A > a_B$  و  $a_A > a_C$

(۴)  $a_A > a_B$  و  $a_C > a_B$

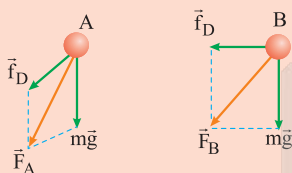
پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

گام اول: در طول مسیر حرکت، نیروی وزن ( $m\vec{g}$ ) که رو به پایین است و نیروی مقاومت هوا ( $\vec{f}_D$ ) که در خلاف جهت حرکت است، بر توپ وارد می‌شوند. زاویه بین این دو نیرو ( $\theta$ ) در نقطه A تند است، اما در نقطه B قائمه و در نقطه C باز است:

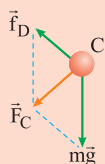


گام دوم: با فرض ثابت بودن نیروی مقاومت هوا در طول مسیر، نیروی خالص (برایند) وارد بر توپ در نقطه A نسبت به نقطه B بیشتر است:



$F_A > F_B \Rightarrow ma_A > ma_B \Rightarrow a_A > a_B$

گام سوم: نیروی خالص (برایند) وارد بر توپ در نقطه A نسبت به نقطه C نیز بیشتر است:

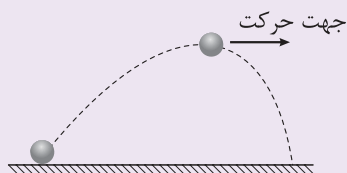


$F_A > F_C \Rightarrow ma_A > ma_C \Rightarrow a_A > a_C$

حتی اگر به علت اتلاف انرژی در طول مسیر، تندی گلوله و نیروی مقاومت هوای وارد بر آن کاهش یابد ( $f_{D,A} > f_{D,B} > f_{D,C}$ ) باز هم می‌توان گفت نیروی خالص وارد بر گلوله در نقاط A، B و C و شتاب حاصل از آن به ترتیب زیر است:

$F_A > F_B > F_C$   
 $a_A > a_B > a_C$

شکل زیر، توپی را نشان می‌دهد که از سطح افقی زمین به صورت مایل و رو به بالا پرتاب شده است. اگر اندازه شتاب توپ را در نقطه اوج با « $a_{\text{اوج}}$ » و اندازه شتاب توپ، کمی قبل از رسیدن به نقطه اوج را با « $a$ » نشان دهیم و « $g$ » اندازه شتاب گرانشی باشد، کدام مورد درست است؟



(۱)  $a > a_{\text{اوج}} > g$

(۲)  $a_{\text{اوج}} > g > a$

(۳)  $a_{\text{اوج}} > a > g$

(۴)  $a > g > a_{\text{اوج}}$





کدام یک از موارد زیر درست است؟

- (۱) کمیت دماسنجی ترموکوپل، جریان الکتریکی است.
- (۲) با افزایش دمای آب، گرمای نهان تبخیر آن افزایش می‌یابد.
- (۳) در رساناهای فلزی، سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرما بیشتر از اتم‌ها است.
- (۴) در طی شب، پدیده همرفت موجب نسیمی از سوی دریا به سمت ساحل می‌شود.

### پاسخ: گزینه ۳

بررس تک به تک موارد:

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه (۱): کمیت دماسنجی ترموکوپل، ولتاژ است. ✗
- گزینه (۲): با افزایش دمای آب، جنبش مولکول‌ها افزایش یافته و پیوند بین آن‌ها سست‌تر می‌شود و مولکول‌ها با انرژی کم‌تری از هم جدا می‌شوند؛ بنابراین گرمای نهان تبخیر کاهش می‌یابد. ✗
- گزینه (۳): در رساناهای فلزی، سهم الکترون‌های آزاد در رسانش گرما بیشتر از اتم‌ها است. ✓
- گزینه (۴): در طی شب، چون آب دیرتر سرد می‌شود (به دلیل ظرفیت گرمایی بالای آب)، پدیده همرفت موجب نسیمی از ساحل به سوی دریا می‌شود. ✗



مطابق جدول زیر، به سه جسم با جرم‌های معلوم، گرماهای معینی داده‌ایم و افزایش دمای هر کدام مشخص است. در مورد مقایسه ظرفیت گرمایی آن‌ها، کدام رابطه درست است؟

جسم	جرم (kg)	گرمای داده شده (J)	افزایش دما °C
A	۲	۱۸۰۰	۲
B	۱	۱۲۰۰	۲
C	۱/۵	۳۰۰۰	۴

$$C_A > C_C > C_B \quad (۲)$$

$$C_B > C_C > C_A \quad (۱)$$

$$C_C > C_A > C_B \quad (۴)$$

$$C_B > C_A > C_C \quad (۳)$$

### پاسخ: گزینه ۲

با استفاده از تعریف ظرفیت گرمایی که  $C = mc = \frac{Q}{\Delta\theta}$  است، ظرفیت گرمایی سه جسم A، B و C را محاسبه و مقایسه کنید.



Hint

اگر جسمی با محیط اطراف خود گرمای Q را مبادله کند و در اثر این مبادله گرما، دمای آن به اندازه  $\Delta T$  تغییر کند، Q متناسب با  $\Delta T$  است که ضریب این تناسب را با C نشان می‌دهند، به طوری که:

$$Q = C\Delta T$$

● به C ظرفیت گرمایی جسم گفته می‌شود که به جنس جسم و جرم آن بستگی دارد.

گام اول: با توجه به رابطه ظرفیت گرمایی و اطلاعات جدول داده شده، ظرفیت گرمایی هر سه جسم را به دست می‌آوریم:

$$C_A = \frac{Q_A}{\Delta T_A} = \frac{1800}{2} = 900 \text{ J/}^\circ\text{C}$$

$$C_B = \frac{Q_B}{\Delta T_B} = \frac{1200}{2} = 600 \text{ J/}^\circ\text{C}$$

$$C_C = \frac{Q_C}{\Delta T_C} = \frac{3000}{4} = 750 \text{ J/}^\circ\text{C}$$

گام دوم: با توجه به اعداد به دست آمده، رابطه زیر بین ظرفیت گرمایی‌های اجسام برقرار است:

$$C_A > C_C > C_B$$

### درس‌Box

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

مطابق جدول زیر، به سه ماده با جرم‌های معلوم، گرمای معین داده‌ایم و افزایش دمای هر کدام مشخص است. در مقایسه گرمای ویژه آن‌ها کدام رابطه درست است؟

(سؤال ۷۳ - کنکور ریاضی تیر ۱۴۰۴)

ماده	جرم (kg)	گرمای داده شده (J)	افزایش دما °C
A	۲	۱۸۰۰	۲
B	۱	۱۲۰۰	۲
C	۱/۵	۳۰۰۰	۴

$$C_B < C_A < C_C \quad (۲)$$

$$C_C < C_B < C_A \quad (۱)$$

$$C_A < C_B < C_C \quad (۴)$$

$$C_A < C_C < C_B \quad (۳)$$





روی یک ورقه فلزی، حفره‌ای دایره‌ای شکل به قطر ۴ cm ایجاد می‌کنیم. اگر دمای ورقه  $135^{\circ}\text{F}$  افزایش یابد،

مساحت حفره چند میلی‌متر مربع افزایش می‌یابد؟ (فلز  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$  و  $\pi = 3$ )

۱/۸ (۴)

۳/۶ (۳)

۰/۰۱۸ (۲)

۰/۰۳۶ (۱)

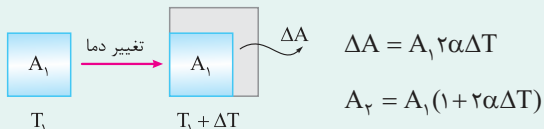
پاسخ: گزینه ۳

از رابطه  $\Delta A = A_1 (2\alpha) \Delta \theta$ ، افزایش مساحت حفره را به دست آورید.

Hint

با گرم کردن سطح یک جسم جامد، مساحت آن زیاد می‌شود. رابطه محاسبه میزان افزایش مساحت در اثر انبساط گرمایی کاملاً مشابه رابطه محاسبه تغییرات طول است:

درسی Box



•  $2\alpha$  را ضریب انبساط سطحی می‌نامیم. در واقع ضریب انبساط سطحی هر ماده تقریباً دو برابر ضریب انبساط طولی آن است.

• یکای ضریب انبساط سطحی  $\frac{1}{\text{C}}$  یا  $\frac{1}{\text{K}}$  است.

• در محاسبات بالا، فقط کافی است یکای  $A_1$ ،  $\Delta A$  و  $A_2$  یکسان باشد.

• روابط بالا را برای هر سطحی می‌توان استفاده کرد، مثل سطح یک کره، مکعب و حتی مساحت یک فضای خالی داخل یک ورق.

از رابطه افزایش مساحت استفاده می‌کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\left. \begin{aligned} A_1 &= \pi R^2 = 3(20 \text{ mm})^2 = 1200 \text{ mm}^2 \\ 2\alpha &= 4 \times 10^{-5} \text{ 1/K} \\ \Delta T &= \Delta \theta = \frac{5}{9} \Delta F = \frac{5}{9}(135) = 75 \text{ K} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \Delta A = A_1 2\alpha \Delta T = 1200 \times 4 \times 10^{-5} \times 75 = 3/6 \text{ mm}^2$$

روی یک ورقه فلزی، حفره‌ای به قطر ۲ cm ایجاد می‌کنیم. اگر دمای ورقه  $150^{\circ}\text{C}$  افزایش یابد، مساحت حفره چند

میلی‌متر مربع افزایش می‌یابد؟ (فلز  $\alpha = 2 \times 10^{-5} \frac{1}{\text{K}}$  و  $\pi = 3$ ) (سوال ۶۸ کنکور تهرمی ۱۴۰۴ (فارج از کشور))

۰/۹ (۴)

۱/۸ (۳)

۹۰ (۲)

۱۸۰ (۱)





فیزیک

۶۴

یک کره مسی توپر به جرم ۹۰۰ g، چند کیلوژول گرما دریافت کند تا چگالی آن ۰/۶ درصد کاهش یابد؟ (گرمای ویژه مس  $400 \frac{J}{kg.K}$  و ضریب انبساط طولی آن  $\frac{1}{K} \times 10^{-5}$  است.)

۱۲۰ (۴)

۴۰ (۳)

۱۲ (۲)

۴ (۱)

پاسخ: گزینه ۳

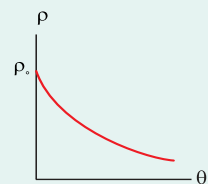
Hint

کرتی Box

از رابطه  $\rho_2 = \rho_1(1 - \beta\Delta\theta)$ ، مقدار  $\Delta\theta$  را محاسبه کنید و سپس از رابطه  $Q = mc\Delta\theta$ ، گرمای دریافتی را به دست آورید.

افزایش دما که به طور معمول موجب افزایش حجم می‌شود، بر جرم تأثیری ندارد. به همین دلیل انتظار داریم که طبق رابطه  $\rho = \frac{m}{V}$ ، با افزایش دما و افزایش حجم، چگالی اجسام کم شود. رابطه چگالی برحسب دما به شکل زیر به دست می‌آید:

$$\rho_2 = \rho_1(1 - \beta\Delta\theta)$$



گام اول: ابتدا تغییر دمای  $\Delta\theta$  را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\rho_2 = \rho_1(1 - \beta\Delta\theta) \xrightarrow[\beta = 3\alpha = 5/4 \times 10^{-5} \frac{1}{K}]{\rho_2 = 0.994\rho_1} 0.994\rho_1 = \rho_1(1 - 5/4 \times 10^{-5} \Delta\theta)$$

$$\Rightarrow 1 - 5/4 \times 10^{-5} \Delta\theta = 0.994 \Rightarrow 5/4 \times 10^{-5} \Delta\theta = 0.006$$

$$\Rightarrow \Delta\theta = \frac{6 \times 10^{-3}}{5/4 \times 10^{-5}} = \frac{1000}{9} \text{ } ^\circ\text{C}$$

گام دوم: گرمای دریافتی را با داشتن  $\Delta\theta$  به دست می‌آوریم:

$$Q = mc\Delta\theta \xrightarrow[c = 400 \frac{J}{kg.K}]{m = 0.9 \text{ kg}} Q = (0.9)(400)\left(\frac{1000}{9}\right) = 40000 \text{ J} = 40 \text{ kJ}$$



۶۵

در دمای صفر درجه سلسیوس، طول دو میله فلزی A و B، یکسان و برابر ۳۰ cm است. اگر ضریب انبساط طولی دو میله به ترتیب  $\frac{1}{K} \times 10^{-5} \times 2$  و  $\frac{1}{K} \times 10^{-5} \times 6$  باشد، با افزایش همزمان دمای میله‌ها، در دمای چند درجه فارنهایت اختلاف طول دو میله به ۰/۶ mm می‌رسد؟

۱۲۲ (۴)

۹۰ (۳)

۸۲ (۲)

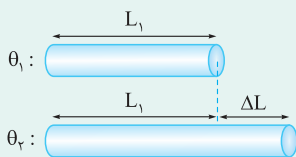
۵۰ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

از رابطه اختلاف طول دو میله، دمای نهایی را به دست آورید و در آخر دما را از رابطه  $F = \frac{9}{5}\theta + 32$  به فارنهایت تبدیل کنید.

Hint

اگر دمای میله‌ای به طول  $L_1$  را به اندازه  $\Delta T$  افزایش بدهیم، طول آن به اندازه  $\Delta L$  افزایش می‌یابد. اندازه  $\Delta L$  به سه عامل زیر بستگی دارد:

(۱) طول اولیه ( $L_1$ )(۲) اندازه افزایش دما ( $\Delta T$ )(۳) جنس میله ( $\alpha$ )

$$\Delta L = L_1 \alpha \Delta \theta$$

تغییرات دما برحسب کلون و درجه سلسیوس یکسان است:

$$\Delta \theta = \Delta T$$

در رابطه بالا، فقط باید یک‌گانه‌های  $L_1$ ،  $L_2$  و  $\Delta L$  یکسان باشند و لازم نیست که حتماً در SI باشند.

اگر طول نهایی میله را خواستند:

$$L_2 = L_1 (1 + \alpha \Delta \theta)$$

از رابطه بالا برای محاسبه هر تغییر طولی می‌توان استفاده کرد، مثل تغییر محیط یک شکل، تغییر قطر یک مربع، تغییر فاصله هر دو نقطه دلخواه و ...

گام اول: طول نهایی دو میله در دمای  $\theta$  را به دست می‌آوریم:

$$L'_A = L_A (1 + \alpha_A \Delta \theta) \Rightarrow L'_A = 300 (1 + 2 \times 10^{-5} \Delta \theta)$$

$$L'_B = L_B (1 + \alpha_B \Delta \theta) \Rightarrow L'_B = 300 (1 + 6 \times 10^{-5} \Delta \theta)$$

گام دوم: در دمای مورد نظر اختلاف طول دو میله، ۰/۶ mm است:

$$L'_B - L'_A = 0.6 \text{ mm} \Rightarrow 300 (1 + 6 \times 10^{-5} \Delta \theta) - 300 (1 + 2 \times 10^{-5} \Delta \theta) = 0.6 \Rightarrow 300 (4 \times 10^{-5} \Delta \theta) = 0.6$$

$$\Rightarrow 4 \times 10^{-5} \Delta \theta = \frac{0.6}{300} = 2 \times 10^{-3} \Rightarrow \Delta \theta = \frac{2 \times 10^{-3}}{4 \times 10^{-5}} = 50 \text{ } ^\circ\text{C} \Rightarrow \theta - 0 = 50 \text{ } ^\circ\text{C} \Rightarrow \theta = 50 \text{ } ^\circ\text{C}$$

گام سوم: اکنون دما را برحسب فارنهایت می‌نویسیم:

$$F = \frac{9}{5}\theta + 32 \Rightarrow F = \frac{9}{5}(50) + 32 = 122 \text{ } ^\circ\text{F}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



۶۶

یک ظرف سربی به گنجایش  $1\text{ L}$  در دمای  $20^\circ\text{C}$  به طور کامل از بنزن پر شده است. دمای ظرف و بنزن درون آن را به چند کلون برسانیم تا  $62\text{ cm}^3$  بنزن از ظرف سرریز شود؟ (ضریب انبساط طولی سرب  $3 \times 10^{-5}\text{ K}^{-1}$  و ضریب انبساط حجمی بنزن  $10^{-3}/49 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}$  است.)

۳۴۳ (۴)

۳۲۳ (۳)

۷۰ (۲)

۵۰ (۱)

## پاسخ: گزینه ۴

ابتدا انبساط ظاهری را از رابطه  $\Delta V_{\text{ظرف}} - \Delta V_{\text{مایع}} = \Delta V_{\text{ظاهری}}$  برابر  $62\text{ cm}^3$  قرار دهید تا دمای نهایی  $\theta$  به دست آید و در آخر دما را برحسب کلون ( $T = \theta + 273$ ) حساب کنید.

