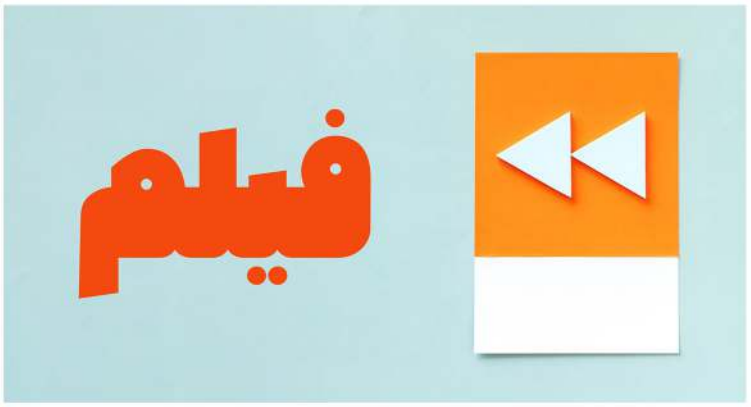
آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

بانک تست کنکور نظام جدید

۹۸ تا خارج از کشور ۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی ۱
بازه ها ۱
مجموعه های متناهی و نامتناهی ۱
درس دوم: متمم یک مجموعه ۱
مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه ۱
درس سوم: الگو و دنباله ۱
الگو ۱
الگوی خط ۱
الگوهای غیر خطی ۱
دنباله ۲
درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی ۲
دنباله حسابی ۲
دنباله هندسی ۲
مسائل ویژه ۳

فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت های مثلثاتی ۳
مساحت مثلث ۳
درس دوم: دایره ی مثلثاتی ۴
تعیین علامت نسبت های مثلثاتی ۴
درس سوم : روابط بین نسبت های مثلثاتی ۴
روابط بین نسبت های مثلثاتی ۴
بررسی درستی اتحادهای مثلثاتی ۴

فصل ۳ : توان های گویا و عبارت های جبری

درس اول: ریشه و توان ۵
درس سوم: توان های گویا ۵
درس چهارم: عبارت های جبری ۵

فصل ۴ : معادله ها و نامعادله ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن ۶
حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی ۶
درس سوم: تعیین علامت ۶
تعیین علامت چند جمله ای درجه اول ۶
تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم ۶
نامعادله ۶
نامعادله های قدرمطلقی ۷

فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن ۷
نمایش زوج مرتبی ۷
درس سوم :انواع توابع ۸
تابع همانی و تابع ثابت ۸
تابع قدرمطلق ۸
تابع قطعه ای (چند ضابطه ای(..... ۸

فصل ۶: شمارش، بدون شمردن

درس اول: شمارش ۸
اصل جمع و اصل ضرب ۸
درس دوم :جایگشت ۸
جایگشت ۸
درس سوم :ترکیب ۸
ترکیب ۸
مسائل ویژه (ترکیبی(..... ۸

فصل ۷: آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس ۹
احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس) ۹

فصل ۱: مجموعه، الگو و دنباله

درس اول: مجموعه های متناهی و نامتناهی بازه ها

۱. برای چند عدد طبیعی n، بازهٔ $(\frac{۳-n}{۲}, \frac{n+۳}{n})$ شامل فقط یک عدد صحیح است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

مجموعه های متناهی و نامتناهی

۲. به ازای چند مقدار طبیعی m، اشتراک دو بازه $A=[\frac{۴}{m+۱}, +\infty)$ و $B=(-\infty, \frac{۵}{m+۲}]$ یک مجموعه متناهی است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۳. برای چند مقدار طبیعی m، اشتراک دو بازهٔ $A=(-\infty, \frac{۴}{m}]$ و $B=[۴-m, +\infty)$ یک مجموعهٔ متناهی است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

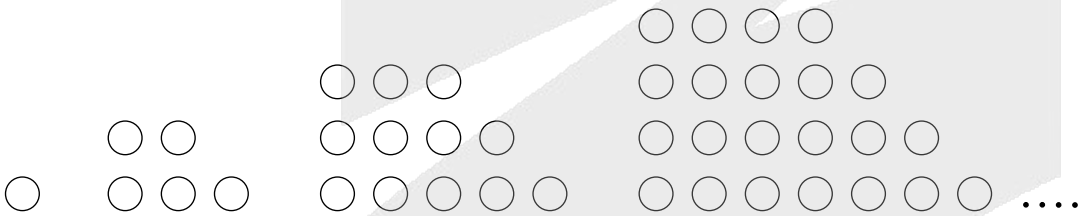
درس دوم: متمم یک مجموعه مجموعه مرجع و متمم یک مجموعه

۴. اگر A و B دو مجموعهٔ ناتهی از مجموعهٔ مرجع U باشند، مجموعهٔ $[(A\cap B)-B]'\cap[(A\cap B)\cup(A-B)]$ با کدام مجموعه برابر است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) A ۲) $\varnothing$ ۳) $A-B$ ۴) $A'-B'$

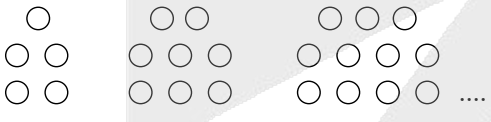
درس سوم: الگو و دنباله الگو

۵. در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل نهم، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۸



۱) ۱۱۷
۲) ۱۲۰
۳) ۱۲۳
۴) ۱۲۵

۶. در الگوی زیر، تعداد نقطه‌ها، در شکل دوازدهم، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸



۱) ۳۴ ۲) ۳۶ ۳) ۳۸ ۴) ۴۰

الگوی خط

۷. اگر ۸ و ۵ به‌ترتیب جملات پنجم و دهم یک الگوی خطی باشند، جملهٔ شانزدهم کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۱۱٫۶ ۲) ۹٫۶ ۳) ۲٫۴ ۴) ۱٫۴

الگوهای غیر خطی

۸. فرض کنید جملهٔ صدم دنبالهٔ بازگشتی $a_{n+۱}=\frac{۱}{a_n}+۱$ با شرط $a_۱=۱$، برابر $\frac{k}{m}$ باشد. جملهٔ نودوهشتم دنبالهٔ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $\frac{k-m}{۲m-k}$ ۲) $\frac{k-۲m}{k-m}$ ۳) $\frac{k-m}{k-۲m}$ ۴) $\frac{۲m-k}{k-m}$

WWW.ArefOnline.ir

۹. اعداد ۱۴ و ۱۷٫۲ به‌ترتیب جملات پنجم و هفتم یک دنبالهٔ درجهٔ دوم هستند.اگر ضریب بزرگ‌ترین درجه جملهٔ عمومی، برابر $\frac{۱}{۷۰}$ قرینهٔ جمله پنجم باشد، جملهٔ پانزدهم چند برابر جملهٔ اول است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) ۲٫۴ ۳) ۴٫۶ ۴) ۵

دنباله

۱۰. اعداد طبیعی فرد را طوری دسته‌بندی می‌کنیم که تعداد جملات هر دسته، برابر شمارهٔ آن دسته باشد، یعنی $\{۱\},\{۳,۵\},\{۷,۹,۱۱\},\cdots$. در این صورت جملهٔ آخر واقع در دستهٔ شمارهٔ چهل کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۱۵۶۳ ۲) ۱۵۸۹ ۳) ۱۶۳۹ ۴) ۱۶۵۱

درس چهارم: دنباله های حسابی و هندسی دنباله حسابی

۱۱. اعداد طبیعی متوالی را به طریقی دسته‌بندی می‌کنیم، که آخرین عدد هر گروه مربع کامل باشد، یعنی $\{۱\},\{۲,۳,۴\},\cdots$. در دستهٔ نهم، واسطهٔ حسابی بین دو عدد اول و آخر آن، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۷۱ ۲) ۷۲ ۳) ۷۳ ۴) ۷۴

۱۲. در یک دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a و قدرنسبت d، تساوی $۶a_۴^۲ = ۵a_۳a + ۳a_۲a$ برقرار است. نسبت جملهٔ چهارم دنباله به d، کدام می‌تواند باشد؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۱٫۵ ۳) ۳٫۵ ۴) ۴

۱۳. مقادیر a، $۲a+۱$ و $۵-a$ به ترتیب جملات متوالی یک دنبالهٔ حسابی هستند. اگر a جملهٔ نخست این دنباله باشد، جملهٔ نهم کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۲٫۷۵ ۲) ۴٫۲۵ ۳) ۱۲٫۲۵ ۴) ۱۴٫۷۵

دنباله هندسی

۱۴. جملات سوم، هفتم و شانزدهم یک دنبالهٔ حسابی، جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی، هستند. قدرنسبت دنبالهٔ هندسی، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $\frac{۴}{۳}$ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۹}{۴}$

۱۵. اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به‌جز دسته اول و دوم)، برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است، یعنی $\{۱\},\{۲,۳\},\{۴,۵,۶\},\{۷,۸,۹,۱۰,۱۱,۱۲\},\cdots$، میانگین عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۲۳۰۴٫۵ ۲) ۳۰۷۲٫۵ ۳) ۴۶۰۸٫۵ ۴) ۶۱۴۴٫۵

۱۶. اگر جملات یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت r را نصف کنید، دنباله‌ای حسابی با قدرنسبت d خواهید داشت. مقدار $r+d$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) صفر ۲) ۱ ۳) $\sqrt{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۱۷. اگر $x+۱, x-۱, ۲x+۱$ و x به‌ترتیب جملات چهارم، پنجم، هفتم و هشتم یک دنبالهٔ هندسی باشند، حاصل‌ضرب مقادیر ممکن برای قدرنسبت این دنباله، کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۲ ۴) -۲

۱۸. اگر مجموع ۹ جملهٔ اول یک دنبالهٔ هندسی با قدرنسبت صحیح، ۷۳ برابر مجموع ۳ جملهٔ اول آن باشد، جملهٔ سوم این دنباله چند برابر جملهٔ اول آن است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۸ ۴) ۹

۱۹. اگر a، b و c سه جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی بوده و مجموع آنها ۱۸ باشد، مجموع چهار جملهٔ $\frac{۱}{۲}a+۲b$، $\frac{۳}{۲}c$، a و $-\frac{۱}{۲}b$ کدام است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۱۲ ۲) ۱۸ ۳) ۲۴ ۴) ۲۷

WWW.ArefOnline.ir

مسائل ویژه

۲۰. دنبالهٔ $a_n = \begin{cases} ۲^k & n = ۳k \\ -۲k + ۴ & n = ۳k+۱ \\ [\frac{n}{k+۲}] + a & n = ۳k+۲ \end{cases}$ **به ازای اعداد حسابی** n **مفروض است. اگر مجموع ۱۰ جملهٔ اول این دنباله ۱۹ باشد، حاصل عبارت** $a_۲ + a_۵ + a_۸ + \cdots + a_{۲۹}$ **کدام است؟**

مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۲ ۴) ۱

۲۱. دنباله‌های هندسی با قدرنسبت طبیعی و بزرگ‌تر از یک که شامل ۵ جمله هستند را درنظر بگیرید. چه تعداد از این نوع دنباله‌ها می‌توان یافت که جملات آن عضو مجموعهٔ $\{۱, ۲, \cdots, ۱۰۰\}$ **باشد؟**

مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۲۲. یک دانش‌آموز مربع‌هایی رسم می‌کند که مساحت هر مربع، ۹ برابر مساحت مربع رسم‌شدهٔ قبلی است. محیط این مربع‌ها، تشکیل یک دنبالهٔ هندسی می‌دهند. قدر نسبت این دنباله، کدام است؟

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۳ ۲) ۶ ۳) ۹ ۴) ۱۲

۲۳. اعداد طبیعی طوری دسته‌بندی شده‌اند که تعداد عضوهای هر دسته (به‌جز دستهٔ اول) برابر بزرگ‌ترین عضو دستهٔ قبل است؛ یعنی $\{۱, ۲\}, \{۳, ۴\}, \{۵, ۶, ۷, ۸\}, \ldots$**، میانهٔ عضوهای دستهٔ سیزدهم، کدام است؟**

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۶۱۴۴٫۵ ۲) ۶۱۴۵٫۵ ۳) ۱۲۲۸۹٫۵ ۴) ۱۲۲۸۸٫۵

۲۴. جمله‌های چهارم و هشتم یک دنباله حسابی به‌ترتیب جملهٔ دوم و هفتم یک الگوی خطی هستند. اگر صفر، جملهٔ دهم الگوی خطی باشد، جملهٔ پانزدهم الگو، چند برابر قدرنسبت دنبالهٔ حسابی است؟

مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۶}{۵}$ ۲) $\frac{۸}{۵}$ ۳) ۳ ۴) ۴

۲۵. اگر a, b, c **سه جملهٔ نخست و متمایز یک دنبالهٔ حسابی بوده و** $\frac{۱}{۴}c, \frac{۱}{۲}a, b$ **سه جملهٔ نخست یک دنبالهٔ هندسی باشند، دو برابر قدر نسبت دنبالهٔ هندسی کدام است؟**

مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) -۱ ۴) -۲

۲۶. اگر a, b, c **سه جملهٔ نخست و متمایز یک دنبالهٔ هندسی بوده و** $۳b, ۲a, c$ **سه جملهٔ نخست یک دنبالهٔ حسابی باشند، نسبت جملهٔ نهم به جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی کدام است؟**

مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

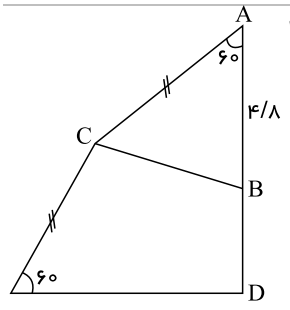
۱) ۶۴ ۲) ۲۷ ۳) -۲۷ ۴) -۶۴

فصل ۲: مثلثات

درس اول: نسبت های مثلثاتی مساحت مثلث

۲۷. در شکل زیر، مساحت مثلث ABC **برابر** $۷٫۲\sqrt{۳}$ **است. فاصلهٔ** D **از** C **کدام است؟**

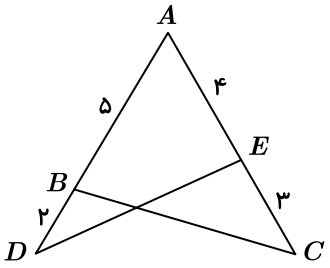
مرجع: سراسری- ۱۴۰۲



۱) $۶\sqrt{۶}$
۲) $۳\sqrt{۶}$
۳) $۲\sqrt{۲}$
۴) $\sqrt{۲}$

WWW.ArefOnline.ir

۲۸. در شکل زیر، اختلاف مساحت مثلث‌های $\overset{\Delta}{ABC}$ و $\overset{\Delta}{ADE}$ برابر ۱٫۷۵ است. $\tan \hat{A}$ کدام مقدار زیر است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴



۱) $\frac{۱}{\sqrt{۲}}$ ۲) $\frac{۱}{\sqrt{۳}}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۲}$

۲۹. در یک متوازی‌الاضلاع به مساحت ۵۴، نسبت دو ضلع مجاور ۲ به ۳ است. اگر زاویهٔ بزرگ‌تر بین دو ضلع مجاور ۱۵۰ درجه باشد، محیط متوازی‌الاضلاع کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۳۰ ۲) ۱۵ ۳) $۱۵\sqrt{۲}$ ۴) $۳۰\sqrt{۲}$

۳۰. در یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین اندازهٔ قاعدهٔ کوچک و هر ساق، به‌ترتیب ۲ و ۵ است. اگر $\cos\theta = ۰٫۶$ و θ زاویهٔ حاده بین ساق و یکی از قاعده‌ها باشد، مساحت ذوزنقه کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) ۱۶ ۲) ۲۰ ۳) ۳۲ ۴) ۴۰

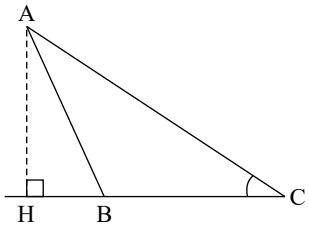
درس دوم: دایره ی مثلثاتی تعیین علامت نسبت های مثلثاتی

۳۱. اگر $\frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|} - \tan\alpha = \frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}}$ و $\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = -\frac{۱}{\cot\alpha}$ باشد، انتهای کمان α در کدام ناحیهٔ مثلثاتی است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) چهارم ۲) سوم ۳) دوم ۴) اول

درس سوم : روابط بین نسبت های مثلثاتی روابط بین نسبت های مثلثاتی

۳۲. در شکل زیر، فرض کنید $\sin C = \frac{۵}{۱۳}$ و $CH = ۹$، اندازهٔ ارتفاع AH، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹



۱) ۳٫۲۵
۲) ۳٫۵
۳) ۳٫۶
۴) ۳٫۷۵

۳۳. اگر $۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$ باشد، حاصل $\tan^۲ x$ کدام است؟ $(x \neq ۰)$ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) $\frac{۳}{۲}$ ۲) $\frac{۲}{۳}$ ۳) $\frac{۱}{۲}$ ۴) $\frac{۱}{۴}$

۳۴. اگر $\sin\alpha = ۲\cos\alpha$ و انتهای کمان α در ربع سوم مثلثاتی باشد، مقدار $\cos\alpha$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $-\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۲) $-\frac{\sqrt{۵}}{۵}$ ۳) $\frac{۲\sqrt{۵}}{۵}$ ۴) $\frac{\sqrt{۵}}{۱۰}$

بررسی درستی اتحادهای مثلثاتی

۳۵. حاصل عبارت $\frac{\sin^۴\alpha + ۴\cos^۲\alpha}{۱+\cos^۲\alpha} - \frac{\cos^۴\alpha + ۴\sin^۲\alpha}{۱+\sin^۲\alpha}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) $\cos ۲\alpha$ ۴) $\sin ۲\alpha$

WWW.ArefOnline.ir

فصل ۳ : توان های گویا و عبارت های جبری

درس اول: ریشه و توان

۳۶. اگر $A=\sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}}(\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}}$ باشد، حاصل $(۲A)^{-\frac{۱}{۳}}$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) ۰٫۲۵ ۲) ۰٫۵ ۳) ۰٫۷۵ ۴) ۱

۳۷. اگر $A=\sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱٫۵}$ باشد، حاصل عبارت $(۱+A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}}$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) ۳ ۲) ۴ ۳) ۵ ۴) ۶

۳۸. ریشهٔ هفتم عدد مثبت a، مساوی ۲۷ برابر عدد a با توان $\frac{۱۵}{۷}$ است. $(۳-\frac{۱}{a})$ چند برابر $(\sqrt{۳}+۱)$ است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $۶-۳\sqrt{۳}$ ۲) ۳ ۳) ۶ ۴) $۶+۳\sqrt{۳}$

درس سوم: توان های گویا

۳۹. حاصل عبارت $۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}-\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) $۱+\sqrt{۳}$ ۲) $-۱+\sqrt{۲}$ ۳) $۱-\sqrt{۲}$ ۴) $\sqrt{۲}-۲\sqrt{۳}$