Hint

کرتی Box

• اگر به یک ظرف حاوی مقداری مایع، گرما دهیم و دمای مجموعه بالا رود، با این کار، هم حجم مایع افزایش می‌یابد و هم گنجایش ظرف؛ بنابراین میزان تغییراتی که ما در حجم مایع مشاهده می‌کنیم، هم ناشی از انبساط خود مایع است و هم انبساط ظرف.  
• اگر افزایش حجم مایع را با  $\Delta V_{\text{مایع}}$  و افزایش گنجایش ظرف را با  $\Delta V_{\text{ظرف}}$  نشان دهیم، میزان افزایش حجم مایع که ما مشاهده می‌کنیم، برابر با  $\Delta V_{\text{ظرف}} - \Delta V_{\text{مایع}}$  است. این مقدار را انبساط ظاهری می‌نامیم:

$$\Delta V_{\text{ظاهری}} = \Delta V_{\text{مایع}} - \Delta V_{\text{ظرف}}$$

$$\Delta V_{\text{مایع}} = V_1 \beta_{\text{مایع}} \Delta \theta, \quad \Delta V_{\text{ظرف}} = V_1 (\alpha) \Delta \theta$$

• اگر ابتدا ظرف پر از مایع باشد، می‌توان گفت:

$$V_1 = V_{\text{ظرف}} = V_1$$

$$\Delta V_{\text{ظاهری}} = V_1 (\beta_{\text{مایع}} - \alpha) \Delta \theta$$

• دقت کنید که در این حالت  $\Delta V_{\text{ظاهری}}$  برابر با مقدار مایعی است که از ظرف بیرون می‌ریزد.

گام اول: مطابق رابطه ذکر شده در درس باکس و این که حجم ظاهری  $62\text{ cm}^3$  است، می‌توان نوشت:

$$\Delta V_{\text{ظاهری}} = V_1 (\beta - \alpha) \Delta \theta \quad \frac{V_1 = 1\text{ L} = 10^3\text{ cm}^3, \Delta V_{\text{ظاهری}} = 62\text{ cm}^3}{\beta = 12/49 \times 10^{-3}\text{ K}^{-1}, \alpha = 9 \times 10^{-5}\text{ K}^{-1}} \rightarrow 10^3 (12/49 \times 10^{-3} - 9 \times 10^{-5}) \Delta \theta = 62$$

$$\Rightarrow (1/249 - 0/009) \Delta \theta = 62 \Rightarrow \Delta \theta = \frac{62}{1/249 - 0/009} = 50^\circ\text{C} \Rightarrow \theta - 20 = 50 \Rightarrow \theta = 70^\circ\text{C}$$

گام دوم: دما را برحسب کلون به دست می‌آوریم:

$$T = \theta + 273 = 70 + 273 = 343\text{ K}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



## فیزیک

۶۷

در یک روز زمستانی، بخار آب موجود در اتاقی روی شیشه پنجره به شکل مایع درمی آید و قطره قطره می شود. اگر دمای شیشه برابر  $0^{\circ}\text{C}$  باشد، برای آن که  $50\text{ g}$  آب روی شیشه تشکیل شود، چند کیلوژول گرما و چگونه مبادله می شود؟ (گرمای نهان تبخیر آب در دمای  $0^{\circ}\text{C}$  برابر  $2480\text{ kJ/kg}$  است.)

(۱)  $124$ ، از بخار آب به شیشه منتقل می شود.

(۲)  $124$ ، از شیشه به بخار آب منتقل می شود.

(۳)  $12/4$ ، از بخار آب به شیشه منتقل می شود.

(۴)  $12/4$ ، از شیشه به بخار آب منتقل می شود.

## پاسخ: گزینه ۱

در فرایند میعان، گرما از بخار گرفته می شود و مقدار آن از رابطه  $Q = -mL_v$  به دست می آید.

Hint

تبدیل بخار به مایع در طبیعت رخ می دهد و گاهی قطره های مایعی از بخار روی سطوح جامد تشکیل می شود. به این پدیده، میعان گفته می شود؛ بنابراین بخار، گرما از دست می دهد و به مایع تبدیل می شود. گرمای مربوط به میعان مقداری بخار به جرم  $m$  و گرمای نهان تبخیر  $L_v$  از رابطه  $Q = -mL_v$  محاسبه می شود. علامت منفی نشان دهنده آن است که هنگام میعان، بخار گرما از دست می دهد.

درس Box

گرما از بخار آب به شیشه منتقل می شود و مقدار گرمای مبادله شده برابر است با:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$|Q| = mL_v = (50 \times 10^{-3})(2480) = 124\text{ kJ}$$

در یک روز زمستانی، بخار آب موجود در اتاقی روی شیشه پنجره به شکل مایع در می آید و قطره قطره می شود. اگر دمای شیشه حدود  $0^{\circ}\text{C}$  باشد، برای آن که  $50\text{ g}$  آب روی شیشه تشکیل شود، چه قدر گرما به شیشه داده می شود؟

 کتاب  
 درسی

(فیزیک (۱) - مثال ۴ - ۱۴ صفحه کتاب درسی)





۶۸

به مقداری یخ با دمای  $20^{\circ}\text{C}$  - گرما می‌دهیم تا در نهایت نیمی از آن ذوب شود. چند درصد از گرمای داده شده به

یخ صرف ذوب کردن آن شده است؟ ( $L_F = 336 \text{ kJ/kg}$  و  $c_{\text{یخ}} = 2100 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$ )

۸۰ (۴)

۷۵ (۳)

۶۰ (۲)

۵۰ (۱)

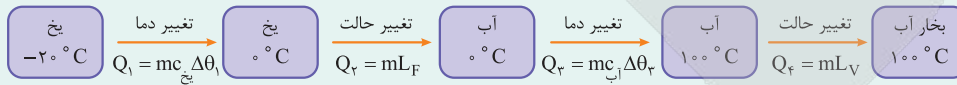
پاسخ: گزینه ۴

Hint

گرمای کل در دو مرحله، شامل تبدیل به یخ صفر درجه ( $Q_1$ ) و آب صفر درجه ( $Q_2$ ) اعمال می‌شود. حاصل  $100 \times \frac{Q_2}{Q_1 + Q_2}$  را حساب کنید.

درس Box

در مسائلی که تبادل گرما با تغییر حالت همراه است، بهتر است از طرح‌واره گرمایی استفاده کنیم. مثلاً اگر بخواهیم یخ  $20^{\circ}\text{C}$  - را به بخار آب  $100^{\circ}\text{C}$  تبدیل کنیم:



$$Q_{\text{کل}} = Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4$$

در بیشتر مسائل، با آب و یخ سروکار داریم:

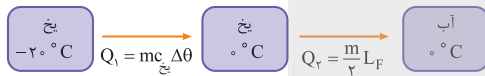
$$c_{\text{یخ}} = \frac{1}{2} c_{\text{آب}}$$

$$L_F = 80 c_{\text{آب}}$$

$$L_V = 540 c_{\text{آب}}$$

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: طرح‌واره گرمایی سؤال را رسم می‌کنیم:

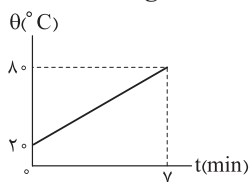


گام دوم:  $Q_2$  باعث ذوب شدن یخ می‌شود و نسبت خواسته شده در سؤال برابر است با:

$$\frac{Q_2}{Q_{\text{کل}}} = \frac{\frac{m}{2} L_F}{mc_{\text{یخ}} \Delta\theta + \frac{m}{2} L_F} \times 100 = \frac{L_F = 160 c_{\text{یخ}}}{\Delta\theta = 20^{\circ}\text{C}} \rightarrow \frac{Q_2}{Q_{\text{کل}}} = \frac{80 c_{\text{یخ}}}{20 c_{\text{یخ}} + 80 c_{\text{یخ}}} \times 100 = 80\%$$



یک کتری برقی محتوی ۲ kg آب است و ۸۰ درصد از انرژی تولیدی کتری، صرف افزایش دمای آب می‌شود. اگر نمودار دمای آب بر حسب زمان به شکل زیر باشد، توان ورودی کتری برقی چند کیلووات است؟ (c<sub>آب</sub> = ۴۲۰۰  $\frac{J}{kg \cdot ^\circ C}$ )



۱/۲ (۱)

۱/۵ (۲)

۱/۶ (۳)

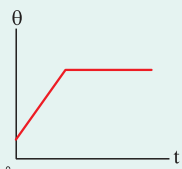
۲ (۴)

پاسخ: گزینه ۲

گرمای مبادله‌شده از دو رابطه  $Q = mc\Delta\theta$  و  $Q = Pt \times Ra$  را برابر قرار دهید و توان ورودی را به دست آورید.



اگر یک گرمکن با توان گرمایی P به جسمی گرما دهد، دما یا حالت آن تغییر می‌کند. در رابطه  $Q = Pt \times Ra$  می‌بینید که گرمایی که گرمکن به جسم می‌دهد با زمان متناسب است:



• هنگامی که نمودار به حالت افقی است، گرمای مبادله‌شده صرف تغییر حالت می‌شود.

گام اول: گرمای مبادله‌شده را حساب می‌کنیم:

$$Q = mc\Delta\theta = 2(4200)(60) = 504 \text{ kJ}$$

گام دوم: گرمای مبادله‌شده هم‌چنین از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$Q = Pt \times Ra \xrightarrow[t=7 \text{ min}=420 \text{ s}, Ra=0/8]{Q=504 \text{ kJ}} P(420)(0/8) = 504 \Rightarrow P = \frac{504}{420(0/8)} = 1/5 \text{ kW}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



## فیزیک

۷۰

درون یک ظرف فلزی که دمای آن  $10^{\circ}\text{C}$  است،  $200\text{ g}$  آب با دمای  $30^{\circ}\text{C}$  می‌ریزیم و یک قطعه از جنس نقره به جرم  $1\text{ kg}$  و دمای  $90^{\circ}\text{C}$  را درون آن می‌اندازیم. اگر دمای مجموعه پس از ایجاد تعادل گرمایی به  $40^{\circ}\text{C}$  برسد، ظرفیت گرمایی ظرف در SI کدام است؟ (  $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}$ ،  $c_{\text{نقره}} = 240 \frac{\text{J}}{\text{kg}\cdot^{\circ}\text{C}}$  و از تبادل گرمایی با محیط چشم‌پوشی شود.)

۳۶۰۰ (۴)

۳۶۰ (۳)

۱۲۰۰ (۲)

۱۲۰ (۱)

### پاسخ: گزینه ۱

از رابطه تعادل گرمایی (بدون تغییر حالت)  $\theta_e = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots}$ ، ظرفیت گرمایی ظرف را به دست آورید.

Hint

درس: Box

اگر دو یا چند جسم با دماهای متفاوت را کنار هم قرار دهیم، آن قدر با هم گرما مبادله می‌کنند تا دماهایشان یکسان شود و اصطلاحاً به تعادل گرمایی برسند، این دمای مشترک را دمای تعادل ( $\theta_e$ ) می‌نامند.

$$Q_1 + Q_2 + Q_3 + \dots = 0$$

به دلیل پایستگی انرژی، گرمایی که اجسام سرد می‌گیرند، به اندازه همان گرمایی است که اجسام گرم از دست می‌دهند:

نکته

$$Q = |Q'|$$

اگر تعادل گرمایی بدون تغییر حالت باشد:

$$\theta_e = \frac{m_1 c_1 \theta_1 + m_2 c_2 \theta_2 + \dots}{m_1 c_1 + m_2 c_2 + \dots}$$

با توجه به داده‌های سؤال و این که در تعادل گرمایی ذکر شده تغییر حالت نداریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$\theta_e = \frac{(mc\theta)_{\text{ظرف}} + (mc\theta)_{\text{آب}} + (mc\theta)_{\text{نقره}}}{(mc)_{\text{ظرف}} + (mc)_{\text{آب}} + (mc)_{\text{نقره}}} \Rightarrow 40 = \frac{10(mc)_{\text{ظرف}} + (0/2 \times 4200 \times 30) + (1 \times 240 \times 90)}{(mc)_{\text{ظرف}} + (0/2 \times 4200) + (1 \times 240)}$$

$$\Rightarrow 10(mc)_{\text{ظرف}} + 25200 + 21600 = 40(mc)_{\text{ظرف}} + 33600 + 9600$$

$$\Rightarrow 30(mc)_{\text{ظرف}} = 3600 \Rightarrow (mc)_{\text{ظرف}} = 120 \text{ J/K}$$





۷۱

ظرفی محتوی مخلوطی از آب و یخ خالص در فشار  $1 \text{ atm}$  در تعادل گرمایی است. یک قطعه فلز  $200$  گرمی به گرمای ویژه  $800 \frac{\text{J}}{\text{kg.K}}$  و دمای  $210^\circ \text{C}$  را درون ظرف می‌اندازیم. اگر تا رسیدن به تعادل گرمایی، جرم یخ موجود در ظرف  $25$  درصد کاهش یابد، جرم یخ باقی‌مانده در ظرف چند گرم است؟  $(c_{\text{پ}} = 4/2 \frac{\text{J}}{\text{g.K}}$  و  $L_F = 336 \text{ J/g}$ )

- ۱۰۰ (۱)      ۲۰۰ (۲)      ۳۰۰ (۳)      ۴۰۰ (۴)

پاسخ: گزینه ۳

Hint

گرمایی که قطعه فلز از دست می‌دهد ( $Q_1$ ) را با گرمای گرفته‌شده توسط یخ ذوب‌شده ( $Q_2$ ) برابر قرار دهید، سپس جرم باقی‌مانده را به دست آورید.

پاسخ خیلی تشریحی

گام اول: گرمای از دست‌رفته فلز ( $Q_1$ ) را با گرمای گرفته‌شده توسط یخ ( $Q_2$ ) را برابر قرار می‌دهیم:

$$Q_1 = Q_2$$

$$\Rightarrow (m_1 c \Delta \theta)_{\text{فلز}} = \left(\frac{m}{4} L_F\right)_{\text{یخ}} \Rightarrow 0/2 \times 800 \times 210 = \frac{m}{4} \times 336000$$

$$\Rightarrow m = \frac{4 \times 0/2 \times 800 \times 210}{336000} = 0/4 \text{ kg} = 400 \text{ g}$$

گام دوم: جرم یخ باقی‌مانده،  $75$  درصد جرم اولیه است:

$$m_{\text{باقی‌مانده}} = \frac{3}{4} m = \frac{3}{4} (400) = 300 \text{ g}$$



درون مقداری آب به جرم  $m$  و دمای  $40^\circ\text{C}$ ، قطعه یخی به جرم  $m'$  و دمای  $20^\circ\text{C}$  می‌اندازیم. کدام عبارت‌ها دربارهٔ تعادل گرمایی مجموعه درست است؟ ( $c_{\text{آب}} = 4200 \frac{\text{J}}{\text{g}\cdot\text{K}}$  و  $L_F = 336 \text{ J/g}$  و تبادل گرما با محیط ناچیز است.)

(الف) اگر  $m' = \frac{2}{9}m$  باشد، دمای تعادل مجموعه  $0^\circ\text{C}$  می‌شود.

(ب) اگر  $m' = 4m$  باشد، پس از تعادل هم، جرم یخ همان  $m'$  باقی می‌ماند.

(پ) اگر  $m' = 12m$  باشد، دمای تعادل مجموعه  $0^\circ\text{C}$  می‌شود.

(۲) الف - پ

(۱) الف - ب

(۴) الف - ب - پ

(۳) ب - پ

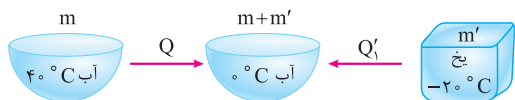
### پاسخ: گزینه ۲

در حالتی که یخ به طور کامل ذوب شود و همچنین حالتی که آب کاملاً یخ بزند،  $m'$  را برحسب  $m$  به دست آورید. علاوه بر این، در حالتی که یخ  $20^\circ\text{C}$  به یخ  $0^\circ\text{C}$  تبدیل می‌شود نیز  $m'$  برحسب  $m$  را محاسبه کنید.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

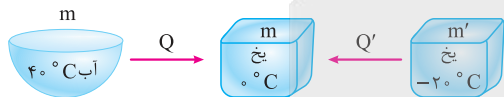
گام اول: در حالتی که یخ کاملاً ذوب می‌شود:



$$|Q| = Q'$$

$$mc_{\text{آب}}(40) = m' \frac{c_{\text{آب}}}{9}(20) + m'(\lambda + c_{\text{آب}}) \Rightarrow m' = \frac{4}{9}m$$

گام دوم: حالتی را بررسی می‌کنیم که در آن، آب کاملاً یخ بزند:



$$|Q| = Q'_2 \Rightarrow mc_{\text{آب}}(40) + m(\lambda + c_{\text{آب}}) = m'(20) \left(\frac{c_{\text{آب}}}{9}\right) \Rightarrow m' = 12m$$

پس در محدوده  $\frac{4}{9}m \leq m' \leq 12m$  دمای تعادل مجموعه  $0^\circ\text{C}$  است (نادرستی «الف» و درستی «پ»).

گام سوم: حالتی را بررسی می‌کنیم که یخ  $20^\circ\text{C}$  به یخ  $0^\circ\text{C}$  و آب  $40^\circ\text{C}$  به آب  $0^\circ\text{C}$  تبدیل می‌شود:



$$|Q| = Q'_3 \Rightarrow mc_{\text{آب}}(40) = m' \left(\frac{c_{\text{آب}}}{9}\right)(20) \Rightarrow m' = 4m$$

بنابراین عبارت «ب» نیز صحیح است.



درون مخزنی به حجم ۱۵ L، مقداری گاز آرمانی با دمای  $27^{\circ}\text{C}$  وجود دارد. فشارسنج متصل به مخزن، فشار گاز را ۹ atm نشان می‌دهد. دمای گاز را به  $77^{\circ}\text{C}$  و حجم مخزن را به ۳۵ L می‌رسانیم. فشاری که فشارسنج در این حالت نشان می‌دهد، چند اتمسفر است؟ (فشار هوای محیط ۱ atm است.)

۵ / ۵ (۴)

۵ (۳)

۴ / ۵ (۲)

۴ (۱)

## پاسخ: گزینه ۱

با استفاده از قانون گازهای کامل  $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ ، فشار گاز در حالت دوم ( $P_2$ ) را به دست آورید و عدد فشارسنج ( $P_2 - 1$ ) را محاسبه کنید.



## درسی Box

• برای مقدار معینی از یک گاز کامل، کمیت  $\frac{PV}{T}$  همواره ثابت است.

• اگر در یک فرایند، حجم، فشار و دمای مقدار معینی گاز کامل از  $P_1, V_1, T_1$  به  $P_2, V_2, T_2$  برسد:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$$

• در این رابطه دما حتماً باید برحسب کلوین باشد. در مورد فشار و حجم، یکسان بودن واحدها کفایت می‌کند.

گام اول: از قانون گازهای کامل برای به دست آوردن فشار در حالت دوم استفاده می‌کنیم:

$$\begin{cases} P_1 = 9 + 1 = 10 \text{ atm} \\ V_1 = 15 \text{ L} \\ T_1 = 273 + 27 = 300 \text{ K} \end{cases} \quad \begin{cases} P_2 = ? \\ V_2 = 35 \text{ L} \\ T_2 = 273 + 77 = 350 \text{ K} \end{cases}$$

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{10 \times 15}{300} = \frac{P_2 \times 35}{350} \Rightarrow P_2 = 5 \text{ atm}$$

گام دوم: فشارسنج  $P_2 - P_0$  را نشان می‌دهد:

$$P_2 - P_0 = 5 - 1 = 4 \text{ atm}$$

## پاسخ خیلی تشریحی ✓

درون استوانه‌ای ۱۲ L گاز اکسیژن با دمای  $7^{\circ}\text{C}$  وجود دارد. فشار گاز درون استوانه را با فشارسنجی اندازه می‌گیریم. فشارسنج ۱۴ atm را نشان می‌دهد. دمای گاز را به  $77^{\circ}\text{C}$  و حجم آن را به ۲۵ L می‌رسانیم. فشاری که فشارسنج در پایان نشان می‌دهد، چند اتمسفر است؟ (فشار هوای بیرون استوانه ۱ atm است. فرض کنید گاز درون استوانه، گاز آرمانی است.)

(فیزیک (۱) - مثال ۴-۱۹. صفحه ۱۳۳ کتاب درسی)





## فیزیک

۷۴

مخزنی به حجم  $60 \text{ L}$  حاوی مخلوطی از گازهای هیدروژن و نیتروژن در دمای  $127^\circ \text{C}$  و فشار  $4 \times 10^5 \text{ Pa}$  است. اگر جرم هیدروژن و نیتروژن موجود در مخزن برابر باشد، چند مول نیتروژن درون مخزن وجود دارد؟ ( $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ )

$$(M_{N_2} = 28 \text{ g/mol}, M_{H_2} = 2 \text{ g/mol})$$

۷ (۴)

۵ (۳)

۰/۵ (۲)

۰/۲ (۱)

## پاسخ: گزینه ۲



Hint

از رابطه  $PV = nRT$ ، تعداد مول مجموع هیدروژن و نیتروژن را محاسبه و سپس با توجه به برابری  $m_{H_2} = m_{N_2}$  و  $n = n_{H_2} + n_{N_2}$ ، تعداد مول نیتروژن را به دست آورید.



درس Box

$$PV = nRT$$

برای گازهای کامل (ثابت  $\frac{PV}{T}$ ) است. در واقع رابطه کامل تر آن به صورت روبه‌رو است:

$$R: \text{ ثابت جهانی گازها } \left( \frac{\text{J}}{\text{mol.K}} \right)$$

$n$ : تعداد مول (mol)

$N$ : تعداد ذره

$N_A$ : عدد آووگادرو

$m$ : جرم گاز

$M$ : جرم مولی

$$n = \frac{m}{M} = \frac{N}{N_A}$$

گام اول: از قانون عمومی گازها، تعداد مول مجموع هیدروژن و نیتروژن را به دست می‌آوریم:

$$PV = nRT \Rightarrow 4 \times 10^5 \times 60 \times 10^{-3} = n \times 8 \times 400 \Rightarrow n = \frac{24 \times 10^3}{8 \times 400} = 7.5$$

گام دوم: چون جرم دو گاز برابر است، داریم:

$$n_{H_2} + n_{N_2} = 7.5 \Rightarrow \frac{m}{2} + \frac{m}{28} = 7.5 \Rightarrow \frac{15m}{28} = 7.5 \Rightarrow m = 14 \text{ g}$$

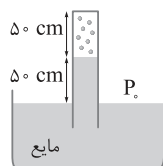
گام سوم: مول نیتروژن را حساب می‌کنیم:

$$n_{N_2} = \frac{m}{M_{N_2}} = \frac{14}{28} = 0.5 \text{ mol}$$

## پاسخ خیلی تشریحی ✓



در شکل زیر،  $0/4$  مول گاز آرمانی در انتهای لوله وارونه با مساحت مقطع  $200 \text{ cm}^2$  محبوس است. اگر چگالی مایع  $0/8 \text{ g/cm}^3$  باشد، دمای گاز حبس شده چند درجه سلسیوس است؟ ( $P_0 = 100 \text{ kPa}$  و  $R = 8 \frac{\text{J}}{\text{mol.K}}$ )



۳۰۰ (۲)

۴۰۰ (۱)

۲۷ (۴)

۱۲۷ (۳)

## پاسخ: گزینه ۴

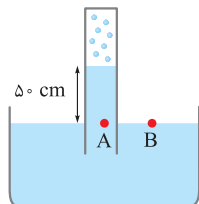


Hint

ابتدا فشار گاز محبوس را به دست آورید، سپس حجم گاز را از رابطه  $V = A.h$  و در نهایت از رابطه  $PV = nRT$  دمای گاز را حساب کنید.

گام اول: به کمک برابری فشار مایعات در سطوح هم‌تراز، فشار گاز را به دست می‌آوریم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$P_A = P_B$$

$$\rho gh + P_{\text{گاز}} = P_0 \Rightarrow P_{\text{گاز}} = P_0 - \rho gh = 100000 - (800 \times 10 \times 0/5) = 96 \text{ kPa}$$

$$V = 200 \times 10^{-4} \times 0/5 = 10^{-2} \text{ m}^3$$

گام دوم: حجم گاز را از رابطه  $V = A.h$  حساب می‌کنیم:

گام سوم: از قانون گازهای کامل  $T$  را به دست می‌آوریم:

$$PV = nRT \Rightarrow 96 \times 10^3 \times 10^{-2} = 0/4 \times 8 \times T \Rightarrow T = \frac{960}{3/2} = 300 \text{ K}$$

گام چهارم: دما را برحسب درجه سلسیوس به دست می‌آوریم:

$$T = \theta + 273 \Rightarrow \theta = 300 - 273 = 27 \text{ }^\circ\text{C}$$



۷۶ کدام مورد، درست است؟

- (۱) ثابت تعادل (K) برای هر واکنش تعادلی، همواره عددی ثابت است.  
 (۲) در هر گستره زمانی، شمار مول‌های یونیده شده HBr در آب، با شمار مول‌های HBr حاصل از پیوستن یون‌های  $H^+$  و  $Br^-$  به یکدیگر، برابر است.  
 (۳) واکنش‌های رفت و برگشت در سامانه‌های تعادلی، با سرعت برابری انجام می‌شوند.  
 (۴) از یونش  $0.625$  / مول استیک اسید در آب،  $0.3$  / مول یون هیدرونیوم و  $0.325$  / مول یون استات تولید می‌شود.

### پاسخ: گزینه ۳

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

در حالت تعادل، سرعت واکنش‌های رفت و برگشت با هم برابر است، به عبارت دیگر، شرط اصلی برقراری تعادل، برابر بودن سرعت واکنش‌های رفت و برگشت است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): امپدوریم گول نفورده باشین! ثابت تعادل یک واکنش با تغییر دما تغییر می‌کند.

گزینه (۲): HBr یک اسید قوی است و معادله یونش آن در آب به صورت یک‌طرفه است و نه تعادلی! عبارت داده شده برای اسیدهای ضعیفی مانند HF درست است.

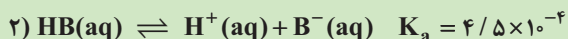
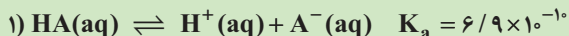
گزینه (۴): استیک اسید ( $CH_3COOH$ )، یک اسید ضعیف است و به طور جزئی در آب یونش می‌یابد. از طرفی برای اسیدهای ضعیف تک پروتون‌دار، شمار مول  $H^+$  و آنیون حاصل از یونش با هم برابر است:



مول اولیه	n	0	0
تغییر مول	-x	+x	+x
مول تعادلی	n - x	x	x

۷۷

با توجه به تعادل‌های زیر (در دما و غلظت یکسان)، کدام مطلب درست است؟



۱) رسانایی الکتریکی محلول HB، بیشتر از محلول HA است.

۲) غلظت یون هیدرونیوم در محلول HB، کم‌تر است.

۳) قدرت اسیدی HA بیشتر از HB است.

۴) اگر HB فورمیک اسید باشد، HA می‌تواند اتانویک اسید باشد.

## پاسخ: گزینه ۱

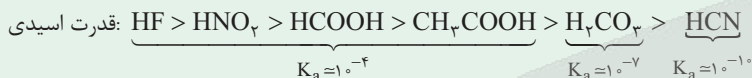
پاسخ خیلی تشریحی ✓

با توجه به این که ثابت یونش اسید HB بیشتر از HA است، اسید HB قوی‌تر است و در شرایط یکسان، غلظت یون‌ها در محلول آن و در نتیجه، رسانایی الکتریکی محلول آن بیشتر است.

 در مورد گزینه (۴) دقت کنید که هرچند ثابت یونش فورمیک اسید ( $\text{HCOOH}$ ) از اتانویک اسید ( $\text{CH}_3\text{COOH}$ ) بیشتر است، اما نسبت ثابت یونش آن‌ها، یک میلیون برابر نیست. (ثابت یونش فورمیک اسید، حدود  $10^{-4}$  برابر اتانویک اسید است.)

مقایسه ثابت یونش اسیدهای ضعیف موجود در کتاب درسی به صورت زیر است:

نکته



با توجه به جدول زیر که ثابت یونش چند اسید مقایسه شده است، پاسخ دهید. (سوال ۳ - امتحان نهایی فروردین ۱۴۰۰)

 امتحان  
نهایی

نام اسید	فرمول شیمیایی	ثابت یونش اسید
هیدروسیانیک اسید	HCN	$4/9 \times 10^{-10}$
هیدروفلوئوریک اسید	HF	$5/9 \times 10^{-4}$
نیترو اسید	HNO <sub>2</sub>	$4/5 \times 10^{-4}$

آ) کدام اسید قوی‌تر است؟ چرا؟

ب) در دما و غلظت یکسان، رسانایی الکتریکی کدام اسید کم‌تر است؟ چرا؟

پ) در شرایط یکسان، سرعت واکنش فلز منیزیم با یک لیتر محلول ۱ مولار کدام اسید جدول بالا، بیشتر است؟



با توجه به شکل زیر که چند ثانیه اول واکنش محلول دو اسید متفاوت با مقدار یکسانی از نوار منیزیم در دمای معینی را نشان می‌دهد، کدام عبارت به یقین درست است؟ (حجم هر دو محلول برابر است و در پایان هر دو واکنش، نوار فلزی از بین می‌رود).

واکنش ۱



HA

واکنش ۲



HB

(۱) ثابت یونش HA از HB بیشتر است.

(۲) اگر غلظت اولیه دو اسید برابر باشد، حجم گاز نهایی تولیدی در واکنش «۱» بیشتر است.

(۳) اگر HA و HB به ترتیب HF و HCl باشند، غلظت اولیه HA بسیار بیشتر از HB است.

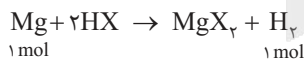
(۴) pH محلول HA بیشتر از pH محلول HB است.

### پاسخ: گزینه ۲

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

حباب‌های موجود در ظرف‌ها، نشان‌دهنده مقدار گاز هیدروژن تولیدشده در چند ثانیه اول واکنش‌ها است؛ پس تنها نتیجه‌ای که می‌توان از این شکل‌ها گرفت، این است که در محلول HA، غلظت یون هیدرونیوم بیشتر بوده است. *الا بریم گزینه‌ها را بررسی کنیم:*  
گزینه (۱): بیشتر بودن غلظت یون هیدرونیوم در محلول HA، می‌تواند به دلیل قوی‌تر بودن اسید HA یا بیشتر بودن غلظت مولی محلول آن باشد. ما اطلاعاتی از غلظت محلول‌ها نداریم؛ پس نمی‌توانیم به طور قطع، قدرت اسیدی و ثابت یونش اسیدها را با هم مقایسه کنیم.

گزینه (۲): با توجه به این که مقدار منیزیم در هر دو ظرف یکسان است و به طور کامل مصرف می‌شود، در هر دو واکنش، مقدار یکسانی گاز هیدروژن تولید می‌شود.



گزینه (۳): HF که یک اسید ضعیف است، مقدار بیشتری یون هیدرونیوم نسبت به اسید قوی HCl تولید کرده است. *پهن پیزی ممکنه؟؟* حتماً غلظت محلول HF باید بالاتر از محلول HCl باشد.

گزینه (۴): pH با غلظت یون هیدرونیوم رابطه وارونه دارد ( $\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$ )؛ پس pH محلول HA که غلظت یون هیدرونیوم در آن بیشتر است، کم‌تر می‌باشد.



با توجه به شکل زیر که نمای ذره‌ای  $2/5 \text{ L}$  از محلول  $\text{HA}$  را در دمای اتاق نشان می‌دهد، به ترتیب  $\text{pH}$  محلول چه قدر بوده و غلظت اولیه اسید چند مولار است؟ (هر ذره را معادل  $0/02$  مول در نظر بگیرید.)



●:  $\text{H}_3\text{O}^+$   
●:  $\text{A}^-$   
●:  $\text{HA}$

$0/008 - 2/1(1)$

$0/008 - 1/7(2)$

$0/032 - 2/1(3)$

$0/032 - 1/7(4)$

پاسخ: گزینه ۳

پاسخ خیلی تشریحی ✓

در محلول، یک ذره  $\text{H}_3\text{O}^+$  که معادل  $0/02$  مول است، وجود دارد؛

$$[\text{H}_3\text{O}^+] = \frac{0/02 \text{ mol}}{2/5 \text{ L}} = \frac{0/02}{1/4} = 8 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

$$\text{pH} = -\log[\text{H}_3\text{O}^+] = -\log(8 \times 10^{-3}) = 3 - \log 8 = 3 - \log 2^3 = 3 - 3 \log 2 = 3 - 3(0/3) = 2/1$$

با توجه به شکل، سه ذره اسید به صورت یونیده نشده باقی مانده‌اند. از طرفی وجود یک ذره  $\text{H}_3\text{O}^+$  نشان دهنده یونیده شدن یک ذره اسید است؛ پس شمار ذره‌های اسید اولیه برابر  $3 + 1 = 4$  بوده است:

$$\text{غلظت اولیه اسید} = \frac{(4 \times 0/02) \text{ mol}}{2/5 \text{ L}} = \frac{0/08}{1/4} = 0/32 \text{ mol.L}^{-1}$$



۸۰ در دمای ثابت، با رقیق کردن محلول یک اسید ضعیف با آب، چه تعداد از موارد زیر افزایش می‌یابد؟

الف) درجه یونش

ب) نسبت غلظت مولی یون هیدروکسید به هیدرونیوم

ج) pH محلول

د) ثابت یونش اسید

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

### پاسخ: گزینه ۳

به جز ثابت یونش، بقیه موارد افزایش می‌یابند.

بررسی همه موارد:

الف) طبق رابطه  $K_a \approx M\alpha^2$  و ثابت بودن  $K_a$  در دمای مشخص، درجه یونش ( $\alpha$ ) با غلظت محلول ( $M$ ) رابطه وارونه دارد، یعنی با رقیق شدن و کاهش غلظت محلول، درجه یونش اسید افزایش می‌یابد.

ب) با رقیق شدن محلول یک اسید،  $[H^+]$  در محلول کاهش می‌یابد؛ بنابراین با توجه به ثابت بودن حاصل  $[H^+][OH^-]$  در

دمای معین،  $[OH^-]$  افزایش می‌یابد؛ پس حاصل  $\frac{[OH^-]}{[H^+]}$  نیز افزایش می‌یابد.

$$\frac{[OH^-] \uparrow}{[H^+] \downarrow} = \uparrow$$

ج) با رقیق شدن و کاهش  $[H^+]$  محلول، pH افزایش می‌یابد.

د) ثابت یونش فقط به دما بستگی دارد و با تغییر غلظت محلول، تغییر نمی‌کند.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



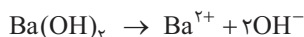
۸۱

به نیم لیتر محلول ۰/۱ مولار باریم هیدروکسید، در هر دقیقه ۱۰۰ mL آب اضافه می شود. پس از چند دقیقه pH محلول به ۱۳ می رسد؟ (دما را ثابت و برابر با ۲۵°C فرض کنید).