۴۰. حاصل عبارت $(۲-\sqrt{۳})^{-۱}+\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $۱+۲\sqrt{۳}$ ۲) $۲\sqrt{۳}$ ۳) $۱+\sqrt{۳}$ ۴) ۱

۴۱. حاصل عبارت $\sqrt{۱+\sqrt{۷}}\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۱ ۲) $\sqrt[۴]{۲}$ ۳) ۲ ۴) $۲\sqrt[۴]{۲}$

۴۲. حاصل عبارت $\sqrt{۴\sqrt[۶]{۲}}\times\sqrt[۴]{۱۶۲}\times\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲۸}}$ چند برابر $\sqrt{۶}$ است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۲ ۲) $۳\sqrt{۲}$ ۳) $۲\sqrt{۶}$ ۴) ۳

۴۳. حاصل عبارت $\frac{\sqrt[۸]{۴۹\sqrt[۳]{۷}}}{۷\sqrt[۴]{۳۴۳\sqrt{۷^{-۱}}}}$ چند برابر $\sqrt[۳]{۴۹}$ است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) $\frac{۱}{۴۹}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) ۲ ۴) ۳

درس چهارم: عبارت های جبری

۴۴. فرض کنید $a=\sqrt[۴]{\sqrt{۶}-۲}$ و $b=\sqrt[۴]{\sqrt{۶}+۲}$ مقدار $(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) $۴(۲+\sqrt{۳})$ ۲) $۴(۲-\sqrt{۳})$ ۳) $۱۶(۲+\sqrt{۳})$ ۴) $۱۶(۲-\sqrt{۳})$

۴۵. فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ جواب‌های معادلهٔ $۲\sqrt[۳]{x}=(\sqrt[۳]{x^۲}-۱)(\frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}}+۱)$ باشند مقدار $x_۱+x_۲$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) -۱ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۴۶. اگر $\frac{۱}{a^۳-۱}+\frac{۱}{a^۳+۱}=۲$ باشد، حاصل $(\frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱}+\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱})^{۱۴۰۱}$ چقدر است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۱

۱) ۲ ۲) -۲ ۳) ۱ ۴) -۱

WWW.ArefOnline.ir

۴۷. حاصل عبارت $\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}}{\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}}-۲$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) $-۲\sqrt{۳}$ ۲) $-\sqrt{۶}$ ۳) $۲\sqrt{۳}$ ۴) $\sqrt{۶}$

فصل ۴ : معادله ها و نامعادله ها

درس اول: معادله درجه دوم و روش های مختلف حل آن حل معادله درجه دوم به روش فرمول کلی

۴۸. ارتفاع یک مثلث ۲ واحد بیشتر از ۳ برابر قاعدهٔ آن است. اگر ۴ واحد هم به ارتفاع و هم به قاعدهٔ این مثلث اضافه شود، مساحت مثلث جدید ۴٫۵ برابر مساحت مثلث اولیه می‌شود. مساحت مثلث اولیه کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۸ ۲) ۱۴٫۵ ۳) ۱۶٫۵ ۴) ۲۸

۴۹. طول یک مستطیل ۳ سانتی‌متر بیشتر از ۴ برابر عرض آن است. اگر ۹ واحد هم به طول و هم به عرض این مستطیل اضافه شود، مساحت مستطیل جدید ۱۰ برابر مساحت مستطیل اولیه می‌شود. محیط مستطیل اولیه کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) ۴۱ ۲) ۳۶ ۳) ۳۱ ۴) ۲۶

درس سوم: تعیین علامت تعیین علامت چند جمله ای درجه اول

۵۰. مجموعه جواب نامعادلهٔ $\frac{۲x-۳}{x+۱}<۱$، به کدام صورت است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۸

۱) $\mathbb{R}-[-۶,۴]$ ۲) $\mathbb{R}-[-۴,۶]$ ۳) $x>۴$ ۴) $x<-۶$

۵۱. مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۲a+۳)x^۲+(۴b-۵)x+۴c+۱<۰$ به‌صورت بازهٔ $(a,+\infty)$ است. اگر b عدد طبیعی باشد، مقدار $\frac{a}{c}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۱٫۲ ۲) $-۱٫۲$ ۳) ۲٫۴ ۴) $-۲٫۴$

۵۲. برای چند عدد طبیعی، ریشهٔ دوم عبارت $\frac{۱-a}{۹-۳a}$ وجود ندارد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

تعیین علامت چند جمله ای درجه دوم

۵۳. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x}{x-۲}>\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲}$، به‌صورت بازه، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۸

۱) $(-۴,۱)\cup(۲,۳)$ ۲) $(۲,۴)$ ۳) $(-۱,۲)\cup(۲,۴)$ ۴) $(-۱,۲)$

۵۴. مجموعه جواب نامعادلهٔ $(۵-۲m)x^۲-(۲m+n-۵)x<n$ به‌صورت بازهٔ $(-۱,m-۲)$ است. اگر m عدد طبیعی باشد، مقدار $m+n$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۵۵. مجموعه‌جواب نامعادلهٔ $(m+۴)x^۲<n-(m-n+۴)x$ به‌صورت بازهٔ $(m+۱,-۱)$ است. اگر m عدد صحیح باشد، مقدار mn کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) ۶ ۲) ۳ ۳) -۳ ۴) -۶

نامعادله

۵۶. مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{x+۱}{۲x-۱}<۱$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) $(۰٫۶,۱٫۵)$ ۲) $(۰٫۸,۱٫۲)$ ۳) $(۱,۲)$ ۴) $(۰٫۸,۲)$

WWW.ArefOnline.ir

۵۷. مجموعه جواب نامعادلهٔ $-۱ < \frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $(۰,+\infty)$ ۲) $(۴,+\infty)$ ۳) $\mathbb{R}-[-۴,۰]$ ۴) $\mathbb{R}-[-۴,-۱]$

۵۸. فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(x-۳\sqrt{x}+۲)}{۲x-۳} > ۰$ به ازای $x > \frac{۳}{۲}$ بازهٔ $[۲,۴]$ باشد مقدار m کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۰

۱) -۲ ۲) صفر ۳) ۱ ۴) ۲

۵۹. فرض کنید مجموعهٔ جواب نامعادلهٔ $\frac{((m^۲-۱)x^۲-۴mx+۴)(۲x-۳)}{x-۳\sqrt{x}+۲} \geq ۰$ فقط یک بازه باشد. مقدار m، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۰

۱) -۱ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) ۱ ۴) $\frac{۷}{۳}$

۶۰. اگر $-۲ < \frac{۱-۳x}{x+۱} < ۰$ باشد، مجموعهٔ مقادیر $\left[\frac{x}{۲}\right]$ چند عضو دارد؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۱. نمودار تابع $y = \frac{۲}{x^۲-۳x+۲}$، به‌ازای چند مقدار صحیح بین دو خط افقی $y=۰$ و $y=-۲$ واقع می‌شود؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) صفر

نامعادله های قدرمطلقی

۶۲. در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع با ضابطهٔ $y = |۲x^۲-۴|$ در زیر خط $y=۲x$ واقع است. بیش‌ترین مقدار $b-a$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۶۳. مساحت ناحیهٔ محدود به نمودارهای دو تابع $y = \sqrt{x^۲-۴x+۴}$ و $y = \frac{۱}{۲}x+۲$، کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۸ ۲) ۹ ۳) ۱۰ ۴) ۱۲

۶۴. در بازهٔ (a,b)، نمودار تابع $y=(x-۱)^۲$ بالاتر از نمودار تابع $y=۴x^۴$ است. بیشترین مقدار $b-a$، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۱ ۲) $\frac{۳}{۲}$ ۳) ۲ ۴) $\frac{۵}{۲}$

۶۵. نمودارهای دو تابع $y = |x+۱| + |x-۲|$ و $y = x+۷$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB، کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) $۸\sqrt{۲}$ ۲) ۱۲ ۳) ۱۳ ۴) $۱۰\sqrt{۲}$

۶۶. در بازهٔ (a,b) عبارت $۱۵x^۲+۷۳x+۱۴$ منفی و عبارت $|\frac{x-۱}{۲}-۱|$ بزرگ‌تر از سه است. بیشترین مقدار $b-a$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) $\frac{۵}{۳}$ ۲) $\frac{۲۳}{۳}$ ۳) $\frac{۴}{۱۵}$ ۴) $\frac{۶۷}{۱۵}$

فصل ۵: تابع

درس اول: مفهوم تابع و بازنمایی های آن نمایش زوج مرتبی

۶۷. حداقل چند عضو از مجموعهٔ $\{\frac{۷۲}{y^۲-۱} | x,y \in \mathbb{Z}, x=\}$ حذف شود تا $f = \{(x,y)\}$، یک تابع باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

WWW.ArefOnline.ir

درس سوم :انواع توابع تابع همانی و تابع ثابت

۶۸. اگر f تابع همانی و g تابع ثابت بوده و $g(۳x)+۲f(۳+x)=۳+۲x$ باشد، مقدار $\frac{f(-۱)}{g(۴)}$ کدام است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) $\frac{۱}{۴}$ ۲) $\frac{۱}{۳}$ ۳) $-\frac{۱}{۴}$ ۴) $-\frac{۱}{۳}$

۶۹. اگر f تابع ثابت و g تابع همانی بوده و $f(۲x)-g(۱-x)=۴+x$ باشد، مقدار $g(-۱)f(۳)$ کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) ۵ ۲) ۳ ۳) -۵ ۴) -۳