- ۲۰ (۴)                      ۱۵ (۳)                      ۱۰ (۲)                      ۵ (۱)

پاسخ: گزینه ۱

ابتدا pH اولیه محلول را می سنجیم:



$$[\text{OH}^-] = 2[\text{Ba(OH)}_2] = 0.2 \text{ mol.L}^{-1} \xrightarrow{[\text{H}^+][\text{OH}^-]=10^{-14}} [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{2 \times 10^{-1}} = 5 \times 10^{-14}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 14 - \log 5 = 13.3$$

pH محلول از ۱۳/۳ به ۱۳ رسیده است؛ یعنی به اندازه ۰/۳ واحد (log ۲) تغییر کرده است؛ بنابراین با اضافه کردن آب باید حجم محلول ۲ برابر شده باشد:

$$\frac{V_2}{V_1} = 2 \Rightarrow \frac{V_2}{500} = 2 \Rightarrow V_2 = 1000 \text{ mL} \Rightarrow \text{حجم آب اضافه شده} = 1000 - 500 = 500 \text{ mL}$$

با توجه به این که در هر دقیقه، ۱۰۰ mL آب به محلول اضافه می شود، ۵ دقیقه زمان نیاز است تا حجم آب اضافه شده برابر با ۵۰۰ mL شود.

$$500 \text{ mL آب} \times \frac{1 \text{ min}}{100 \text{ mL آب}} = 5 \text{ min}$$

$$\begin{cases} M_1 = 0.1 \\ V_1 = 500 \text{ mL} \end{cases} \begin{cases} [\text{OH}^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-13}} = 0.1 \Rightarrow M_2 = \frac{0.1}{2} = 0.05 \text{ mol.L}^{-1} \\ V_2 = ? \end{cases}$$

$$\underbrace{M_1 V_1}_{\text{غلظت}} = \underbrace{M_2 V_2}_{\text{رقیق}} \Rightarrow 0.1 \times 500 = 0.05 \times V_2 \Rightarrow V_2 = 1000 \text{ mL}$$

$$1000 - 500 = 500 \text{ mL} \Rightarrow \Delta t = 5 \text{ min}$$

اگر با افزودن آب خالص به محلول یک اسید یا باز قوی، حجم آن را n برابر کنیم یا به عبارت دیگر، محلول را n مرتبه رقیق کنیم، pH آن به اندازه log n تغییر می کند.

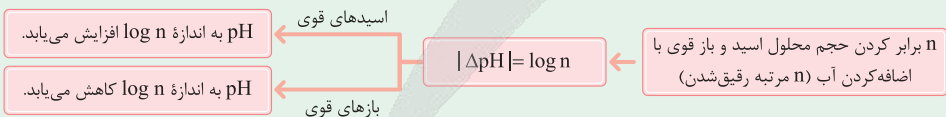
$$|\Delta \text{pH}| = \log n = \log \frac{V_2}{V_1}$$

n: تعداد مرتبه های رقیق شدن

V<sub>1</sub>: حجم اولیه محلول اسید یا باز (محلول غلیظ)

V<sub>2</sub>: حجم نهایی محلول اسید یا باز (محلول رقیق)

همان طور که گفتیم با رقیق کردن محلول های اسیدی و بازی، خاصیت اسیدی و بازی آن ها کم شده و pH آن ها به ترتیب افزایش و کاهش می یابد.



پاسخ خیلی تشریحی ✓

په جور دیگه

نکته



محلول‌های مولار از دو اسید HX و HY و دو باز AOH و BOH موجود می‌باشند. در دمای معینی، اختلاف pH محلول‌های HX و AOH، ۴ واحد از اختلاف pH محلول‌های HY و BOH بیشتر است. اگر pH محلول‌های AOH و BOH به ترتیب برابر ۱۲ و ۱۳ باشد، کدام عبارت در مورد این محلول‌ها درست است؟

(۱) اختلاف pH محلول‌های HX و HY برابر ۳ است.

(۲) نسبت ثابت یونش HX به HY و این نسبت در BOH به AOH، به یقین عددی بزرگ‌تر از یک است.

(۳) با افزایش دما به یک اندازه، pH هر چهار محلول به یک اندازه تغییر می‌کند.

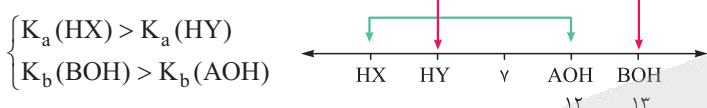
(۴) اگر BOH محلول سود باشد، HX به یقین محلول جوهرنمک است.

### پاسخ: گزینه ۲

با توجه به اطلاعات داده‌شده، خواهیم داشت:

$$\underbrace{\text{pH}(\text{AOH}) - \text{pH}(\text{HX})}_{12} = \underbrace{\text{pH}(\text{BOH}) - \text{pH}(\text{HY})}_{13} + 4 \Rightarrow \text{pH}(\text{HY}) - \text{pH}(\text{HX}) = 5$$

در غلظت یکسان، pH محلول HX کم‌تر است؛ بنابراین نسبت به HY، اسید قوی‌تری است.



بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): اختلاف pH محلول‌های اسیدی برابر ۵ است.

گزینه (۳): با توجه به این که نمی‌دانیم اسیدها، قوی یا ضعیف هستند، نمی‌توانیم به طور قطع اظهار نظر کنیم.

گزینه (۴): اولاً که نمی‌دانیم HX، قوی یا ضعیف است. دوماً pH محلول مولار (همان یک مولار) باز قوی تک‌ظرفیتی مانند سود (NaOH)، برابر ۱۴ است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓



pH محلول ۰/۰۰۶ مولار کدام ترکیب در دمای  $25^{\circ}\text{C}$  می تواند برابر ۱۲/۱ باشد؟

- (۱) اتیلن گلیکول  
 (۲) دی‌متیل آمین  
 (۳) پتاسیم هیدروکسید  
 (۴) کلسیم هیدروکسید

### پاسخ: گزینه ۴

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

اتیلن گلیکول ( $\text{HO}-\text{CH}_2\text{CH}_2-\text{OH}$ )، به صورت مولکولی در آب حل می‌شود و خاصیت بازی ندارد، پس گزینه (۱) پُر! دی‌متیل آمین مانند آمونیاک، یک باز ضعیف تک‌ظرفیتی، پتاسیم هیدروکسید (KOH) یک باز قوی تک‌ظرفیتی و کلسیم هیدروکسید ( $\text{Ca}(\text{OH})_2$ )، یک باز قوی دو‌ظرفیتی است. برای این که بدانیم محلول ما، حاوی کدام یک از این مواد است، ابتدا بیا باید pH محلول ۰/۰۰۶ مولار یک باز قوی تک‌ظرفیتی را حساب کنیم:

$$[\text{OH}^-] = 6 \times 10^{-3} \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{6 \times 10^{-3}} = \frac{1}{6} \times 10^{-11}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = -\log\left(\frac{1}{6} \times 10^{-11}\right) = 11 - \log \frac{1}{6} = 11 + \log 6 = 11 + \log 2 + \log 3$$

$$= 11 + 0/3 + 0/5 = 11/8$$

پس باز ما، قوی و تک‌ظرفیتی نیست؛ در نتیجه باز مورد نظر، نمی‌تواند باز ضعیف تک‌ظرفیتی مانند دی‌متیل آمین باشد، زیرا در غلظت یکسان، pH محلول یک باز ضعیف کم‌تر از pH محلول یک باز قوی است؛ پس گزینه‌های (۲) و (۳) هم پُر! حالا برای اطمینان، گزینه (۴) را بررسی می‌کنیم:

$$[\text{OH}^-] = 2[\text{Ca}(\text{OH})_2] = 2 \times 6 \times 10^{-3} = 12 \times 10^{-3} \Rightarrow [\text{H}^+] = \frac{10^{-14}}{12 \times 10^{-3}} = \frac{1}{12} \times 10^{-11}$$

$$\Rightarrow \text{pH} = 11 + \log 12 = 11 + 2 \log 2 + \log 3 = 11 + (2 \times 0/3) + 0/5 = 12/1$$



کدام مورد، درست است؟

سوسپانسیون

کلوئید

(۱) شیر منیزی برخلاف شیر، نور را پخش نمی‌کند.

(۲) ضداسیدها بخشی از اسید معده را خنثی کرده و pH محتویات معده را کاهش می‌دهند.

خاصیت بازی

(۳) در محلول شیشه‌پاک‌کن، رابطه  $[H^+] < [OH^-]$  برقرار است.

(۴) برای باز کردن مسیر لوله‌هایی که با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده‌اند، از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده می‌شود.

## پاسخ: گزینه ۴

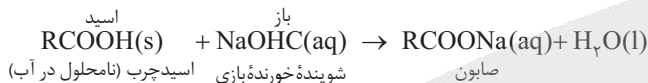
## پاسخ خیلی تشریحی ✓

اگر مواد مسدودکننده لوله‌ها، خاصیت بازی داشته باشند، برای از بین بردن آن‌ها باید از شوینده‌های خورنده اسیدی استفاده کنیم و اگر مواد مسدودکننده لوله‌ها، خاصیت اسیدی داشته باشند، باید از شوینده‌های خورنده بازی استفاده کنیم.

فرآورده‌های محلول در آب یا گازی → خورنده بازی + رسوب اسیدی (۱)

فرآورده‌های محلول در آب یا گازی → خورنده اسیدی + رسوب بازی (۲)

مثلاً اگر مسیر لوله‌ای با مخلوطی از اسیدهای چرب مسدود شده باشد، برای باز کردن لوله، می‌توان از محلول غلیظ سدیم هیدروکسید استفاده کرد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

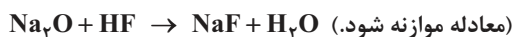
گزینه (۱): شیر منیزی، سوسپانسیون است و نور را پخش می‌کند.

گزینه (۲): با خنثی شدن اسید معده توسط ضداسیدها، pH محتویات معده افزایش می‌یابد. (pH با  $[H^+]$  رابطه وارونه دارد.)گزینه (۳): محلول شیشه‌پاک‌کن خاصیت بازی دارد و در آن،  $[OH^-]$  از  $[H^+]$  بیشتر است.



۸۵

برای خنثی کردن یک لیتر محلول هیدروفلوئوریک اسید با  $\text{pH} = 2/4$ ،  $3/1$  گرم پودر سدیم اکسید به محلول اضافه می‌شود. درجه یونش اسید کدام است؟ ( $\text{Na} = 23, \text{O} = 16: \text{g.mol}^{-1}$ )



۰/۰۴ (۲)

۰/۰۲ (۱)

۰/۵۵ (۴)

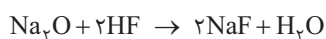
۰/۰۵ (۳)

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با توجه به معادله واکنش و جرم  $\text{Na}_2\text{O}$ ، غلظت محلول HF رو به دست بیار و بعد به کمک  $\text{pH}$  و رابطه  $\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M}$ ، درجه یونش اسید رو حساب کن!



Hint



گام اول: معادله واکنش را موازنه می‌کنیم:

گام دوم: به کمک جرم  $\text{Na}_2\text{O}$ ، غلظت مولی محلول HF را حساب می‌کنیم:

استفاده از کسر تبدیل:

$$3/1 \text{ g Na}_2\text{O} \times \frac{1 \text{ mol Na}_2\text{O}}{62 \text{ g Na}_2\text{O}} \times \frac{2 \text{ mol HF}}{1 \text{ mol Na}_2\text{O}} = 0/1 \text{ mol HF}$$

$$\text{HF غلظت مولی} = \frac{0/1 \text{ mol}}{1 \text{ L}} = 0/1 \text{ mol.L}^{-1}$$

استفاده از کسر تناسب:



یه جور دیگه

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم} \times \text{غلظت مولی}}{\text{ضریب}} \Rightarrow \frac{3/1}{1 \times 62} = \frac{x \times 1}{2} \Rightarrow x = 0/1 \text{ mol.L}^{-1}$$

گام سوم: به کمک  $\text{pH}$ ،  $[\text{H}^+]$  در محلول HF را حساب می‌کنیم:

$$[\text{H}^+] = 10^{-\text{pH}} = 10^{-2/4} = 10^{-3} \times 10^{0/6} = 10^{-3} \times (10^{0/3})^2 = 4 \times 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$$

گام چهارم: از رابطه درجه یونش استفاده می‌کنیم:

$$\alpha = \frac{[\text{H}^+]}{M} = \frac{4 \times 10^{-3}}{10^{-1}} = 4 \times 10^{-2} = 0/04$$



۸۶ کدام مورد نادرست است؟

(۱) با اضافه کردن مقداری آمونیاک به آب در دمای ثابت،  $[OH^-]$  افزایش و در نتیجه حاصل  $[H^+][OH^-]$  افزایش می‌یابد.

(۲) یکی از فراورده‌های واکنش جوش شیرین با هیدروکلریک اسید، یک اسید آرنیوس است.

(۳) واکنش نمادین خنثی شدن اسید و باز، همانند واکنش یونش نیتریک اسید، یک واکنش یک‌طرفه است.

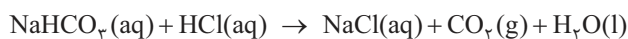
(۴) شکوفه‌های گل ادریسی در خاکی با  $[OH^-] = 5 \times 10^{-9} \text{ mol.L}^{-1}$ ، به رنگ آبی درمی‌آیند.

### پاسخ: گزینه ۱

حاصل  $[H^+][OH^-]$  در دمای مشخص، برای آب و همهٔ محلول‌های آبی، یک مقدار معین است. درسته که با افزودن آمونیاک به آب  $[OH^-]$  افزایش می‌یابد، اما  $[H^+]$  کاهش می‌یابد تا حاصل  $[H^+][OH^-]$  ثابت باقی بماند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۲): در واکنش جوش شیرین با هیدروکلریک اسید،  $CO_2$  تولید می‌شود که اسید آرنیوس است.



گزینه (۳): معادلهٔ کلی واکنش خنثی شدن اسید و باز به صورت  $H^+(aq) + OH^-(aq) \rightarrow H_2O(l)$  بوده که مانند معادلهٔ

یونش اسید قوی نیتریک اسید ( $HNO_3(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_3^-(aq)$ )، یک‌طرفه است.

گزینه (۴): گل ادریسی در خاک‌های اسیدی ( $[OH^-] < 10^{-7}$  یا  $[H^+] > 10^{-7}$ )، به رنگ آبی درمی‌آید.

رنگ گل ادریسی در خاک‌های اسیدی و بازی برعکس رنگ کاغذ پی‌اچ در محیط‌های اسیدی و بازی هستند!



در خاک‌های اسیدی: آبی

رنگ گل ادریسی

در محیط‌های اسیدی: سرخ

رنگ کاغذ pH

در خاک‌های بازی: سرخ

در محیط‌های بازی: آبی



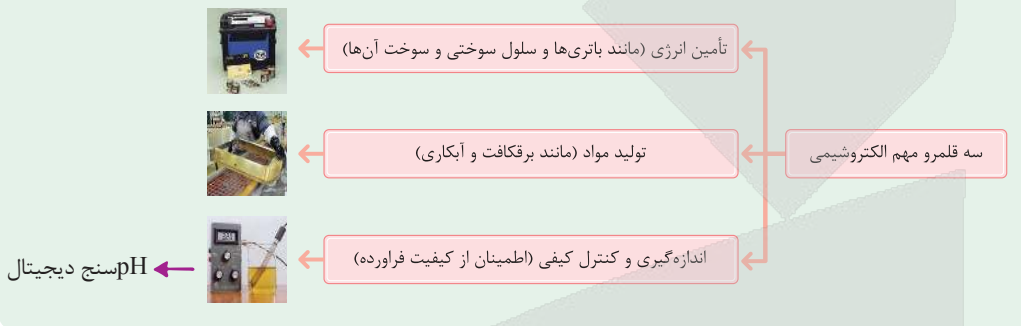
کدام مورد، درست است؟

۸۷

- ۱) انرژی الکتریکی تولیدشده به کمک الکتروشیمی، پاک اما پرهزینه است.
- ۲) یکی از کاربردهای الکتروشیمی در قلمرو کنترل کیفی، pH سنج دیجیتال است.
- ۳) با یک تیغه مس، یک تیغه روی و مقداری محلول اتانول و آب، می توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.
- ۴) با دو تیغه از جنس روی و با میوه ای مانند لیمو، می توان نوعی باتری ساخت و با آن یک لامپ LED را روشن کرد.

پاسخ: گزینه ۲

سه قلمرو مهم الکتروشیمی در نمودار زیر آمده است:



بررسی سایر گزینه ها:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه ۱): در کتاب درسی می خوانیم که تولید انرژی الکتریکی پاک و ارزان، از دستاوردهای الکتروشیمی است.
- گزینه ۳): برای ساخت باتری باید از الکترولیت مناسب مانند لیمو، استفاده کرد. محلول اتانول در آب که الکترولیت نیست! (اتانول به صورت مولکولی در آب حل می شود و در محلول آن، یون وجود ندارد).
- گزینه ۴): هر دو تیغه نباید از یک جنس باشند. تیغه ای از جنس روی و تیغه ای دیگر مثلاً از جنس مس!



با توجه به شکل زیر که الگویی ساده از یک واکنش اکسایش - کاهش بین دو اتم را نشان می دهد، گونه های B و C به ترتیب کدام اند؟



(۲) کاهش یافته - محصول اکسایش

(۱) اکسنده - محصول کاهش

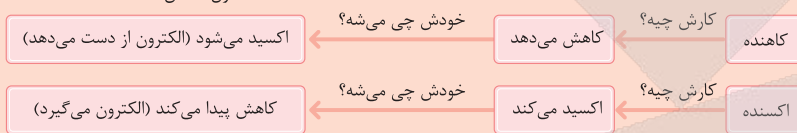
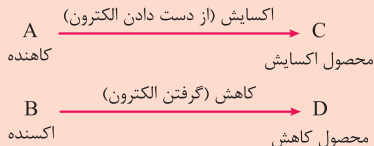
(۴) اکسایش یافته - محصول کاهش

(۳) کاهش یافته - محصول اکسایش

پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

A، الکترون از دست داده؛ بنابراین اکسایش یافته و نقش کاهشنده را دارد. B الکترون گرفته، یعنی کاهش یافته و نقش اکسنده را دارد.