تابع قدرمطلق

۷۰. نمودارهای دو تابع $y=|x+۲|+|x-۱|$ و $۳y+x=۱۷$ در دو نقطهٔ A و B متقاطع هستند. اندازهٔ پاره‌خط AB کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۱

۱) $۲\sqrt{۱۰}$ ۲) $۴\sqrt{۵}$ ۳) $۲\sqrt{۲}$ ۴) $۴\sqrt{۳}$

تابع قطعه ای (چند ضابطه ای)

۷۱. ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f به‌صورت $f(x)=\begin{cases} x^۲-x-۷ & x\geq ۱ \\ ۲x-۱ & x<۱ \end{cases}$ است. برای چند مقدار a، $f(۱-|a|)=f(۲+|a|)$ است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۳

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۷۲. ضابطهٔ تابع قطعه‌ای f به صورت $f(x)=\begin{cases} ۷-۳x & |x|>۱ \\ -۲x & |x|<۱ \end{cases}$ است. اگر $f(۱+a^۲)=f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$ باشد، اختلاف مقادیر a کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۳

۱) ۳ ۲) ۲ ۳) ۱ ۴) صفر

فصل ۶: شمارش، بدون شمردن

درس اول: شمارش اصل جمع و اصل ضرب

۷۳. با ارقام ۰, ۱, ۳, ۵, ۷, ۸, ۹ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار می‌توان نوشت که از ۷۸۱ کوچک‌تر باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۱۳۳ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۱۱ ۴) ۱۰۳

۷۴. با ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۵, ۷, ۸ چند عدد سه‌رقمی بدون تکرار ارقام می‌توان نوشت که از ۲۵۷ بزرگ‌تر باشد؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) ۱۳۰ ۲) ۱۳۱ ۳) ۱۲۰ ۴) ۱۲۱

درس دوم :جایگشت جایگشت

۷۵. چند عدد یازده‌رقمی با ارقام ۱ و ۲ می‌توان نوشت به‌طوری‌که مضرب ۶ باشند؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱۳۱ ۲) ۲۲۱ ۳) ۳۴۱ ۴) ۴۳۱

درس سوم :ترکیب ترکیب

۷۶. به چند طریق می‌توان ۵ نفر از ۹ دوست صمیمی خود را به مهمانی دعوت کرد، به‌طوری که دو نفر آنان، نخواهند با هم در مهمانی شرکت کنند؟ مرجع: سراسری- ۱۳۹۹

۱) ۸۴ ۲) ۸۷ ۳) ۹۱ ۴) ۹۵

۷۷. به چند طریق می‌توان ۵ کتاب متمایز را بین ۳ نفر توزیع کرد، به شرط آنکه هر نفر حداقل یک کتاب دریافت کند؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۳۹۹

۱) ۱۰۵ ۲) ۱۲۵ ۳) ۱۳۵ ۴) ۱۵۰

مسائل ویژه (ترکیبی)

۷۸. با ارقام ۰, ۲, ۳, ۵, ۷, ۸, ۹ چند عدد سه‌رقمی می‌توان نوشت که هر رقم از رقم قبل از خود (سمت چپ) کوچک‌تر باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۳۱ ۴) ۳۵

WWW.ArefOnline.ir

فصل ۷: آمار و احتمال

درس اول: احتمال یا اندازه گیری شانس احتمال رخداد یک پیشامد (اندازه گیری شانس)

۷۹. یک سکه را آنقدر پرتاب می‌کنیم تا برای بار kاُم «رو» ظاهر شود. احتمال آنکه دقیقاً nبار پرتاب لازم شود، $\frac{k}{k+۵}$ برابر احتمال آن است که در n پرتاب k بار سکه «رو» بیاید. کدام مقدار می‌تواند $n+k$ باشد؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۲

۱) ۱۲ ۲) ۹ ۳) ۸ ۴) ۵

۸۰. در پرتاب ۱ تاس و ۳ سکه، با کدام احتمال تعداد دفعاتی که سکه رو می‌آید ۳ برابر عدد روی تاس است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) $\frac{۱}{۸}$ ۲) $\frac{۱}{۲۴}$ ۳) $\frac{۱}{۴۸}$ ۴) $\frac{۱}{۱۶}$

۸۱. در یک کیسه کارت‌هایی به شمارهٔ ۱ تا ۸ وجود دارد. ۳ کارت به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال یکی از اعداد روی کارت‌ها شمارنده دوتای دیگر است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) $\frac{۳}{۷}$ ۲) $\frac{۳}{۸}$ ۳) $\frac{۹}{۵۶}$ ۴) $\frac{۲۵}{۵۶}$

۸۲. در یک ظرف ۵ مهرهٔ سیاه و تعدادی مهرهٔ سبز وجود دارد. دو مهره به تصادف از ظرف خارج می‌شود، احتمال اینکه حداقل یک مهره سیاه باشد، برابر $\frac{۵}{۶}$ است. تعداد مهرهٔ سبز چقدر از تعداد مهرهٔ سیاه کمتر است؟ مرجع: سراسری- ۱۴۰۴

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

۸۳. در یک کیسه کارت‌هایی با شمارهٔ ۱ تا ۸ وجود دارد. ۲ کارت به تصادف از این کیسه خارج می‌کنیم، با کدام احتمال اعداد روی کارت‌ها، یکی مضرب دیگری است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) $\frac{۳}{۱۰}$ ۲) $\frac{۳}{۷}$ ۳) $\frac{۱}{۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۸۴. در کیسه‌ای تعدادی مهرهٔ سفید و سیاه وجود دارد که تعداد مهره‌ها از یک رنگ ۲ برابر دیگری است. دو مهره یکی پس از دیگری از کیسه به تصادف خارج می‌شود، احتمال اینکه مهره‌ها هم‌رنگ نباشند برابر $\frac{۱}{۲}$ است. در ابتدا مجموع مهره‌های داخل کیسه کدام است؟ مرجع: خارج از کشور- ۱۴۰۴

۱) ۱۵ ۲) ۱۲ ۳) ۹ ۴) ۶

WWW.ArefOnline.ir

پاسخنامه تشریحی

۱ گزینه ۱

$$\left(\frac{۳-n}{۲}\,,\frac{n+۳}{n}\right)=\left(\frac{۳}{۲}-\frac{n}{۲}\,,۱+\frac{۳}{n}\right)$$

به‌ازای هر عدد طبیعی n، ابتدای بازه کوچک‌تر از $\frac{۳}{۲}$ و انتهای بازه بزرگ‌تر از ۱ است؛ بنابراین فقط اعداد ۱ و ۲ می‌توانند اعداد موردنظر باشند.

اگر بخواهیم بازهٔ موردنظر فقط شامل عدد صحیح ۲ باشد، باید $\frac{۳-n}{۲}\geq ۱$ و $\frac{n+۳}{n}\leq ۳$ باشد که در این صورت خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{۳-n}{۲}\geq ۱\Rightarrow ۳-n\geq ۲\Rightarrow n\leq ۱\\ \frac{n+۳}{n}\leq ۳\xrightarrow[n>۰]{n\in\mathbb{N}} n+۳\leq ۳n\Rightarrow n\geq\frac{۳}{۲}\end{cases}\Rightarrow \text{اشتراک}=\varnothing$$

پس باید بازهٔ موردنظر فقط شامل عدد صحیح ۱ باشد، در این صورت باید داشته باشیم:

$$\begin{cases}\frac{۳-n}{۲}\geq ۰\Rightarrow n\leq ۳\\ \frac{n+۳}{n}\leq ۲\Rightarrow n\geq ۳\end{cases}\Rightarrow \text{اشتراک}: n=۳$$

بنابراین فقط یک عدد طبیعی n در شرایط مسئله صدق می‌کند.

راه دوم: به‌ازای جای‌گذاری مقادیر ۱ و ۲ و ۳ و ۴ و ... به‌جای n مشخص می‌شود که به‌ازای $n\geq ۴$ امکان‌پذیر نیست و فقط به‌ازای $n=۳$ بازهٔ موردنظر فقط شامل یک عدد صحیح خواهد بود.

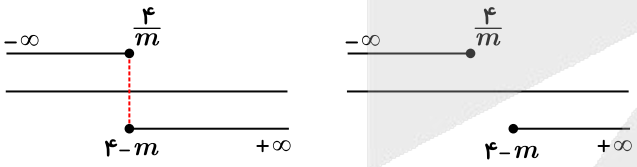
---

۲ گزینه ۲

$$\frac{۵}{m+۲}\leq\frac{۴}{m+۱}\xrightarrow{m\in\mathbb{N}}۵(m+۱)\leq ۴(m+۲)$$
$$\Rightarrow ۵m+۵\leq ۴m+۸\Rightarrow m\leq ۳\Rightarrow m=۱,۲,۳$$

---

۳ گزینه ۲ طول دو بازهٔ داده‌شده نامتناهی است؛ به‌علت خاصیت پیوستگی بازه‌ها (به‌عنوان زیرمجموعه‌هایی از $\mathbb{R}$)، اگر دو بازه بیش از یک نقطهٔ اشتراک داشته باشند، بی‌نهایت نقطهٔ اشتراک خواهند داشت. بنابراین اشتراک دو بازه باید $\varnothing$ باشد یا دقیقاً یک عضو را شامل شود.



حالت①: یک نقطهٔ اشتراک — حالت②: اشتراک تهی

$$\Rightarrow\frac{۴}{m}\leq ۴-m\Rightarrow m^۲-۴m+۴\leq ۰\Rightarrow(m-۲)^۲\leq ۰\xrightarrow{(m-۲)^۲\geq ۰}(m-۲)^۲=۰\Rightarrow m=۲$$

بنابراین به‌ازای یک مقدار m، مطلوب مسئله اتفاق می‌افتد.

---

۴ گزینه ۱

$$[(A\cap B)-B]'=[(A\cap B)\cap B']'=[A\cap\underbrace{(B\cap B')}_{\varnothing}]'=[A\cap\varnothing]'=\varnothing'=U$$

WWW.ArefOnline.ir

$$[(A\cap B)\cup(A-B)]=[(A\cap B)\cup(A\cap B')]=[A\cap\underbrace{(B\cup B')}_{U}]=[A\cap U]=A$$

حال خواسته سؤال را به‌دست می‌آوریم:

$$[(A\cap B)-B]'\cap[(A\cap B)\cup(A-B)]=U\cap A=A$$

---

۵ گزینه ۱

با کمی دقت متوجه می‌شویم که تعداد نقطه‌های هر شکل برابر با $[(n+0)+(n+1)+\cdots+(n+n-1)]$ می‌باشد.

شکل اول : ۱ ، شکل دوم : ۲ + ۳ ، شکل سوم : ۳ + ۴ + ۵ ، شکل چهارم : ۴ + ۵ + ۶ + ۷ ، ۰۰۰۰

پس تعداد نقطه‌ها در شکل نهم می‌شود:

$$۹+۱۰+۱۱+۱۲+۱۳+۱۴+۱۵+۱۶+۱۷=۱۱۷$$

---

۶ گزینه ۳ تعداد دایره‌ها با یکدیگر تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدرنسبت ۳ می‌دهند.

$$۵,۸,۱۱,\cdots\xrightarrow{a_n=a_1+(n-1)d}a_{۱۲}=۵+۱۱(۳)=۵+۳۳=۳۸$$

---

۷ گزینه ۴ با فرض $t_n=a\cdot n+b$ داریم:

$$\begin{matrix}t_۵=۸\Rightarrow ۵a+b=۸\\ t_{۱۰}=۵\Rightarrow ۱۰a+b=۵\end{matrix}\xrightarrow{\times(-۱)}\begin{cases}-۵a-b=-۸\\ ۱۰a+b=۵\end{cases}\Rightarrow ۵a=-۳\Rightarrow a=-\frac{۳}{۵}$$

$$\Rightarrow b=۸-۵a=۸-۵(-\frac{۳}{۵})\Rightarrow b=۸+۳=۱۱\Rightarrow t_n=-\frac{۳}{۵}n+۱۱$$

$$t_{۱۶}=-\frac{۳}{۵}\times ۱۶+۱۱=\frac{-۴۸+۵۵}{۵}=\frac{۷}{۵}=۱/۴$$

---

۸ گزینه ۱

با استفاده از جمله عمومی دنباله و جمله صدم که برابر با $\frac{k}{m}$ است، جمله ۹۹ و به همین ترتیب جمله ۹۸ را بر حسب m و k به دست می‌آوریم:

$$a_{۱۰۰}=\frac{۱}{a_{۹۹}}+۱\Rightarrow\frac{k}{m}=\frac{۱}{a_{۹۹}}+۱\Rightarrow\frac{۱}{a_{۹۹}}=\frac{k}{m}-۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{a_{۹۹}}=\frac{k-m}{m}\Rightarrow a_{۹۹}=\frac{m}{k-m}$$

$$a_{۹۹}=\frac{۱}{a_{۹۸}}+۱\Rightarrow\frac{m}{k-m}=\frac{۱}{a_{۹۸}}+۱\Rightarrow\frac{۱}{a_{۹۸}}=\frac{m}{k-m}-۱$$

$$\Rightarrow\frac{۱}{a_{۹۸}}=\frac{۲m-k}{k-m}\Rightarrow a_{۹۸}=\frac{k-m}{۲m-k}$$

---

۹ گزینه ۴ با فرض $t_n=a\cdot n^۲+b\cdot n+c$ داریم:

$$t_۵=۱۴\,,\,t_۷=۱۷/۲\,,\;a=\frac{۱}{۷۰}(-t_۵)=-\frac{۱۴}{۷۰}=-\frac{۱}{۵}$$

$$t_n=-\frac{۱}{۵}n^۲+bn+c$$

$$t_۵=-\frac{۱}{۵}\times ۲۵+۵b+c=۱۴\Rightarrow ۵b+c=۱۹$$

$$t_۷=-\frac{۱}{۵}\times ۴۹+۷b+c=۱۷/۲\Rightarrow -۹/۸+۷b+c=۱۷/۲\Rightarrow ۷b+c=۲۷$$

WWW.ArefOnline.ir

$$\begin{cases} ۵b + c = ۱۹ \xrightarrow{\times(-۱)} \\ ۷b + c = ۲۷ \end{cases} \begin{matrix} -۵b - c = -۱۹ \\ ۷b + c = ۲۷ \end{matrix} \Rightarrow ۲b = ۸ \Rightarrow b = ۴$$

$$۵ \times ۴ + c = ۱۹ \Rightarrow c = -۱ \Rightarrow t_n = -\frac{۱}{۵}n^۲ + ۴n - ۱$$

$$\frac{t_{۱۵}}{t_۱} = \frac{-\frac{۱}{۵} \times ۱۵^۲ + ۴ \times ۱۵ - ۱}{-\frac{۱}{۵} + ۴ - ۱} = \frac{-۴۵ + ۶۰ - ۱}{-\frac{۱}{۵} + ۳} = \frac{۱۴}{\frac{۱۴}{۵}} = ۵$$

---

۱۰ گزینه ۳

چند دستهٔ اول را نوشته و با جملات آخر هر دسته یک دنباله تشکیل داده و جملهٔ چهلم دنباله را پیدا می‌کنیم:

دستهٔ اول: $\{۱\}$

دستهٔ دوم: $\{۳, ۵\}$

دستهٔ سوم: $\{۷, ۹, ۱۱\}$

دستهٔ چهارم: $\{۱۳, ۱۵, ۱۷, ۱۹\}$

بنابراین دنبالهٔ جملات آخر دسته‌ها به‌صورت $۱, ۵, ۱۱, ۱۹, \cdots$ است که می‌توان به‌صورت $(۱ \times ۲) - ۱, (۲ \times ۳) - ۱, (۳ \times ۴) - ۱, \cdots$ نوشت، یعنی جملهٔ عمومی $a_n = n(n+۱) - ۱$ است، پس:

$$a_{۴۰} = ۴۰ \times (۴۱) - ۱ = ۱۶۴۰ - ۱ = ۱۶۳۹$$

---

۱۱ گزینه ۳ آخرین عدد دستهٔ هشتم، $۸^۲ = ۶۴$ است بنابراین دستهٔ نهم از ۶۵ شروع می‌شود.

$$\{۶۵, \cdots, ۸۱\} \rightarrow b, a \text{ عدد دو بین حسابی واسطهٔ} = \frac{a+b}{۲} \rightarrow \text{حسابی واسطهٔ} = \frac{۶۵ + ۸۱}{۲} = \frac{۱۴۶}{۲} = ۷۳$$

---

۱۲ گزینه ۱

$$۶(a+d)^۲ = ۵a(a+۲d) + ۳a(a+d) \Rightarrow ۲a^۲ + ad - ۶d^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow a = \frac{-d \pm \sqrt{۴۹d^۲}}{۴} = \frac{-d \pm ۷d}{۴} = \begin{cases} a = -۲d \\ a = \frac{۳}{۲}d \end{cases} \Rightarrow \frac{a_۴}{d} = \frac{a+۳d}{d} = \begin{cases} ۱ \\ ۴/۵ \end{cases}$$

---

۱۳ گزینه ۴ اگر a, b, c سه جملهٔ متوالی یک دنبالهٔ حسابی باشد داریم:

$$a + c = ۲b$$

و اگر a_n جملهٔ عمومی یک دنبالهٔ حسابی باشد داریم:

$$a_n = a_۱ + (n-۱) \cdot d$$

سه جملهٔ متوالی باید ویژگی جملات متوالی دنبالهٔ حسابی را داشته باشند.

$$\Rightarrow a + ۵ - a = ۲(۲a + ۱) \Rightarrow ۵ = ۴a + ۲ \Rightarrow a = \frac{۳}{۴}$$

در این صورت جملات دنباله $\frac{۳}{۴}, \frac{۵}{۲}, \frac{۱۷}{۴}, \cdots$ است. پس داریم:

$$d = \frac{۵}{۲} - \frac{۳}{۴} = \frac{۷}{۴}$$

$$a_۹ = a_۱ + ۸d = \frac{۳}{۴} + \frac{۵۶}{۴} = \frac{۵۹}{۴} = ۱۴/۷۵$$

---

۱۴ گزینه ۴

WWW.ArefOnline.ir

روش اول: در هر دنبالهٔ حسابی با جملهٔ اول a_1 و قدرنسبت d، جملهٔ nام از رابطهٔ $a_n = a_1 + (n-1)d$ به‌دست می‌آید و اگر a, b, c جملات متوالی یک دنبالهٔ هندسی باشند $ac = b^2$ است.

$$a_3, a_7, a_{16} \to a_1 + 2d, a_1 + 6d, a_1 + 15d \xrightarrow{\text{دنبالهٔ هندسی}} (a_1+2d)(a_1+15d) = (a_1+6d)^2$$

$$\to a_1^2 + 15a_1d + 2a_1d + 30d^2 = a_1^2 + 36d^2 + 12a_1d$$

$$\to 6d^2 - 5a_1d = 0 \to d(6d - 5a_1) = 0 \to 5a_1 = 6d \to a_1 = \frac{6}{5}d$$

$$\text{جملات}: \frac{6}{5}d + 2d, \frac{6}{5}d + 6d, \frac{6}{5}d + 15d \to \frac{16}{5}d, \frac{36}{5}d, \frac{81}{5}d \to q_{\text{هندسی}} = \frac{\frac{36}{5}d}{\frac{16}{5}d} = \frac{36}{16} = \frac{9}{4}$$