در واکنش سوختن فلز منیزیم، گونه های «اکسایش یافته» و «کاهشنده» به ترتیب (از راست به چپ) کدام اند؟

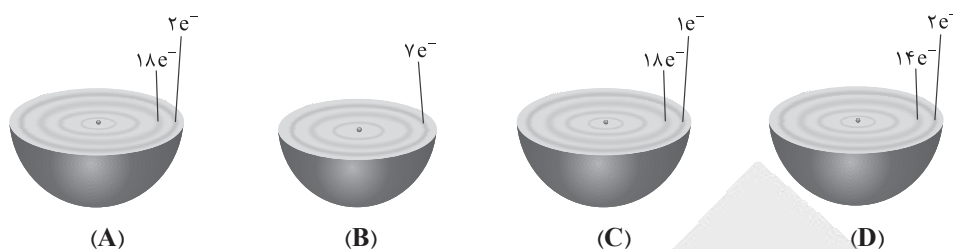
(سوال ۹۹ کنکور ریاضی ۱۴۰۴ - نوبت دوم ۴)

- |                         |                                     |
|-------------------------|-------------------------------------|
| O <sub>۲</sub> و Mg (۲) | O <sub>۲</sub> و O <sub>۲</sub> (۱) |
| Mg و Mg (۴)             | Mg و O <sub>۲</sub> (۳)             |





با توجه به شکل‌های زیر که بخشی از اتم چند عنصر را نشان می‌دهند، کدام مورد، نادرست است؟



- ۱) اگر قطعه‌ای از فلز A را در محلولی حاوی یون‌های C قرار دهیم، دمای محلول به تدریج افزایش می‌یابد.  
 ۲) قدرت کاهندگی A از D بیشتر است و B برخلاف A، خاصیت اکسندگی دارد.  
 ۳) در واکنش A با B، به ازای مصرف هر مول A،  $6/02 \times 10^{23}$  الکترون بین اکسند و کاهنده مبادله می‌شود.  
 ۴) در واکنش  $D + C^{2+} \rightarrow D^{2+} + C$ ، D کاهنده و  $C^{2+}$  اکسند است.

### پاسخ: گزینه ۳

اول بیایید عنصرها رو شناسایی کنیم:

پاسخ خیلی تشریحی ✓

$$A \text{ عدد اتمی} = 2 + 8 + 18 + 2 = 30 \Rightarrow {}_{30}\text{Zn}$$

لایه چهارم    لایه سوم    لایه دوم    لایه اول

$$B \text{ عدد اتمی} = 2 + 8 + 7 = 17 \Rightarrow {}_{17}\text{Cl}$$

لایه سوم    لایه دوم    لایه اول

$$C \text{ عدد اتمی} = 2 + 8 + 18 + 1 = 29 \Rightarrow {}_{29}\text{Cu}$$

لایه چهارم    لایه سوم    لایه دوم    لایه اول

$$D \text{ عدد اتمی} = 2 + 8 + 14 + 2 = 26 \Rightarrow {}_{26}\text{Fe}$$

لایه چهارم    لایه سوم    لایه دوم    لایه اول

بررسی گزینه‌ها:

گزینه (۱): قدرت کاهندگی فلز روی از فلز مس بیشتر است؛ پس فلز روی با محلول حاوی یون‌های مس، به طور طبیعی واکنش می‌دهد.  
 گزینه (۲): قدرت کاهندگی روی (A) از آهن (D) بیشتر است. هم‌چنین کلر (B)، نافلز است و برخلاف روی، تمایل به گرفتن الکترون داشته و خاصیت اکسندگی دارد.

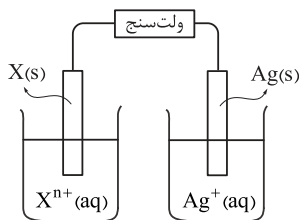
گزینه (۳): در واکنش فلز روی با کلر، فلز روی اکسایش یافته و به  $\text{Zn}^{2+}$  تبدیل می‌شود؛ پس به ازای هر مول Zn، ۲ مول الکترون ( $2 \times 6/02 \times 10^{23} e^-$ ) مبادله خواهد شد.



گزینه (۴): در واکنش مورد نظر، D اکسایش و  $C^{2+}$  کاهش یافته است؛ بنابراین D، نقش کاهنده و  $C^{2+}$ ، نقش اکسند را دارد.



دانش آموزی یک سلول گالوانی مطابق شکل زیر تشکیل می‌دهد و بعد از اتصال ولتسنج در مدار، عدد صفر بر روی



آن نمایش داده می‌شود. کدام عامل می‌تواند دلیل این اتفاق باشد؟

- ۱) فلز پایداری مانند طلا و پلاتین می‌باشد و اکسایش نمی‌یابد.
- ۲) تبادل یون میان دو نیم‌سلول انجام نمی‌شود.
- ۳) غلظت اولیهٔ محلول دو الکترولیت با هم برابر نیستند.
- ۴) ابعاد و جرم دو الکترود تفاوت زیادی با هم دارد.

### پاسخ: گزینهٔ ۲

### درس‌Box

**دیوارهٔ متخلخل:** در سلول‌های گالوانی، یک دیواره که متخلخل است، دو نیم‌سلول آندی و کاتدی را از یکدیگر جدا می‌کند. این دیوارهٔ متخلخل که از جنس مواد خاصی است، دو وظیفهٔ مهم و حیاتی دارد:

۱) از مخلوط شدن مستقیم و سریع دو الکترولیت، جلوگیری می‌کند.

اگر الکترولیت‌های دو نیم‌سلول مخلوط شوند، جریان برق تولید نمی‌شود و عملاً سلول کارایی خود را از دست می‌دهد. مثلاً در سلول گالوانی «روی - مس» اگر دیوارهٔ متخلخل وجود نداشته باشد، یون‌های  $\text{Cu}^{2+}$  که در اطراف تیغهٔ Zn قرار دارند، به طور مستقیم با تیغه واکنش می‌دهند؛ یعنی مانند قراردادن تیغهٔ روی در محلول مس (II) سولفات، به طور مستقیم با یکدیگر الکترون مبادله می‌کنند؛ پس خبری از عبور الکترون‌ها از سیم و تولید جریان برق نخواهد بود.

۲) به یون‌های موجود در دو محلول اجازهٔ عبور می‌دهد تا بار الکتریکی محلول‌ها خنثی باقی بماند.

برای درک بهتر نقش دیوارهٔ متخلخل، بیایید برگردیم به سلول گالوانی روی - مس!

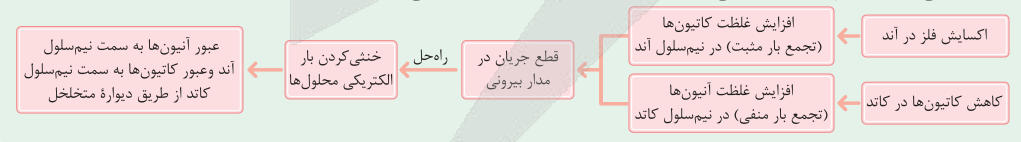
در بخش آندی این سلول، نیم‌واکنش  $\text{Zn(s)} \rightarrow \text{Zn}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^{-}$  انجام می‌شود و الکترون‌های حاصل از آن، برای تیغهٔ مس فرستاده می‌شود و یون‌های  $\text{Zn}^{2+}$  وارد محلول الکترولیت نیم‌سلول آندی می‌شوند. به نظرتون نتیجهٔ این اتفاق چیه؟!

**درسته!** محلول الکترولیت نیم‌سلول آندی، به تدریج دارای بار الکتریکی مثبت (به دلیل تجمع کاتیون‌های  $\text{Zn}^{2+}$ ) می‌شود. تجمع بار مثبت در نیم‌سلول آندی، سبب می‌شود که الکترون‌ها نتوانند در سیم از آند به سمت کاتد حرکت کنند و جریان قطع می‌شود؛ پس باید فکری به حال خنثی شدن محلول بکنیم. این‌جاست که دیوارهٔ متخلخل به داد ما می‌رسد! به دلیل دافعهٔ موجود بین یون‌های  $\text{Zn}^{2+}$  در نیم‌سلول آندی، یون‌های اضافی  $\text{Zn}^{2+}$  از طریق منافذ ریز دیوارهٔ متخلخل، از نیم‌سلول آندی خارج و وارد نیم‌سلول کاتدی می‌شوند. به این ترتیب، محلول الکترولیت در نیم‌سلول آندی خنثی می‌شود. حالا ببینیم در نیم‌سلول کاتدی، چه اتفاقی می‌افتد؟

در نیم‌سلول کاتدی، نیم‌واکنش  $\text{Cu}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{e}^{-} \rightarrow \text{Cu(s)}$  انجام می‌شود؛ بنابراین با مصرف یون‌های  $\text{Cu}^{2+}$  در نیم‌سلول کاتدی، شمار آنیون‌ها زیاد شده و محلول الکترولیت دارای بار الکتریکی منفی می‌شود. در نتیجه به دلیل زیادبودن بار الکتریکی منفی و دافعهٔ بین آنیون‌های موجود در محلول (مثلاً  $\text{SO}_4^{2-}$ )، این آنیون‌ها از طریق منافذ ریز دیوارهٔ متخلخل، از نیم‌سلول کاتدی خارج و وارد نیم‌سلول آندی می‌شوند. به این ترتیب، محلول الکترولیت در نیم‌سلول کاتدی نیز خنثی می‌شود.

یکی از الزامات سلول گالوانی، ارتباط میان دو نیم‌سلول با دیوارهٔ متخلخل است.

در یک سلول گالوانی، همواره کاتیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت کاتد و آنیون‌ها با عبور از دیوارهٔ متخلخل به سمت آند مهاجرت می‌کنند تا هم مدار الکتریکی را کامل کنند و هم محلول‌ها را خنثی نگه دارند.

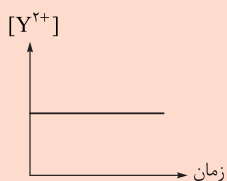


### پاسخ خیلی تشریحی ✓

### نکته



برای بررسی رفتارهای الکتروشیمیایی چند فلز و محلول‌های حاوی یون‌های آن‌ها، آزمایش‌های زیر انجام شده است.



با توجه به نتایج به دست آمده، کدام مورد نادرست است؟

(الف) با قراردادن تیغه A درون محلول  $X^{2+}$ ، دما افزایش یافت.

(ب) با قراردادن تیغه A درون محلول  $Y^{2+}$ ، نمودار تغییرات غلظت یون‌های  $Y^{2+}$  به صورت روبه‌رو به دست آمد.

(۱) مقایسه قدرت کاهندگی فلزهای مورد آزمایش به صورت  $Y > A > X$  است.

(۲) با قراردادن تیغه X درون محلول  $Y^{2+}$ ، فلز Y ته‌نشین می‌شود.

(۳) اگر A با محلول مولار HCl واکنش دهد، Y به یقین با این محلول واکنش داده ولی در مورد X، نمی‌توان به یقین اظهار نظر کرد.

(۴) میزان افزایش دما در واکنش تیغه Y با محلول  $X^{2+}$ ، بیشتر از واکنش این تیغه با محلول  $A^{2+}$  است.

### پاسخ: گزینه ۲

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

ابتدا باید ببینیم از هر آزمایش چه نتیجه‌ای می‌گیریم:

(الف) افزایش دما، نشانه انجام واکنش شیمیایی بین A و  $X^{2+}$  است؛ بنابراین قدرت کاهندگی فلز A از X بیشتر است. قدرت کاهندگی:  $A > X$

(ب) غلظت یون‌های  $Y^{2+}$  تغییری نکرده است؛ بنابراین واکنش بین تیغه A و یون‌های  $Y^{2+}$  انجام نشده است:

قدرت کاهندگی:  $A < Y$

از جمع این دو آزمایش به نتیجه زیر می‌رسیم:

قدرت کاهندگی:  $Y > A > X$

با این اوصاف، گزینه (۲) نادرست است، زیرا به دلیل کم‌تر بودن قدرت کاهندگی X نسبت به Y، واکنش  $X + Y^{2+} \rightarrow$  انجام نمی‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): این رو که گفتیم!

گزینه (۳): اگر A با محلول ۱ مولار HCl واکنش دهد، Y نیز که قدرت کاهندگی بیشتری دارد، قطعاً با این محلول واکنش خواهد داد، اما در مورد X نمی‌دونیم! چون قدرت کاهندگی کم‌تری نسبت به A دارد و از طرفی، مثبت یا منفی بودن  $E^\circ$  آن مشخص نیست.

گزینه (۴): تفاوت قدرت کاهندگی Y و X، بیشتر از تفاوت قدرت کاهندگی Y و A است، پس میزان افزایش دما در واکنش  $Y + X^{2+} \rightarrow$  بیشتر از واکنش  $Y + A^{2+} \rightarrow$  است.

با توجه به اطلاعات زیر، که رفتار چهار فلز A، X، D و Z را در آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد، کدام مورد درباره

(سوال ۱۰۴ کنکور تهرمی ۱۳۰۴، نوبت دوم)

مقایسه قدرت کاهندگی آن‌ها در مقایسه با Cu درست است؟

• قدرت اکسندگی  $X^{2+}$ ، از قدرت اکسندگی  $Z^{2+}$  بیشتر است.

• تنها سه فلز D، X و Cu با محلول  $CuCl_2(aq)$  واکنش می‌دهند.

• با قراردادن تیغه‌ای از فلز D در محلول‌های جداگانه دارای یون‌های  $Z^{2+}$ ،  $A^{2+}$  و  $X^{2+}$ ، فقط فلزهای A و X، رسوب می‌کنند.

(۲)  $Z > X > Cu > A > D$

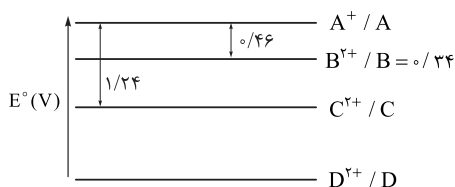
(۱)  $X > D > Cu > Z > A$

(۴)  $Z > D > X > Cu > A$

(۳)  $X > Z > D > Cu > A$



با توجه به نمودار پتانسیل کاهش زیر و گونه‌های موجود در آن، کدام عبارت نادرست است؟ (A), B, C و D عنصرهای فلزی اند.



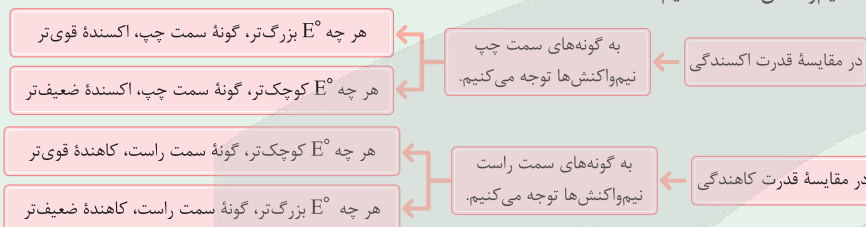
- ۱) به ترتیب  $A^+$  و  $D^{2+}$ ، قوی‌ترین و ضعیف‌ترین گونه‌های اکسندنده‌اند.
- ۲) دو فلز C و D می‌توانند با محلول ۱ مولار HCl واکنش دهند.
- ۳) اگر فلز C در اتصال با SHE، سلول گالوانی تشکیل دهد، به مرور pH الکترولیت در نیم‌سلول کاتدی کاهش می‌یابد.
- ۴) واکنش فلز D با محلول‌هایی حاوی یون سایر فلزها، به طور خودبه‌خودی انجام می‌شود.

### پاسخ: گزینه ۳



می‌توانیم قدرت اکسندگی و کاهش‌دهنده را به کمک  $E^\circ$  با هم مقایسه کنیم. دیدیم که فرم کلی معادله نیم‌سلول‌های استاندارد به صورت مقابل است:

بنابراین برای مقایسه قدرت اکسندگی، باید به گونه‌های سمت چپ نیم‌واکنش‌ها و برای مقایسه قدرت کاهش‌دهنده، باید به گونه‌های سمت راست نیم‌واکنش‌ها نگاه کنیم:



بررسی گزینه‌ها:

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

- گزینه ۱): نیم‌سلول  $A^+ / A$ ، بیشترین  $E^\circ$  و نیم‌سلول  $D^{2+} / D$ ، کم‌ترین  $E^\circ$  را دارد؛ بنابراین  $A^+$  بیشترین قدرت اکسندگی و  $D^{2+}$  کم‌ترین قدرت اکسندگی را دارد.
- گزینه ۲): فلزهایی می‌توانند با محلول هیدروکلریک اسید واکنش دهند که  $E^\circ$  منفی داشته باشند. به کمک اطلاعات داده‌شده، می‌توانیم  $E^\circ$  نیم‌سلول  $C^{2+} / C$  را به دست آوریم.

$$\text{emf} : E^\circ (\text{آند}) - E^\circ (\text{کاتد})$$

$$B - A : E^\circ (A^+ / A) - 0.34 = 0.46 \Rightarrow E^\circ (A^+ / A) = 0.8 \text{ V}$$

$$C - A : E^\circ (C^{2+} / C) - 0.8 = 0.24 \Rightarrow E^\circ (C^{2+} / C) = -0.44 \text{ V}$$

$E^\circ$  فلز C منفی است. از طرفی با توجه به نمودار،  $E^\circ$  فلز D نسبت به C کم‌تر می‌باشد و قطعاً منفی است؛ پس هر دو فلز می‌توانند با محلول HCl واکنش دهند.

گزینه ۳):  $E^\circ$  فلز C منفی است و در مقابل SHE، نقش آند را دارد:



با کاهش  $[H^+]$  در نیم‌سلول کاتدی، pH الکترولیت افزایش می‌یابد.