روش دوم: اگر a_m, a_n, a_p جملات یک دنبالهٔ حسابی باشند که با یکدیگر تشکیل دنبالهٔ هندسی می‌دهند آن‌گاه $q_{\text{هندسی}} = \frac{p-n}{n-m}$ است.

$$a_3, a_7, a_{16} \to q_{\text{هندسی}} = \frac{16-7}{7-3} = \frac{9}{4}$$

---

۱۵ گزینه ۳

$$\{1\}, \{2,3\}, \{4,5,6\}, \{7,8,9,10,11,12\}, \cdots$$

اگر دقت کنید، عضوهای آخر دسته‌ها به‌جز دسته اول یک دنباله هندسی با جمله اول ۳ و قدرنسبت ۲ تشکیل می‌دهند.

$$\text{دنباله اعضای آخر دسته‌ها به‌جز دسته اول}: \begin{cases} t_1 = 1 \\ t_n = 3 \times 2^{n-2} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

بنابراین داریم:

$$\text{عضو آخر دسته دوازدهم} = t_{12} = 3 \times 2^{10} = 3 \times 1024 = 3072$$

$$\text{عضو آخر دسته سیزدهم} = t_{13} = 3 \times 2^{11} = 3 \times 2048 = 6144$$

$$\text{دسته سیزدهم}: \{3073, \cdots, 6144\}$$

$$\text{تعداد} = 6144 - 3072 + 1 = 3072$$

چون تعداد اعضا عددی زوج است، میانگین تمام اعضا همان میانگین دو عدد وسط است و میانگین دو عدد وسط با میانگین اعداد اول و آخر دسته برابر است، پس داریم:

$$\frac{3073 + 6144}{2} = 4608/5$$

---

۱۶ گزینه ۲ طبق فرض داریم:

$$\text{دنبالهٔ هندسی قدیم}: a, ar, ar^2, \cdots \to \text{دنبالهٔ هندسی جدید}: \frac{a}{2}, \frac{ar}{2}, \frac{ar^2}{2}, \cdots$$

$$\xrightarrow{\text{شرط دنبالهٔ هندسی}} \frac{a}{2} + \frac{ar^2}{2} = 2\left(\frac{ar}{2}\right) \xrightarrow{\div \frac{a}{2}} 1 + r^2 = 2r \Rightarrow \underbrace{r^2 - 2r + 1}_{(r-1)^2} = 0 \Rightarrow r = 1$$

پس تمام جملات دنبالهٔ حاصل با هم برابر است و دنبالهٔ فوق، ثابت است و در نتیجه قدرنسبت دنبالهٔ حسابی مورد نظر برابر $d = 0$ است.

$$\Rightarrow r + d = 1 + 0 = 1$$

WWW.ArefOnline.ir

۱۷ گزینه ۲

$$\frac{a_5}{a_4}=\frac{a_8}{a_7}=q \Rightarrow \frac{x-1}{x+1}=\frac{x}{2x+1} \Rightarrow 2x^2-x-1=x^2+x$$

$$x^2-2x-1=0 \Rightarrow q_1\cdot q_2=\left(\frac{x_1}{2x_1+1}\right)\left(\frac{x_2}{2x_2+1}\right)=\frac{x_1x_2}{4x_1x_2+2(x_1+x_2)+1}=\frac{-1}{-4+4+1}=-1$$

۱۸ گزینه ۲

$$S_9=73S_3 \Rightarrow \frac{a_1(1-q^9)}{1-q}=73\times\frac{a_1(1-q^3)}{1-q}$$

$$\Rightarrow 1-q^9=73(1-q^3) \Rightarrow (1-q^3)(1+q^3+q^6)=73(1-q^3)$$

$$\Rightarrow 1+q^3+a^6=73 \Rightarrow q^6+q^3-72=0 \Rightarrow (q^3-8)(q^3+9)=0 \Rightarrow \begin{cases} q^3=8\Rightarrow q=2 & \checkmark \\ q^3=-9\Rightarrow q=\sqrt[3]{-9} & \text{غ ق ق} \end{cases}$$

$$\frac{a_3}{a_1}=\frac{a_1q^2}{a_1}=q^2=4$$

۱۹ گزینه ۴

طبق فرض: $a+b+c=18$

$$\text{حاصل جمع جملات مطلوب}=\frac{1}{2}a+2b+\frac{3}{2}c+a+(-\frac{1}{2}b)$$

$$=\frac{3}{2}a+\frac{3}{2}b+\frac{3}{2}c=\frac{3}{2}(a+b+c)=\frac{3}{2}\times 18=27$$

۲۰ گزینه ۱ ابتدا به کمک مجموع ۱۰ جملهٔ اول، a را می‌یابیم:

$$a_0+a_1+a_2+\cdots+a_9=19 \Rightarrow 1+4+1+a+2+2+1+a+4+0+2+a+8=19$$

$$\Rightarrow 3a+25=19 \rightarrow a=-2$$

$$a_2+a_5+a_8+\cdots+a_{29}=([\frac{2}{2}]+a)+([\frac{5}{3}]+a)+([\frac{8}{4}]+a)+\cdots+([\frac{29}{11}]+a)$$

$$=1+1+\underbrace{2+2+2+\cdots+2}_{\text{۸تا}}+10a=18-20=-2$$

۲۱ گزینه ۴ چون q و t_1 اعداد طبیعی هستند و دنباله دارای ۵ جمله است قطعاً جملات دنباله افزایشی هستند و جملهٔ پنجم $t_5=t_1q^4$ بزرگ‌ترین جملهٔ دنباله است. بنابراین q نمی‌تواند بزرگ‌تر از ۳ باشد زیرا:

$$q\geq 4 \Rightarrow q^4\geq 4^4 \Rightarrow q^4\geq 256 \Rightarrow t_5\geq 256$$

$$q=2\Rightarrow \begin{cases} t_1=1\Rightarrow \text{دنباله}: 1,2,4,8,16 \\ t_1=2\Rightarrow \text{دنباله}: 2,4,8,16,32 \\ t_1=3\Rightarrow \text{دنباله}: 3,6,12,24,48 \\ t_1=4\Rightarrow \text{دنباله}: 4,8,16,32,64 \\ t_1=5\Rightarrow \text{دنباله}: 5,10,20,40,80 \\ t_1=6\Rightarrow \text{دنباله}: 6,12,24,48,96 \end{cases}$$

$$q=3\Rightarrow t_1=1\Rightarrow \text{دنباله}: 1,3,9,27,81$$

۷ دنباله با شرایط گفته شده وجود دارد.

WWW.ArefOnline.ir

۲۲ گزینه ۱ اگر ضلع مربع‌ها را a_n، مساحت‌ها را s_n و محیط‌ها را p_n نشان دهیم، داریم:

$$s_n = a_n^۲ \, , \; p_n = ۴a_n \Rightarrow a_n = \frac{۱}{۴}p_n \Rightarrow s_n = (\frac{۱}{۴}p_n)^۲ = \frac{۱}{۱۶}p_n^۲$$

طبق فرض سؤال داریم:

$$\frac{s_n}{s_{n-۱}} = ۹ \Rightarrow \frac{\frac{۱}{۱۶}p_n^۲}{\frac{۱}{۱۶}p_{n-۱}^۲} = ۹ \Rightarrow \frac{p_n^۲}{p_{n-۱}^۲} = ۹ \Rightarrow \frac{p_n}{p_{n-۱}} = ۳$$

بنابراین قدر نسبت دنبالهٔ محیط‌ها برابر ۳ است.

---

۲۳ گزینه ۱ عدد آخر دسته‌ها دنبالهٔ هندسی با جملهٔ عمومی ۲^n است. بنابراین اعداد دستهٔ سیزدهم به‌صورت زیر هستند.

دستهٔ سیزدهم : $\{۲^{۱۲}+۱, ۲^{۱۲}+۲, \ldots, ۲^{۱۳}\}$

تعداد اعداد دستهٔ سیزدهم : $۲^{۱۳} - (۲^{۱۲}+۱) + ۱ = ۲^{۱۳} - ۲^{۱۲} = ۴۰۹۶$

چون تعداد اعداد زوج است. میانهٔ این اعداد، میانگین دو عدد وسط است و میانگین دو عدد وسط با میانگین اعداد اول و آخر دسته برابر، پس:

میانه : $\frac{۲^{۱۲}+۱+۲^{۱۳}}{۲} = \frac{۴۰۹۶+۱+۸۱۹۲}{۲} = \frac{۱۲۲۸۹}{۲} = ۶۱۴۴/۵$

---

۲۴ گزینه ۴ می‌دانیم الگوی خطی همان دنبالهٔ حسابی است. پس در این سؤال دو دنبالهٔ حسابی داریم که اولی را به‌صورت a_n و قدرنسبت d و دومی را به‌صورت b_n و قدرنسبت d' در نظر می‌گیریم. طبق فرض داریم:

$$\begin{cases} a_۴ = b_۲ \\ a_۸ = b_۷ \end{cases} \Rightarrow \overbrace{a_۸ - a_۴}^{۴d} = \overbrace{b_۷ - b_۲}^{۵d'} \quad (*)$$

$$b_{۱۰} = ۰ \Rightarrow b_{۱۵} = b_{۱۰} + ۵d' = ۰ + ۵d' \xrightarrow{(*)} b_{۱۵} = ۴d$$

---

۲۵ گزینه ۴

$$a, b, c \xrightarrow{\text{دنبالهٔ حسابی}} ۲b = a + c \quad (۱)$$

$$\text{هندسی: } b, \frac{۱}{۲}a, \frac{۱}{۴}c \Rightarrow (\frac{۱}{۲}a)^۲ = \frac{۱}{۴}bc \Rightarrow a^۲ = bc \quad (۲)$$

$$\xrightarrow{(۱)\text{و}(۲)} a^۲ = (\frac{a+c}{۲})c \Rightarrow a^۲ = \frac{ac}{۲} + \frac{c^۲}{۲} \Rightarrow ۲a^۲ = ac + c^۲$$

$$\Rightarrow (a-c)(۲a+c) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} a = c \text{ غ ق ق} \\ ۲a + c = ۰ \end{cases} \Rightarrow \frac{c}{a} = -۲$$

---

۲۶ گزینه ۴

طبق فرض اگر c، b و a سه جمله نخست و متمایز یک دنبالهٔ هندسی باشند و $۲a$، c و $۳b$ سه جمله نخست یک دنباله حسابی باشند، داریم:

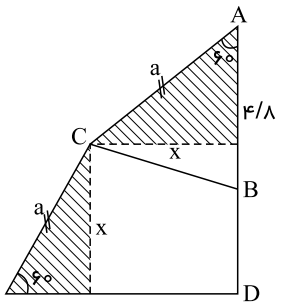
$$\left.\begin{array}{l} a, b, c \Rightarrow ac = b^۲ (۱) \\ ۳b, ۲a, c \Rightarrow ۳b + c = ۴a (۲) \end{array}\right\} \rightarrow ۳ar + ar^۲ = ۴a \rightarrow a(r^۲ + ۳r - ۴) = ۰ \rightarrow r = -۴ \, , r = ۱ \text{ غ ق ق}$$

$$\frac{\text{جملهٔ نهم دنبالهٔ هندسی}}{\text{جملهٔ ششم دنبالهٔ هندسی}} = \frac{ar^۸}{ar^۵} = r^۳ \xrightarrow{r=-۴} \text{نسبت خواسته‌شده} = (-۴)^۳ = -۶۴$$

---

۲۷ گزینه ۲ طبق مساحت سینوسی مثلث ABC داریم:

WWW.ArefOnline.ir



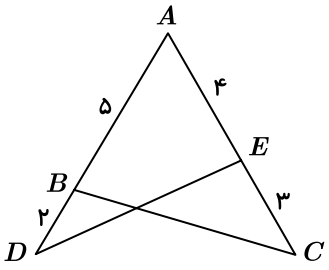
$$\begin{cases} S_{ABC} = \frac{۱}{۲}a \times ۴/۸ \times \sin ۶۰^\circ \\ \text{فرض}: S_{ABC} = ۷/۲\sqrt{۳} \end{cases} \rightarrow ۱/۲a\sqrt{۳} = ۷/۲\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۶$$

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ هاشورخورده با هم هم‌نهشت‌اند و داریم $x = a\sin ۶۰^\circ = ۳\sqrt{۳}$؛ پس CD قطر مربعی به ضلع $۳\sqrt{۳}$ است و درنتیجه:

$$CD = ۳\sqrt{۳} \times \sqrt{۲} = ۳\sqrt{۶}$$

---

۲۸ گزینه ۲



$$S_{\overset{\Delta}{ABC}} - S_{\overset{\Delta}{ADE}} = ۱/۷۵$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۷ \times \sin\hat{A} - \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۴ \times \sin\hat{A} = ۱/۷۵$$

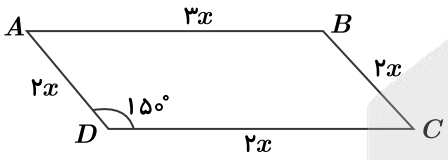
$$\Rightarrow \frac{۱}{۲} \times ۵ \times ۷ \times \sin\hat{A} - \frac{۱}{۲} \times ۷ \times ۴ \times \sin\hat{A} = \frac{۷}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\sin\hat{A} = \frac{۱}{۴} \Rightarrow \sin\hat{A} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \hat{A} = \frac{\pi}{۶}$$

$$\Rightarrow \tan\hat{A} = \tan\frac{\pi}{۶} = \frac{\sqrt{۳}}{۳} = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$$

---

۲۹ گزینه ۴

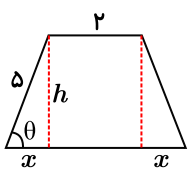


$$S_{\text{متوازی‌الاضلاع}} = ۲x \times ۳x \times \sin ۱۵۰^\circ = ۵۴ \Rightarrow ۶x^۲ \times \frac{۱}{۲} = ۵۴$$

$$x^۲ = ۱۸ \Rightarrow x = ۳\sqrt{۲} \Rightarrow \text{محیط متوازی‌الاضلاع} = ۱۰x = ۳۰\sqrt{۲}$$

---

۳۰ گزینه ۲ چون مقدار $\cos\theta$ مثبت است، پس θ زاویهٔ حاده است.



$$S = \frac{[۲ + (۲ + ۲x)] \times h}{۲}$$

$$\cos\theta = \frac{x}{۵} = ۰/۶ \Rightarrow x = ۳$$

$$\sin\theta = \sqrt{۱ - ۰.۶^۲} = ۰/۸ \Rightarrow \frac{h}{۵} = ۰/۸ \Rightarrow h = ۴$$

$$\Rightarrow S = \frac{(۲ + ۸) \times ۴}{۲} = ۲۰$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۱ گزینه ۲

$$\frac{۱}{\sqrt{\cos^۲\alpha}} - \tan\alpha = \frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$
$$\frac{۱}{|\cos\alpha|} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۱+\sin\alpha}{|\cos\alpha|}$$

تساوی فوق زمانی برقرار است که $\cos\alpha < ۰$ باشد؛ زیرا در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{-۱}{\cos\alpha} - \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \frac{۱+\sin\alpha}{-\cos\alpha}$$
$$\frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \frac{-۱}{\cot\alpha} \Rightarrow \frac{|\sin\alpha|}{\cos\alpha} = \frac{-\sin\alpha}{\cos\alpha}$$
$$\Rightarrow \text{باید } \sin\alpha < ۰$$

با توجه به اینکه باید $\cos\alpha < ۰$ و $\sin\alpha < ۰$ باشد پس α در ناحیه سوم دایرهٔ مثلثاتی است.

۳۲ گزینه ۴

$$۱ + \cot^۲ C = \frac{۱}{\sin^۲ C} \to ۱ + \cot^۲ C = \frac{۱۶۹}{۲۵} \to \cot^۲ C = \frac{۱۴۴}{۲۵} \to \cot C = \frac{۱۲}{۵}$$
$$\overset{\Delta}{AHC} : \cot C = \frac{CH}{AH} \to \frac{۱۲}{۵} = \frac{۹}{AH} \to ۱۲AH = ۴۵ \to AH = ۳/۷۵$$

۳۳ گزینه ۳ طرفین $۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$ را بر $\cos^۲ x$ تقسیم می‌کنیم و از رابطهٔ $\frac{۱}{\cos^۲ x} = ۱ + \tan^۲ x$ استفاده می‌کنیم.

$$\frac{۲\sin^۲ x}{\cos^۲ x} + \frac{\cos^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{۴}{۳} \times \frac{۱}{\cos^۲ x} \Rightarrow ۲\tan^۲ x + ۱ = \frac{۴}{۳}(۱ + \tan^۲ x)$$
$$\xrightarrow{\times ۳} ۶\tan^۲ x + ۳ = ۴ + ۴\tan^۲ x \Rightarrow ۲\tan^۲ x = ۱ \Rightarrow \tan^۲ x = \frac{۱}{۲}$$

روش دوم: از روابط $\sin^۲ x = ۱ - \cos^۲ x$ و $\cos^۲ x = ۱ - \sin^۲ x$ استفاده می‌کنیم.

$$۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$$
$$۲\sin^۲ x + ۱ - \sin^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow \sin^۲ x = \frac{۴}{۳} - ۱ = \frac{۱}{۳}$$
$$۲\sin^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲(۱ - \cos^۲ x) + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳} \Rightarrow ۲ - ۲\cos^۲ x + \cos^۲ x = \frac{۴}{۳}$$
$$\Rightarrow \cos^۲ x = ۲ - \frac{۴}{۳} = \frac{۲}{۳}$$
$$\tan^۲ x = \frac{\sin^۲ x}{\cos^۲ x} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۲}{۳}} = \frac{۱}{۲}$$

۳۴ گزینه ۲ با توجه به رابطهٔ داده‌شده، مقدار کسینوس را به دست می‌آوریم:

$$\sin\alpha = ۲\cos\alpha \Rightarrow \tan\alpha = ۲$$

می‌دانیم:

$$۱ + \tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \Rightarrow \frac{۱}{\cos^۲\alpha} = ۱ + ۴ = ۵ \Rightarrow \cos^۲\alpha = \frac{۱}{۵}$$
$$\xrightarrow[\cos\alpha < ۰]{\text{ربع سوم}} \cos\alpha = \frac{-۱}{\sqrt{۵}} = -\frac{\sqrt{۵}}{۵}$$

WWW.ArefOnline.ir

۳۵ گزینه ۳ روش اول: به‌ازای حاصل عبارت برابر ۱ و به‌ازای $\alpha = \frac{\pi}{۲}$ برابر -۱ است که این تساوی‌ها فقط در گزینه «۳» دیده می‌شود.