گزینه ۴):  $E^\circ$  فلز D نسبت به بقیه منفی‌تر است، یعنی قدرت کاهش‌دهنده فلز D نسبت به سایر فلزها بیشتر است؛ پس فلز D می‌تواند با یون سایر فلزها واکنش دهد.



قطعه‌ای از فلز آلومینیم به جرم ۴۰ گرم را در ۵۰۰ میلی لیتر محلول ۰/۵ مولار مس (II) سولفات وارد می‌کنیم. اگر پس از مدتی ۰/۳ مول الکترون بین گونه اکسند و کاهنده مبادله شود، جرم تیغه به چند گرم و غلظت محلول مس (II) سولفات به چند مولار خواهد رسید؟ (حجم محلول ثابت فرض شود و ۴۰ درصد فلز مس ایجاد شده روی تیغه آلومینیم رسوب می‌کند،  $\text{Al} = ۲۷, \text{Cu} = ۶۴ : \text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$ )

$$۰/۲ - ۴۴/۹۸ (۲)$$

$$۰/۲ - ۴۱/۱۴ (۱)$$

$$۰/۳ - ۴۴/۹۸ (۴)$$

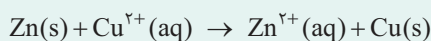
$$۰/۳ - ۴۱/۱۴ (۳)$$

### پاسخ: گزینه ۱

مسائل تغییر جرم تیغه

درس Box

وقتی یک تیغه فلزی را درون محلولی از یون‌های فلزی که قدرت کاهندگی کم‌تری نسبت به فلز سازنده تیغه دارد، قرار می‌دهیم، یک واکنش اکسایش - کاهش رخ می‌دهد که در آن جرم تیغه تغییر می‌کند. میزان تغییر جرم تیغه به دو عامل بستگی دارد: جرم تیغه‌ای که اکسایش می‌یابد و جرم فلزی که روی تیغه می‌شینه! (در سطح تیغه رسوب می‌کند). با توجه به مقدار این دو جرم، جرم تیغه در نهایت می‌تواند کاهش یا افزایش یابد. به طور مثال برای واکنش فلز روی با محلول مس (II) سولفات، می‌توان نوشت:



جرم Zn کم‌شده - جرم Cu که روی تیغه می‌نشیند = تغییر جرم تیغه

با توجه به این که به ازای مصرف ۱ مول فلز روی (۶۵ g)، ۱ مول فلز مس (۶۴ g) با جرم کم‌تر بر سطح تیغه می‌نشیند، جرم تیغه کاهش می‌یابد. اگر شمار الکترون مبادله شده برابر ۲ مول باشد و فرض کنیم، همه مس تولید شده روی تیغه می‌نشیند، خواهیم داشت:

به ازای مبادله ۲ مول الکترون، جرم تیغه ۱ گرم کاهش می‌یابد.  $\Rightarrow -۱ = ۶۴ - ۶۵ =$  تغییر جرم تیغه

جرم فلز نشسته روی تیغه + جرم تیغه مصرف شده - جرم اولیه تیغه = جرم نهایی تیغه

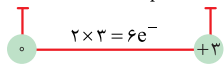
در مسائل مربوط به تغییر جرم تیغه، می‌توانیم از کسر تناسب به شکل زیر استفاده کنیم:

$$\frac{\text{تعداد}}{\text{مول}} = \frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{\text{جرم مولی فلز تیغه} - \left( \frac{\text{درصد چسبیدن}}{۱۰۰} \times \text{جرم مولی فلز تولید شده} \times \text{ضریب} \right)}$$

اگر همه فلز تولید شده روی تیغه رسوب کند، درصد چسبیدن برابر ۱۰۰ است و برای فلز تولید شده، از همان «جرم مولی  $\times$  ضریب» استفاده می‌کنیم، اما اگر در سؤالی گفته شود، فلان درصد از فلز تولید شده روی تیغه رسوب می‌کند، حتماً باید درصد چسبیده شدن را در محاسبات وارد کنیم.



معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



باید ببینیم با مبادله ۰/۳ مول الکترون، چند گرم Al مصرف شده و چند گرم Cu روی تیغه می‌نشیند:

$$\text{جرم مصرف شده Al} : ۰/۳ \text{ mol e}^{-} \times \frac{۲ \text{ mol Al}}{۶ \text{ mol e}^{-}} \times \frac{۲۷ \text{ g}}{۱ \text{ mol Al}} = ۲/۷ \text{ g}$$

$$\text{جرم نشسته روی تیغه Cu} : ۰/۳ \text{ mol e}^{-} \times \frac{۳ \text{ mol Cu}}{۶ \text{ mol e}^{-}} \times \frac{۶۴ \text{ g}}{۱ \text{ mol Cu}} \times \frac{۴۰}{۱۰۰} = ۳/۸۴ \text{ g}$$

به این ترتیب خواهیم داشت:

$$\text{جرم فلز نشسته روی تیغه} + \text{جرم تیغه مصرف شده} - \text{جرم اولیه تیغه} = ۴۰ - ۲/۷ + ۳/۸۴ = ۴۱/۱۴ \text{ g}$$

برای محاسبه غلظت نهایی محلول، باید ببینیم در ابتدا چند مول  $\text{Cu}^{2+}$  داشتیم و چند مول آن مصرف شده است:

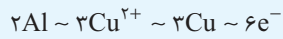
$$\text{مول اولیه } \text{Cu}^{2+} : ۰/۵ \frac{\text{mol}}{\text{L}} \times ۰/۵ \text{ L} = ۰/۲۵ \text{ mol}$$

$$\text{مول مصرف شده } \text{Cu}^{2+} : ۰/۳ \text{ mol e}^{-} \times \frac{۳ \text{ mol Cu}^{2+}}{۶ \text{ mol e}^{-}} = ۰/۱۵ \text{ mol}$$

پاسخ خیلی تشریحی ✓



$$\text{باقی مانده } \text{Cu}^{2+} \text{ مول} = 0/25 - 0/15 = 0/1 \text{ mol} = [\text{Cu}^{2+}]_{\text{نهایی}} = \frac{0/1 \text{ mol}}{0/5 \text{ L}} = 0/2 \text{ mol.L}^{-1}$$



$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تغییر جرم تیغه}}{\text{جرم مولی Al} \times \text{ضریب Al} - (\text{جرم مولی Cu} \times \text{ضریب Cu} \times \frac{\text{درصد چسبیدن}}{100})}{\text{ضریب}} = \frac{\text{تغییر غلظت مولی}}{\text{Cu}^{2+}}$$

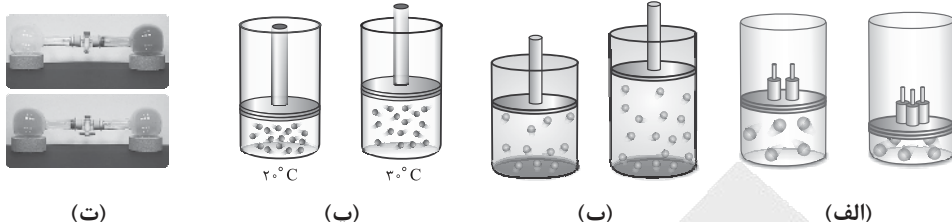
$$\Rightarrow \frac{0/3}{6} = \frac{x}{(3 \times 64 \times \frac{40}{100}) - (2 \times 27)} = \frac{y \times 0/5}{3}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = +1/14 \text{ (افزایش جرم تیغه)} \\ y = 0/3 \text{ (کاهش غلظت مولی محلول)} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \text{جرم نهایی تیغه} = 40 + 1/14 = 41/14 \text{ g} \\ \text{غلظت نهایی محلول} = 0/5 - 0/3 = 0/2 \end{cases}$$

په جور دیگه



با توجه به شکل‌های زیر، کدام عبارت در مورد رفتار گازها نادرست است؟



- ۱) شکل (الف) بیان می‌کند، در دمای ثابت، حجم یک نمونه گاز با فشار رابطه عکس دارد.
- ۲) شکل (ب) بیان می‌کند، در دما و فشار ثابت، رابطه خطی با شمار مول‌های آن دارد.
- ۳) شکل (پ) بیان می‌کند، در فشار ثابت، حجم یک نمونه گاز با افزایش دمای آن از  $20^{\circ}\text{C}$  تا  $30^{\circ}\text{C}$ ، یک و نیم برابر می‌شود.
- ۴) شکل (ت) بیان می‌کند، حجم یک نمونه گاز با حجم ظرف محتوی آن برابر است.

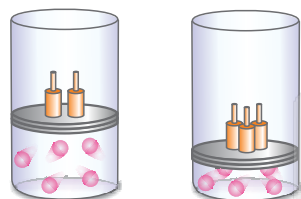
### پاسخ: گزینه ۳

### پاسخ خیلی تشریحی ✓

بر اساس قوانین گازها، می‌دانیم که با دو برابر شدن دما در مقیاس دمایی کلوین، حجم گاز نیز دو برابر می‌شود، اما *هواستون باشه* که اگر دما برحسب درجه سلسیوس یا یکاهای دیگر باشد، *اصلاً از این فیرا نیست!* یعنی اگر در فشار ثابت، دما در مقیاس دمایی کلوین  $a$  برابر شود، حجم گاز هم  $a$  برابر می‌شود، ولی اگر دما در مقیاس درجه سلسیوس،  $a$  برابر شود، حجم گاز  $a$  برابر نمی‌شود. (اگر  $a > 1$  باشد، حجم گاز زیاد می‌شود ولی به  $a$  برابر نمی‌رسد.)  
دمای یک گاز در فشار ثابت، از  $20\text{ K}$  به  $30\text{ K}$  برسد  $\leftarrow$  حجم گاز  $1/5$  برابر می‌شود.  
دمای یک گاز در فشار ثابت، از  $20^{\circ}\text{C}$  به  $30^{\circ}\text{C}$  برسد  $\leftarrow$  حجم گاز زیاد می‌شود، ولی به  $1/5$  برابر نمی‌رسد.  
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): برای مقدار معینی گاز در دمای ثابت (یعنی  $n$  و  $T$  ثابت)، حجم گاز با فشار آن رابطه معکوس دارد؛ یعنی با افزایش فشار، حجم گاز کم می‌شود. به عبارت دیگر، حجم یک گاز ( $V$ ) با معکوس فشار آن ( $1/P$ ) متناسب است.

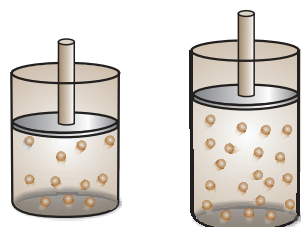
به طور مثال اگر در دمای ثابت، فشار مقدار معینی گاز را  $2$  برابر کنیم، حجم آن  $1/2$  برابر یعنی نصف می‌شود. شکل زیر، رابطه معکوس میان حجم یک نمونه گاز با فشار آن را در دمای ثابت نشان می‌دهد.



بخوانید «متناسب است با»

$$\text{در دمای ثابت برای مقدار معینی گاز (T و n ثابت)} \rightarrow V \propto \frac{1}{P}$$

گزینه (۲): در دما و فشار ثابت، حجم هر گازی به تعداد مول‌های آن بستگی دارد و این رابطه به صورت مستقیم و خطی است، به طوری که با افزایش شمار مول‌های گاز، حجم آن افزایش می‌یابد.  
شکل زیر، رابطه مستقیم و خطی میان تعداد مول‌های گازی با حجم آن را در دما و فشار ثابت نشان می‌دهد.



$$\text{در دما و فشار ثابت (P و T ثابت)} \rightarrow V \propto n$$

گزینه (۴): با توجه به شکل (ت) می‌توان دریافت که گازها، شکل و حجم ثابتی ندارند و شکل و آن‌ها، تابع ظرفی است که در آن قرار دارند (گازها همه فضای ظرف را اشغال می‌کنند و به شکل ظرف درمی‌آیند).



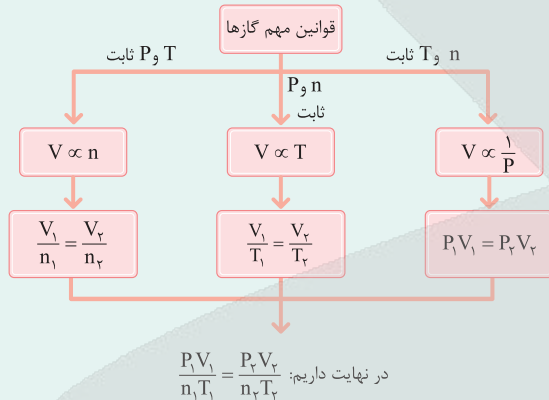
بادکنکی حاوی گاز هلیوم، از خلیج فارس در امتداد قائم تا ارتفاع سه کیلومتر اوج می‌گیرد. در کدام گزینه، تغییر حجم و دلیل علمی آن به درستی بیان شده است؟ (دمای سطح دریا را  $27^{\circ}\text{C}$  فرض کنید).

- (۱) حجم کاهش می‌یابد. - با افزایش ارتفاع، دما کاهش یافته، جنب‌وجوش و فاصله بین ذرات گاز کم می‌شود.
- (۲) حجم کاهش می‌یابد. - با افزایش ارتفاع، چگالی هلیوم کاهش می‌یابد.
- (۳) حجم افزایش می‌یابد. - با افزایش ارتفاع، دما و فشار گاز کاهش می‌یابد، ولی تأثیر کاهش فشار غالب‌تر بوده و فاصله بین ذرات گاز زیاد می‌شود.
- (۴) حجم تغییر نمی‌کند. - با افزایش ارتفاع، دما و فشار گاز کاهش می‌یابد و تأثیر همدیگر را خنثی می‌کنند.

## پاسخ: گزینه ۳

روابط کمی گازها

درس‌Box



برای توصیف یک نمونه گاز، افزون بر مقدار، باید دما و فشار آن نیز مشخص باشد، به طوری که حجم گاز با مقدار و دمای آن رابطه مستقیم و با فشار آن رابطه معکوس دارد.

حجم یک نمونه گاز ( $V$ )، به دما ( $T$ ) و فشار ( $P$ ) آن بستگی دارد، به طوری که با دما رابطه مستقیم و با فشار، رابطه عکس دارد:

$$V \propto \frac{T}{P}$$

با توجه به شکل کتاب درسی، با افزایش ارتفاع تا حدود ۳ km، فشار هوا از ۱ atm در سطح زمین، به فشار ۰.۷ atm می‌رسد، یعنی ۳۰ درصد کاهش می‌یابد، هم‌چنین دمای هوا به ازای هر ۱ km افزایش ارتفاع، ۶ K یا  $6^{\circ}\text{C}$  کم می‌شود، یعنی تا ارتفاع ۳ km، دمای هوا  $18\text{ K} = 3 \times 6$  کاهش خواهد یافت؛ بنابراین درصد تغییرات دمای هوا تا ارتفاع ۳ km از سطح زمین برابر است با:

$$\text{درصد تغییرات دما} = \frac{18}{27 + 273} \times 100 = \frac{18}{300} \times 100 = 6\%$$

در نتیجه با افزایش ارتفاع از سطح زمین، دما و فشار هوا هر دو کاهش می‌یابند، اما چون تأثیر و میزان کاهش فشار بیشتر است؛ بنابراین حجم بادکنک حاوی گاز هلیوم افزایش خواهد یافت:

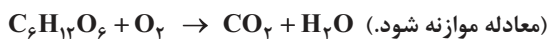
$$V \propto \frac{T \downarrow}{P \downarrow \downarrow} \Rightarrow V \uparrow$$

در مورد گزینه (۲) نیز دقت کنید که حجم و چگالی با یکدیگر رابطه عکس دارند و چون جرم نمونه با افزایش ارتفاع ثابت می‌ماند، در نتیجه با کاهش چگالی گاز هلیوم، باید حجم بادکنک افزایش یابد که متأسفانه برعکس رو گفته!

پاسخ خیلی تشریحی ✓



فرد بالغی دچار مشکل تنفسی است. اگر این فرد در هر بار تنفس، ۴ / ۰ لیتر هوا را وارد ریه‌هایش کند و همهٔ اکسیژن وارد شده به بدن او در مدت ۳ ساعت، سبب اکسایش ۴۳۲ گرم گلوکز مطابق واکنش زیر شود، این فرد در مدت یک دقیقه به طور میانگین چند بار نفس می‌کشد؟ (حجم مولی گازها را برابر ۲۰ لیتر در نظر بگیرید و ۲۰٪ حجم هوا را اکسیژن تشکیل می‌دهد،  $O = ۱۶, C = ۱۲, H = ۱: g.mol^{-1}$ )



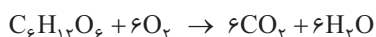
### پاسخ: گزینهٔ ۴



Hint

ابتدا معادلهٔ واکنش انجام شده را موازنه کن، سپس حجم گاز  $O_2$  مورد نیاز برای اکسایش ۴۳۲ گرم  $C_6H_{12}O_6$  مطابق معادلهٔ موازنه شده را به دست بیاور. در مرحلهٔ بعد با توجه به این که ۲۰٪ هوا را گاز  $O_2$  تشکیل می‌دهد، حجم هوای وارد شده به ریه‌های فرد را در مدت ۳ ساعت یا ۱۸۰ دقیقه محاسبه کن. در نهایت حجم هوای وارد شده به ریه‌های فرد را در مدت یک دقیقه و شمار تنفس‌های او را در مدت یک دقیقه حساب کن.