روش دوم: در فرمول‌های مثلثاتی داریم:

$$\sin^۴\alpha = (۱ - \cos^۲\alpha)^۲ = \cos^۴\alpha - ۲\cos^۲\alpha + ۱$$

$$\cos^۴\alpha = (۱ - \sin^۲\alpha)^۲ = \sin^۴\alpha - ۲\sin^۴\alpha + ۱$$

این فرمول‌ها را در صورت سؤال جای‌گذاری می‌کنیم و سپس داریم:

$$\Rightarrow T = \frac{\cos^۴ + ۲\cos^۲\alpha + ۱}{\cos^۲\alpha + ۱} - \frac{\sin^۴\alpha + ۲\sin^۴\alpha + ۱}{\sin^۲\alpha + ۱} = \frac{(\cos^۲\alpha + ۱)^۲}{\cos^۲\alpha + ۱} - \frac{(\sin^۲\alpha + ۱)^۲}{\sin^۲\alpha + ۱} = \cos^۲\alpha -$$

$$\sin^۲\alpha = \cos ۲\alpha$$

۳۶ گزینه ۲ می‌دانیم $a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m}$ است.

$$A = \sqrt[۵]{۴\sqrt[۳]{۱۶}} \times (\frac{۱}{۲})^{-\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲ \times \sqrt[۳]{۲^۴}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^۲ \times ۲^{\frac{۴}{۳}}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = \sqrt[۵]{۲^{\frac{۱۰}{۳}}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}}$$

$$= (۲^{\frac{۱۰}{۳}})^{\frac{۱}{۵}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^{\frac{۱۰}{۱۵}} \times ۲^{\frac{۴}{۳}} = ۲^۲$$

پس: $(۲A)^{-\frac{۱}{۲}} = (۲ \times ۲^۲)^{-\frac{۱}{۲}} = (۲^۳)^{-\frac{۱}{۲}} = ۲^{-۱} = \frac{۱}{۲} = ۰/۵$

۳۷ گزینه ۳

مقدار A را به ساده‌ترین حالت ممکن درمی‌آوریم:

$$A = \sqrt[۵]{۹\sqrt{۳}}(۱۲)^{-۱/۵} = \sqrt[۵]{۳^۲ \times ۳^{\frac{۱}{۲}}}(۲^۲ \times ۳)^{-\frac{۳}{۲}} = \sqrt[۵]{۳^{\frac{۵}{۲}}}(۲^{-۳} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}})$$

$$= (۳^{\frac{۵}{۲}})^{\frac{۱}{۵}} \times ۲^{-۳} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} = ۳^{\frac{۱}{۲}} \times ۳^{-\frac{۳}{۲}} \times ۲^{-۳} = ۳^{-۱} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۸} = \frac{۱}{۲۴}$$

پس: $(۱ + A^{-۱})^{\frac{۱}{۲}} = (۱ + ۲۴)^{\frac{۱}{۲}} = ۲۵^{\frac{۱}{۲}} = (۵^۲)^{\frac{۱}{۲}} = ۵$

۳۸ گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$a^{\frac{۱}{۷}} = ۲۷a^{\frac{۱۵}{۷}} \Rightarrow ۲۷a^۲ = ۱ \Rightarrow a^۲ = \frac{۱}{۲۷} \xrightarrow{a>۰} a = \frac{۱}{۳\sqrt{۳}}$$

عبارت مورد نظر : $\frac{\frac{۱}{a} - ۳}{۱ + \sqrt{۳}} = \frac{۳\sqrt{۳} - ۳}{۱ + \sqrt{۳}} \times \frac{\sqrt{۳} - ۱}{\sqrt{۳} - ۱} = \frac{۳(\sqrt{۳} - ۱)^۲}{۲} = \frac{۳(۴ - ۲\sqrt{۳})}{۲} = ۶ - ۳\sqrt{۳}$

۳۹ گزینه ۲

ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{۸} + \sqrt{۲۷}}{۵ - \sqrt{۶}} = \frac{۲\sqrt{۲} + ۳\sqrt{۳}}{۵ - \sqrt{۶}} \times \frac{۵ + \sqrt{۶}}{۵ + \sqrt{۶}} = \frac{۱۰\sqrt{۲} + ۲\sqrt{۱۲} + ۱۵\sqrt{۳} + ۳\sqrt{۱۸}}{۲۵ - ۶}$$

$$= \frac{۱۰\sqrt{۲} + ۴\sqrt{۳} + ۱۵\sqrt{۳} + ۹\sqrt{۲}}{۱۹} = \frac{۱۹\sqrt{۲} + ۱۹\sqrt{۳}}{۱۹} = \frac{۱۹(\sqrt{۲} + \sqrt{۳})}{۱۹} = \sqrt{۲} + \sqrt{۳}$$

WWW.ArefOnline.ir

$$۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=\frac{۲}{\sqrt[۴]{۳^۲}-۱}=\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}\times\frac{\sqrt{۳}+۱}{\sqrt{۳}+۱}=\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۳-۱}=\sqrt{۳}+۱$$

$$\text{پس : }\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}-۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱=\sqrt{۲}-۱$$

روش دوم:

$$\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{۵-\sqrt{۶}}-۲(\sqrt[۴]{۹}-۱)^{-۱}=\frac{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}{(\sqrt{۲})^۲+(\sqrt{۳})^۲-(\sqrt{۲}\times\sqrt{۳})}\times\frac{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}+\sqrt{۳}}-\frac{۲}{\sqrt{۳}-۱}$$

$$=\frac{(\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷})(\sqrt{۲}+\sqrt{۳})}{\sqrt{۸}+\sqrt{۲۷}}-\frac{۲(\sqrt{۳}+۱)}{۲}=\sqrt{۲}+\sqrt{۳}-\sqrt{۳}-۱=\sqrt{۲}-۱$$

۴۰ گزینه ۱ ابتدا هر دو عبارت را ساده می‌کنیم.

$$\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}=\frac{۳\sqrt{۳}-۱}{۴+\sqrt{۳}}\times\frac{۴-\sqrt{۳}}{۴-\sqrt{۳}}=\frac{۱۲\sqrt{۳}-۹-۴+\sqrt{۳}}{۱۶-۳}=\frac{۱۳\sqrt{۳}-۱۳}{۱۳}=\frac{۱۳(\sqrt{۳}-۱)}{۱۳}=\sqrt{۳}-۱$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\frac{۱}{۲-\sqrt{۳}}\times\frac{۲+\sqrt{۳}}{۲+\sqrt{۳}}=\frac{۲+\sqrt{۳}}{۴-۳}=۲+\sqrt{۳}$$

$$\text{پس: }\frac{\sqrt{۲۷}-۱}{۴+\sqrt{۳}}+(۲-\sqrt{۳})^{-۱}=\sqrt{۳}-۱+۲+\sqrt{۳}=۱+۲\sqrt{۳}$$

۴۱ گزینه ۲

$$\sqrt[۴]{(۴+\sqrt{۷})^{-۱}}\times\sqrt{۱+\sqrt{۷}}=\sqrt[۴]{\frac{۱}{۴+\sqrt{۷}}}\times\sqrt[۴]{(۱+\sqrt{۷})^۲}=\frac{۱}{\sqrt[۴]{۴+\sqrt{۷}}}\times\sqrt[۴]{۱+۷+۲\sqrt{۷}}=\frac{\sqrt[۴]{۸+۲\sqrt{۷}}}{\sqrt[۴]{۴+\sqrt{۷}}}$$

$$=\sqrt[۴]{\frac{۲(۴+\sqrt{۷})}{۴+\sqrt{۷}}}=\sqrt[۴]{۲}$$

۴۲ گزینه ۳

$$\sqrt[۴]{\sqrt[۳]{۲۸}}\times\sqrt[۴]{۱۶۲}\times\sqrt{۴\sqrt[۶]{۲}}=\sqrt[۱۲]{۲۸}\times۳\sqrt[۴]{۲}\times۲\sqrt[۱۲]{۲}$$

$$=۲^{\frac{۸}{۱۲}}\times۳\times۲^{\frac{۱}{۴}}\times۲\times۲^{\frac{۱۰}{۱۲}}=۲^{\frac{۲}{۱۲}}\times۶=۱۲$$

$$\frac{۱۲}{\sqrt{۶}}=۲\sqrt{۶}$$

۴۳ گزینه ۱

داریم: $\sqrt[۳]{۴۹}=۷^{\frac{۲}{۳}}$. اکنون عبارت را برحسب توان‌های ۷ بازنویسی می‌کنیم.

$$A=\frac{\sqrt[۸]{۴۹\sqrt[۳]{۷}}}{۷\sqrt[۴]{۳۴۳\sqrt{۷^{-۱}}}}=\frac{(۷^۲\times۷^{\frac{۱}{۳}})^{\frac{۱}{۸}}}{۷(۷^۳\times۷^{-\frac{۱}{۲}})^{\frac{۱}{۴}}}=\frac{۷^{\frac{۷}{۲۴}}}{۷^{\frac{۱۳}{۸}}}=\frac{۷^{\frac{۷}{۲۴}}}{۷^{\frac{۳۹}{۲۴}}}=۷^{\frac{-۳۲}{۲۴}}$$

$$\Rightarrow\frac{A}{\sqrt[۳]{۴۹}}=\frac{۷^{-\frac{۳۲}{۲۴}}}{۷^{\frac{۲}{۳}}}=۷^{\frac{-۴۸}{۲۴}}=۷^{-۲}=\frac{۱}{۴۹}$$

۴۴ گزینه ۴