گام اول: معادلهٔ واکنش انجام شده را موازنه می‌کنیم:



گام دوم: حجم گاز اکسیژن ( $O_2$ ) مورد نیاز برای اکسایش ۴۳۲ گرم گلوکز ( $C_6H_{12}O_6$ ) در مدت ۳ ساعت رو می‌ساییم.

$$432 \text{ g } C_6H_{12}O_6 \times \frac{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6}{180 \text{ g } C_6H_{12}O_6} \times \frac{6 \text{ mol } O_2}{1 \text{ mol } C_6H_{12}O_6} \times \frac{20 \text{ L } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 288 \text{ L } O_2$$

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{حجم}}{\text{حجم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{432}{1 \times 180} = \frac{x}{6 \times 20} \Rightarrow x = 288 \text{ L } O_2$$

گام سوم: کل حجم هوای وارد شده به ریه‌های فرد را در مدت ۳ ساعت به دست می‌آوریم:

با توجه به این که ۲۰٪ از حجم هوا را گاز  $O_2$  تشکیل می‌دهد، داریم:

$$288 \text{ L } O_2 \times \frac{100 \text{ L هوا}}{20 \text{ L } O_2} = 1440 \text{ L هوا}$$

حجم هوای وارد شده به ریه‌های فرد و سپس تعداد تنفس‌های وی را در مدت یک دقیقه حساب می‌کنیم:

$$\text{هوا } 8 \text{ L} = 1 \text{ min} \times \frac{1 \text{ h}}{60 \text{ min}} \times \frac{1440 \text{ L هوا}}{3 \text{ h}}$$

$$\text{تنفس } 20 = 8 \text{ L هوا} \times \frac{\text{یک تنفس}}{0.4 \text{ L هوا}}$$



په‌چور دیگه



کدام موارد از مطالب زیر درباره نیتروژن، درست است؟

- الف) پس از اکسیژن، فراوان ترین جزء هواکره بوده و از نظر شیمیایی، غیرفعال و واکنش ناپذیر است.  
 ب) در صنعت، یک مول از آن در شرایط STP با ۳ مول هیدروژن واکنش داده و ۲ مول آمونیاک تولید می کند.  
 ج) در دمای اتاق با گاز اکسیژن واکنش نمی دهد و با افزایش دمای سیستم تا  $100^{\circ}\text{C}$ ، به گاز NO تبدیل می شود.  
 د) مدل فضاپرکن آن مشابه با مدل فضاپرکن مولکول ید است و در ساختار لوویس آن، چهار الکترون غیرپیوندی وجود دارد.

- ۱) الف - د  
 ۲) فقط د  
 ۳) ب - ج  
 ۴) فقط ب

### پاسخ: گزینه ۲

فقط عبارت «د» درست است.

پاسخ خیلی تشریحی ✓

بررسی عبارت‌ها:

الف) گاز نیتروژن فراوان ترین جزء سازنده هواکره بوده و در مقایسه با اکسیژن، از نظر شیمیایی غیرفعال و واکنش ناپذیر است. اکسیژن، دومین گاز فراوان هواکره محسوب می شود.

ب) در تولید آمونیاک ( $\text{NH}_3$ ) در صنعت (فرایند هابر)، حتی در شرایط بهینه (دما و فشار بالا و در حضور کاتالیز آهنی) نیز چون واکنش برگشت پذیر است، همه واکنش دهنده‌ها نمی توانند به فرآورده تبدیل شوند و در ظرف واکنش، مخلوطی از هر سه گاز  $\text{N}_2$ ،  $\text{H}_2$  و  $\text{NH}_3$  وجود خواهد داشت. هم چنین حواستان باشد که حتی در شرایط اتاق (دمای  $25^{\circ}\text{C}$  و فشار  $1\text{ atm}$ )، این واکنش انجام ناپذیر بوده و  $\text{NH}_3$  تولید نمی شود، چه برسد به شرایط STP (دمای  $0^{\circ}\text{C}$  و فشار  $1\text{ atm}$ ) و دمای پایین تر! بنابراین در شرایط STP نیز واکنشی انجام نشده و  $\text{NH}_3$  تولید نمی شود!

ج) گاز نیتروژن ( $\text{N}_2$ ) به عنوان اصلی ترین جزء سازنده هواکره، واکنش پذیری بسیار کمی دارد و به طور معمول با اکسیژن هوا ( $\text{O}_2$ ) واکنش نمی دهد و این گازها تنها در هنگام رعد و برق و هم چنین درون موتور خودرو و در دمای خیلی بالا می توانند با یکدیگر واکنش داده و اکسیدهای نیتروژن را تولید کنند؛ پس دمای  $100^{\circ}\text{C}$  برای واکنش این دو گاز، *متأسفانه کافی و پس نیست!* در فصل ۴ شیمی دوازدهم می خوانیم که دمای موتور خودروها بیشتر از  $1000^{\circ}\text{C}$  است.

د) مدل فضاپرکن نیتروژن ( $\text{N}_2$ ) مشابه مدل فضاپرکن ید ( $\text{I}_2$ ) به صورت مقابل است:



۴ الکترون ناپیوندی

هم چنین در ساختار لوویس  $\text{N}_2$ ، ۲ جفت یا ۴ الکترون ناپیوندی وجود دارد:



با توجه به فرایند هابر، کدام مورد درست است؟

- ۱) چالش بزرگ هابر، جداسازی واکنش دهنده‌های مصرف‌نشده از مخلوط واکنش بود.
- ۲) حضور کاتالیزگر منجر به انجام شدن این واکنش در دما و فشار اتاق می‌شود.
- ۳) برای جداسازی آمونیاک، مخلوط گازها تا دمای حدود  $3^{\circ}\text{C}$  سرد می‌شود.
- ۴) فرآورده واکنش، یک کود شیمیایی است که به طور مستقیم به خاک تزریق می‌شود.

### پاسخ: گزینه ۴

### درس Box

● گاز  $\text{N}_2$  واکنش‌پذیری ناچیزی دارد. اما امروزه در صنعت، مواد گوناگونی از آن تهیه می‌کنند که یکی از مهم‌ترین آن‌ها، آمونیاک است.

● فریتس هابر برای تهیه آمونیاک از گازهای  $\text{N}_2$  و  $\text{H}_2$ ، واکنشی را مبنای پژوهش خود قرار داد:



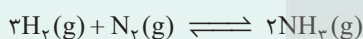
● واکنش در دما و فشار اتاق انجام نمی‌شود: هابر با انجام آزمایش‌های مختلف میان  $\text{N}_2$  و  $\text{H}_2$  در دماها و فشارهای مختلف، در نهایت دریافت که با عبور دادن مخلوط این گازها در دما و فشار مناسب از روی کاتالیزگر مناسب (یک ورقه آهنی) مقدار قابل توجهی آمونیاک تولید می‌شود.

● چالش‌های هابر برای تهیه آمونیاک جداسازی آمونیاک از مخلوط  $\text{N}_2$  و  $\text{H}_2$ : در این فرایند، همه واکنش دهنده‌ها مصرف نمی‌شوند؛ بنابراین در انتهای واکنش، مخلوطی از گازهای  $\text{N}_2$  و  $\text{H}_2$  و آمونیاک وجود دارد. او با بررسی نقطه جوش این سه ماده، دریافت با سرد کردن مخلوط واکنش تا دمای جوش  $\text{NH}_3$ ، آمونیاک مایع شده و بنابراین می‌توان آمونیاک را از مخلوط جداسازی کرد.

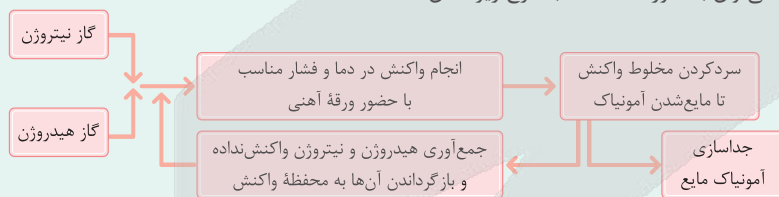
● مقایسه نقطه جوش آمونیاک،  $\text{N}_2$  و  $\text{H}_2$ :  $\text{H}_2(-253^{\circ}\text{C}) < \text{N}_2(-196^{\circ}\text{C}) < \text{NH}_3(-33^{\circ}\text{C})$

● توجه دما را به هیچ‌وجه نباید پایین‌تر از دمای جوش نیتروژن و هیدروژن آورد، چون این‌طور این دو گاز نیز مایع شده و با آمونیاک مایع قاطی پاتی می‌شوند.

در فرایند هابر،  $\text{N}_2$  و  $\text{H}_2$  واکنش نداده را بازگردانی کرده و به ظرف اصلی واکنش برمی‌گردانند تا دوباره با هم واکنش دهند.



● فرایند هابر را می‌توان به صورت خلاصه، با طرح زیر نشان داد:



فرآورده فرایند هابر یعنی آمونیاک را می‌توان به عنوان کود، به طور مستقیم به خاک تزریق کرد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱): دقت کنید که بزرگ‌ترین چالش هابر، یافتن شرایط بهینه برای انجام واکنش بود، به طوری که واکنش در دما و فشار اتاق انجام نمی‌شد.

چالش دیگر هابر، جدا کردن فرآورده واکنش (آمونیاک) از مخلوط واکنش بود.

گزینه ۲): در دما و فشار اتاق، این واکنش حتی در حضور کاتالیزگر، انجام‌ناپذیر است! شرایط بهینه برای انجام این واکنش، دما و فشار بالا با حضور یک کاتالیزگر مناسب (ورقه آهنی) است. در شیمی دوازدهم می‌خوانیم که دما و فشار بهینه فرایند هابر به ترتیب  $450^{\circ}\text{C}$  و  $200\text{ atm}$  است.

گزینه ۳): هاستون باشه که در فرایند هابر، باید فرآورده (آمونیاک) را از مخلوط جدا کنیم که برای این کار (مایع شدن آمونیاک)، باید دما را کمی پایین‌تر از نقطه جوش آمونیاک (حدود  $34^{\circ}\text{C}$ ) بیاوریم. در دمای  $3^{\circ}\text{C}$ ، آمونیاک هم‌چنان به صورت گاز است و در این دما، نمی‌توان آمونیاک را از مخلوط واکنش جدا کرد.

### پاسخ خیلی تشریحی ✓



جدول زیر داده‌هایی را دربارهٔ خودروهای یک کشور توسعه یافته نشان می‌دهد.

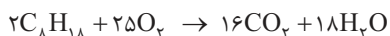
E	D	C	B	A	برچسب آلاینده‌ی خودرو
۱۷۰ - ۱۹۰	۱۵۵ - ۱۷۰	۱۴۰ - ۱۵۵	۱۲۰ - ۱۴۰	کم‌تر از ۱۲۰	گسترهٔ انتشار گاز کربن دی‌اکسید (گرم) به ازای طی یک کیلومتر

اگر یک خودرو به طور متوسط در یک ماه، ۱۵۰۰ کیلومتر مسافت طی کرده و به ازای هر صد کیلومتر، ۴۰ مول بنزین ( $C_8H_{18}$ ) مصرف کند، با توجه به کربن دی‌اکسید تولیدشده، برچسب آلاینده‌ی خودرو کدام است؟ (فرض کنید فقط ۲۰٪ از بنزین واردشده به موتور به طور کامل می‌سوزد و فراورده‌ها از آگزوز بدون تغییر خارج می‌شوند.)

A (۱)      B (۲)      C (۳)      E (۴)

### پاسخ: گزینهٔ ۱

گام اول: معادلهٔ واکنش سوختن کامل بنزین ( $C_8H_{18}$ ) را نوشته و موازنه می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به این که خودروی مورد نظر، به ازای هر ۱۰۰ کیلومتر، ۴۰ مول بنزین مصرف می‌کند و همچنین با توجه به این که فقط ۲۰٪ از بنزین واردشده به موتور، به طور کامل می‌سوزد، مول بنزین مصرف شده به ازای هر ۱ km مسافت طی شده توسط این خودرو را به دست می‌آوریم:

$$\text{بنزین mol} = \frac{۴۰ \text{ mol بنزین}}{۱۰۰ \text{ km مسافت طی شده}} \times \frac{۲۰}{۱۰۰} = ۰/۰۸ \text{ mol بنزین}$$

مسافت طی شده

گام سوم: جرم گاز کربن دی‌اکسید ( $CO_2$ ) تولیدشده به ازای سوختن کامل ۰/۰۸ مول بنزین ( $C_8H_{18}$ ) (مقدار گاز  $CO_2$  تولیدشده به ازای طی ۱ km) را به دست می‌آوریم:



$$\frac{\text{مول}}{\text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{۰/۰۸}{۲} = \frac{x}{16 \times 44} \Rightarrow x = 28/16 \text{ g } CO_2$$

با توجه به این که مقدار گاز  $CO_2$  انتشار یافته توسط این خودرو به هواکره (برحسب گرم) به ازای طی یک کیلومتر، کم‌تر از ۱۲۰ است، برچسب آلاینده‌ی خودروی مورد نظر، A می‌باشد.

**مشاوره** فیلوی وقت‌ها داده‌هایی در سؤال‌های کنکور وجود دارند که برای حل سؤال و رسیدن به پاسخ، مورد نیاز نبوده و اضافی‌اند! تنها کافی است که این داده‌ها حواس شما را پرت نکنند و حل تست، شما را به شک نیندازد. به عنوان مثال در این سؤال، مسافت طی شده توسط خودرو در مدت یک ماه، برای حل سؤال، هیچ پوره به دردمون نمی‌فوره!

### پاسخ خیلی تشریحی ✓



کدام عبارت نادرست است؟

۱۰۰

- ۱) واکنش‌های شیمیایی و برهم‌کنش‌های فیزیکی میان بخش‌های گوناگون زمین، بیانگر پویابودن آن از دیدگاه شیمیایی است.
- ۲) درشت‌مولکول‌های موجود در زیست‌کره، تجزیه شده و به صورت مولکول‌های کوچک وارد بخش‌های دیگر زمین می‌شوند.
- ۳) به همان میزان که مواد گوناگون از سنگ‌کره وارد آب‌کره می‌شود، همان مقدار آب نیز از دریاها و اقیانوس‌ها خارج می‌شود.
- ۴) حجم آبی که از ذوب‌شدن کوه‌های یخی تولید می‌شود، بسیار بیشتر از مجموع حجم آب‌های زیرزمینی و جاری است.

### پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

جرم کل مواد حل شده در آب‌های کره زمین تقریباً ثابت است. از آن‌جا که سالانه میلیاردها تن مواد گوناگون از سنگ‌کره وارد آب‌کره می‌شوند؛ پس باید همین مقدار ماده (از مواد حل شده در آب‌کره؛ نه از خود آب‌ها!) نیز از آب‌کره و به‌ویژه آب دریاها و اقیانوس‌ها خارج شود. بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه ۱): کره زمین را می‌توان سامانه‌ای بزرگ در نظر گرفت که شامل چهار بخش هواکره، آب‌کره، سنگ‌کره و زیست‌کره است. درون این سامانه و بین این چهار بخش، پیوسته مواد گوناگونی مبادله می‌شود؛ به همین دلیل گفته می‌شود زمین از دیدگاه شیمیایی پویاست؛ یعنی بخش‌های گوناگون آن با یکدیگر برهم‌کنش‌های فیزیکی و شیمیایی دارند.

گزینه ۲): زیست‌کره شامل جانداران روی کره زمین است که در واکنش‌های آن‌ها، درشت‌مولکول‌ها نقش اساسی دارند. درشت‌مولکول‌های موجود در زیست‌کره بر اثر واکنش‌های شیمیایی تجزیه شده و به صورت مولکول‌های کوچک‌تری وارد آب‌کره، هواکره یا سنگ‌کره (سایر بخش‌های کره زمین) می‌شوند.

نکته



گزینه ۴): کوه‌های یخ، ۲/۱۵٪ از کل منابع آب کره زمین را تشکیل می‌دهند، در حالی که آب‌های زیرزمینی و جاری، کم‌تر از ۰/۶۵٪ از کل منابع آب را به خود اختصاص می‌دهند؛ در نتیجه می‌توان گفت که حجم آب حاصل از ذوب‌شدن کوه‌های یخ، بیشتر از مجموع حجم آب‌های زیرزمینی و جاری است.



کدام عبارت درست است؟

- ۱) آب دریاها مخلوطی همگن از انواع یون هاست.
- ۲) آب مقطر، آبی است که طی فرایند تقطیر، تقریباً همه یون‌ها و مولکول‌های حل شده در آن حذف شده است.
- ۳) از انحلال یک مول  $\text{NaNO}_3$  و یک مول  $\text{Na}_2\text{O}$  در آب، در مجموع ۵ مول یون تولید می‌شود.
- ۴) وجود یون فلوئورید باعث تخریب مینای دندان شده و باید از آب آشامیدنی حذف شود.

### پاسخ: گزینه ۲

پاسخ خیلی تشریحی ✓

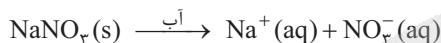
اگر مقداری آب شور را حرارت دهیم، آب موجود در آن (برخلاف نمک‌های موجود در آب) تبخیر می‌شود. حالاً که بخار آب حاصل را سرد و مایع کنیم، آب تقریباً خالص به دست می‌آید. به این فرایند، تقطیر و فرآورده حاصل را آب مقطر می‌گویند. تهیه آب مقطر از فرایند تقطیر توسط دانشمندان در واقع از فرایند تشکیل برف و باران کپی برداری شده! هنگام تشکیل برف و باران، تقریباً همه مواد حل شده در آب از آن جدا می‌شوند، به همین دلیل آب باران در هوای پاک، تقریباً خالص است.

آب ناخالص  $\xrightarrow{\text{تقطیر}}$  آب مقطر (آب تقریباً خالص)

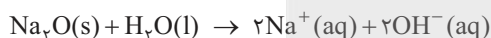
بررسی سایر گزینه‌ها:

گزینه (۱): دقت کنید که آب دریاها ناخالص است؛ یعنی دریاها مخلوطی همگن از انواع یون‌ها و مولکول‌ها (نه فقط یون‌ها!) در آب هستند.

گزینه (۳): هر ۱ مول  $\text{NaNO}_3$  با انحلال در آب، به ۲ مول یون تفکیک می‌شود:



از طرفی همان‌طور که در فصل اول شیمی دوازدهم خواندیم، با حل شدن هر مول اکسید فلز قلیایی در آب، ۲ مول کاتیون آن فلز و ۲ مول یون هیدروکسید (در مجموع ۴ مول یون) حاصل می‌شود:



بنابراین با انحلال یک مول  $\text{NaNO}_3$  و یک مول  $\text{Na}_2\text{O}$  در آب، در مجموع ۶ مول یون حاصل می‌شود؛ نه ۵ مول یون!

گزینه (۴): اتفاقاً برعکس! به آب آشامیدنی مقدار بسیار کمی یون فلوئورید ( $\text{F}^-$ ) اضافه می‌کنند. وجود این یون باعث حفظ سلامت دندان‌ها می‌شود.



نسبت شمار اتم‌های نافلزی به شمار یون‌های فلزی در آلومینیم سولفات، ۵ برابر نسبت شمار آنیون به کاتیون در



کدام ترکیب است؟

- (۱) کلسیم نیترات
- (۲) آمونیوم فسفات
- (۳) اسکاندیم کربنات
- (۴) منیزیم سولفات

**مشاوره** آشنایی با نام یون‌های چنداتی و نحوه نام‌گذاری ترکیب‌های یونی، هر ساله مورد توجه طراحان کنکور سراسری بوده و به طور مستقیم و غیرمستقیم مورد پرسش قرار گرفته‌اند؛ بنابراین تسلط بر آن‌ها واجب اندر وایه!

**پاسخ: گزینه ۳**



در جدول‌های زیر، لیست همه یون‌های چنداتی که در گوشه و کنار کتاب درسی وجود دارد و شما باید بلد باشید رو براتون حاضر و آماده آورده‌ایم:

نام یون	فرمول یون	نام یون	فرمول یون
آمونیم	$NH_4^+$	سولفات	$SO_4^{2-}$
هیدروکسید	$OH^-$	فسفات	$PO_4^{3-}$
نیترات	$NO_3^-$	کربنات	$CO_3^{2-}$
پرکلرات	$ClO_4^-$		

نام یون	فرمول یون	نام یون	فرمول یون
هیدروژن کربنات	$HCO_3^-$	اتانوات (استات)	$CH_3COO^-$
سیانید	$CN^-$	سیلیکات	$SiO_4^{4-}$
متانوات (فورمات)	$HCOO^-$	برمنگنات	$MnO_4^-$
بنزوات	$C_6H_5COO^-$		

ابتدا نسبت شمار اتم‌های نافلزی به شمار یون‌های فلزی را در آلومینیم سولفات ( $Al_7(SO_4)_3$ )، تعیین می‌کنیم:

$$Al_7(SO_4)_3 \Rightarrow \frac{\text{شمار اتم‌های نافلزی (S, O)}}{\text{شمار یون‌های فلزی (Al^{3+})}} = \frac{15}{7} = 7/5$$

حال نسبت شمار آنیون به کاتیون را در ترکیب‌های داده شده در گزینه‌ها، یکی یکی! به دست می‌آوریم: برای رسیدن به خواسته سؤال، نسبت شمار آنیون به کاتیون در ترکیب مورد نظر باید برابر  $1/5 = 7/5$  باشد.

گزینه (۱):  $Ca(NO_3)_2 \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{2}{1}$  کلسیم نیترات

گزینه (۲):  $(NH_4)_3PO_4 \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{1}{3}$  آمونیوم فسفات

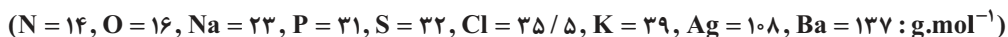
گزینه (۳):  $Sc_2(CO_3)_3 \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{3}{2} = 1/5$  اسکاندیم کربنات ✓

گزینه (۴):  $MgSO_4 \Rightarrow \frac{\text{شمار آنیون}}{\text{شمار کاتیون}} = \frac{1}{1} = 1$  منیزیم سولفات

**پاسخ خیلی تشریحی ✓**



در ظرف های A و B به ترتیب محلول های نقره نیترات و پتاسیم سولفات وجود دارد. افزودن کدام ماده به هر دو ظرف منجر به تشکیل رسوب می شود و نسبت جرم مولی رسوب تشکیل شده در ظرف A به جرم مولی رسوب تشکیل شده در ظرف B کدام است؟



- ۱) سدیم کلرید - ۷۵ / ۰  
 ۲) باریم کلرید - ۷۵ / ۰  
 ۳) سدیم کلرید - ۶۲ / ۰  
 ۴) باریم کلرید - ۶۲ / ۰

### پاسخ: گزینه ۴

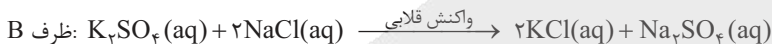
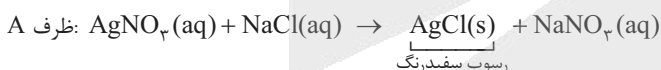
برای شناسایی یون های موجود در محلول های آبی، می توان محلول یک ترکیب یونی دیگر را به محلول اولیه اضافه کرد، به گونه ای که یون مورد نظر، تشکیل رسوب (ماده نامحلول) دهد.



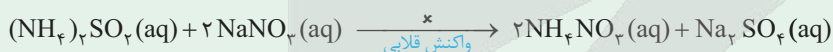
رنگ رسوب ایجاد شده	واکنش انجام شده	آنیونی که باید اضافه کرد	هدف شناسایی یون
AgCl (سفیدرنگ)	$AgNO_3(aq) + NaCl(aq) \rightarrow AgCl(s) + NaNO_3(aq)$	$Cl^-(aq)$	$Ag^+(aq)$
$Ca_3(PO_4)_2$ (سفیدرنگ)	$2Na_3PO_4(aq) + 3CaCl_2(aq) \rightarrow Ca_3(PO_4)_2(s) + 6NaCl(aq)$	$PO_4^{3-}(aq)$	$Ca^{2+}(aq)$
$BaSO_4$ (سفیدرنگ)	$Na_2SO_4(aq) + BaCl_2(aq) \rightarrow BaSO_4(s) + 2NaCl(aq)$	$SO_4^{2-}(aq)$	$Ba^{2+}(aq)$

افزودن سدیم کلرید (NaCl) به ظرف حاوی نقره نیترات ( $AgNO_3$ )، منجر به تشکیل رسوب سفیدرنگ نقره کلرید (AgCl) می شود، در حالی که با اضافه کردن NaCl به ظرف حاوی پتاسیم سولفات ( $K_2SO_4$ )، رسوبی حاصل نمی شود؛ بنابراین گزینه های (۱) و (۳) پُر!

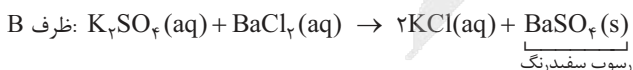
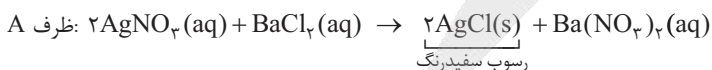
### پاسخ خیلی تشریحی ✓



در واکنش هایی به فرم  $AB + CD \rightarrow CB + AD$ ، حتماً یکی از فرآورده ها باید رسوب (s) یا آب ( $H_2O(l)$ ) یا گاز (g) باشد، در غیر این صورت، واکنش نشان داده شده به هیچ وجه انجام پذیر نبوده و یک واکنش تقلبی است. به طور مثال واکنش زیر، یک واکنش قلابی و سرکاری! است، زیرا در فرآورده های آن، آب، رسوب و یا گاز وجود ندارد:



اما افزودن باریم کلرید ( $BaCl_2$ ) به هر دو ظرف منجر به تشکیل رسوب می شود، به طوری که در ظرف حاوی نقره نیترات ( $AgNO_3$ ) رسوب سفیدرنگ نقره کلرید (AgCl) و در ظرف حاوی پتاسیم سولفات ( $K_2SO_4$ )، رسوب سفیدرنگ باریم سولفات ( $BaSO_4$ ) تولید می شود:



در نهایت نسبت جرم مولی رسوب تشکیل شده در ظرف A (AgCl) به جرم مولی رسوب تشکیل شده در ظرف B ( $BaSO_4$ ) را محاسبه می کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \text{جرم مولی } AgCl &= 108 + 35.5 = 143.5 \text{ g.mol}^{-1} \\ \text{جرم مولی } BaSO_4 &= 137 + 32 + 4(16) = 233 \text{ g.mol}^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow \frac{\text{جرم مولی } AgCl}{\text{جرم مولی } BaSO_4} = \frac{143.5}{233} \approx 0.62$$



۱۰۴

درستی یا نادرستی عبارتهای زیر به ترتیب کدام است؟

- در ساختار آمونیوم کربنات فقط پیوند اشتراکی وجود دارد.
- فرمول شیمیایی کبالت (II) نیترات، به صورت  $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$  است.
- ساختار لوویس و مدل فضاپرکن یونهای  $\text{SiO}_4^{4-}$ ،  $\text{SO}_4^{2-}$ ،  $\text{PO}_4^{3-}$  کاملاً مشابه هم است.
- در یک واحد فرمولی از آمونیوم سولفات، دوازده جفت الکترون ناپیوندی وجود دارد.

- (۱) نادرست - نادرست - درست - درست  
 (۲) نادرست - نادرست - نادرست - درست  
 (۳) نادرست - درست - درست - نادرست  
 (۴) درست - درست - نادرست - درست

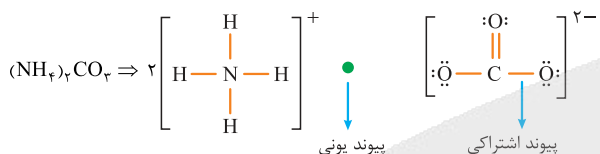
پاسخ: گزینه ۱

پاسخ خیلی تشریحی ✓

عبارتهای اول و دوم، نادرست و عبارتهای سوم و چهارم، درست‌اند.

بررسی عبارت‌ها:

- در ساختار ترکیب‌های یونی دارای یون‌های چنداتی، هر دو نوع پیوند اشتراکی (کووالانسی) و یونی وجود دارد؛ پیوند اشتراکی بین اتم‌های سازنده یون چنداتی و پیوند یونی بین کاتیون و آنیون! ببینید:

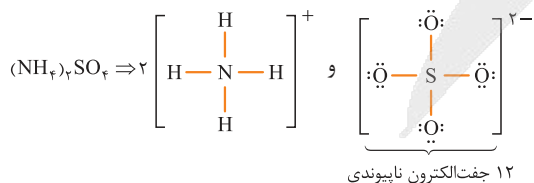


- حرف O در نماد شیمیایی کبالت (Co) باید به صورت کوچک نوشته می‌شود! فرمول شیمیایی درست کبالت (II) نیترات به صورت  $\text{Co}(\text{NO}_3)_2$  است.

- ساختار لوویس و مدل فضاپرکن یونهای  $\text{SiO}_4^{4-}$  و  $\text{PO}_4^{3-}$ ،  $\text{SO}_4^{2-}$  مشابه است. ببینید:

	$\left[ \begin{array}{c} \text{:}\ddot{\text{O}}\text{:} \\   \\ \text{:}\ddot{\text{O}}-\text{S}-\ddot{\text{O}}\text{:} \\   \\ \text{:}\ddot{\text{O}}\text{:} \end{array} \right]^{2-}$	$\text{SO}_4^{2-}$
	$\left[ \begin{array}{c} \text{:}\ddot{\text{O}}\text{:} \\   \\ \text{:}\ddot{\text{O}}-\text{P}-\ddot{\text{O}}\text{:} \\   \\ \text{:}\ddot{\text{O}}\text{:} \end{array} \right]^{3-}$	$\text{PO}_4^{3-}$
	$\left[ \begin{array}{c} \text{:}\ddot{\text{O}}\text{:} \\   \\ \text{:}\ddot{\text{O}}-\text{Si}-\ddot{\text{O}}\text{:} \\   \\ \text{:}\ddot{\text{O}}\text{:} \end{array} \right]^{4-}$	$\text{SiO}_4^{4-}$

- در هر واحد فرمولی از آمونیوم سولفات  $((\text{NH}_4)_2\text{SO}_4)$ ، ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی در ساختار یون سولفات وجود دارد:

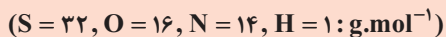




از واکنش ۸ گرم هیدروکسید فلزی از گروه اول جدول دوره‌ای با سولفوریک اسید ( $H_2SO_4$ )،  $14/2$  گرم از نمک

MOH

سولفات این فلز به دست می‌آید. جرم  $0/4$  مول از نیترات این فلز چند گرم است؟



$$11/8 (2)$$

$$40/4 (1)$$

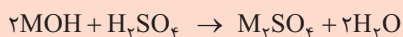
$$34 (4)$$

$$43/2 (3)$$

**مشاوره** یکی از مراحل اصلی در حل بسیاری از سؤالات شیمی انجام محاسبات است؛ بنابراین لازمه که به خوبی به تکنیک‌های محاسباتی مسلط بوده و با حل تعداد تست کافی، این تکنیک‌ها را تمرین کنید.

**پاسخ: گزینه ۴**

گام اول: فلزهای قلیایی، کاتیون‌هایی با بار  $M^+$  تشکیل می‌دهند. معادله واکنش هیدروکسید فلز قلیایی مورد نظر (MOH) با سولفوریک اسید ( $H_2SO_4$ ) را نوشته و موازنه می‌کنیم:



گام دوم: با توجه به این که از واکنش ۸ گرم MOH با  $H_2SO_4$ ،  $14/2$  گرم نمک  $M_2SO_4$  تولید می‌شود، جرم مولی فلز M را به دست می‌آوریم:

$$\frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} = \frac{\text{جرم}}{\text{جرم مولی} \times \text{ضریب}} \Rightarrow \frac{4}{2 \times (M + 17)} = \frac{14/2}{1 \times (2M + 32 + 4(16))}$$

$$\Rightarrow \frac{4}{2M + 34} = \frac{7/1}{2M + 96} \Rightarrow M = 23$$

در بعضی از مسائل برای پیدا کردن یک مجهول (x)، به دو کسر می‌رسیم که آن مجهول در هر دو کسر وجود دارد. روش معمول برای پیدا کردن مجهول مورد نظر، اینه که طرفین وسطین کنیم، ولی بعضی وقتا به عددهای بزرگی برمی‌خوریم که ممکنه ما رو اذیت کنه! در این گونه مواقع می‌توان از تکنیک ساده‌تری هم استفاده کرد. در درس ریاضی می‌خوانید که اگر دو کسر با هم برابر باشند، می‌توان صورت‌های دو کسر را با هم و مخرج‌های آن‌ها را با هم جمع یا تفریق کرد و کسری برابر با آن‌ها به دست آورد؛ یعنی این پوری:

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a+c}{b+d} = \frac{a-c}{b-d} = \frac{a}{b} = \frac{c}{d}$$

$$\frac{4}{2M + 34} = \frac{7/1}{2M + 96} \Rightarrow \frac{7/1 - 4}{(2M + 96) - (2M + 34)} = \frac{3/1}{62} = \frac{1}{20} \Rightarrow \frac{4}{2M + 34} = \frac{1}{20}$$

$$\Rightarrow 2M + 34 = 80 \Rightarrow 2M = 46 \Rightarrow M = 23$$

گام سوم: جرم  $0/4$  مول نیترات فلز M ( $MNO_3$ ) را به دست می‌آوریم:

$$MNO_3 \text{ جرم مولی} = 23 + 14 + 3(16) = 85 g.mol^{-1}$$

$$0/4 \text{ mol } MNO_3 \times \frac{85 g MNO_3}{1 \text{ mol } MNO_3} = 34 g MNO_3$$

اگر  $0/15$  مول از کاتیون یک فلز دوظرفیتی در واکنش کامل با آنیون فسفات، ترکیبی به جرم  $13/1$  گرم تشکیل دهد، این کاتیون به کدام فلز مربوط است؟ ( $O = 16, Mg = 24, P = 31, Ca = 40, Fe = 56, Zn = 65; g.mol^{-1}$ )

(سؤال ۱۹۷ کنکور ریاضی ۱۴۰۱)

Mg (4)

Zn (3)

Fe (2)

Ca (1)

# مُنیاز اولین نشر آنلاین کنکور کشور

از سال ۹۷ تا کنون



محمد واعظی



علی مقدم نیا



محمد چلاچور



محمد نوکنده



کیوان دارابی



امید مصلائی



محمد عمارلو



مرتضی محسنی کبیر



محمد همدانی



بهمن موزنی پور



شاهین شاهین زاد



ارسلان رحمانی

برترین دبیران کنکور کشور در نشر آنلاین مُنیاز

<https://www.moniaz.ir>

WWW.ArefOnline.ir



دانشگاه رایگان تمام آزمون های آزمایشی

در کانال تلگرام ما :

# آزمونها آزمایشی

[t.me/Azmoonha\\_Azmayeshi](https://t.me/Azmoonha_Azmayeshi)



زیبختار



join us ...

[WWW.ArefOnline.ir](http://WWW.ArefOnline.ir)

# آزمون



# کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



# جزوه



# فیلم



# مشاوره



www.  
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف

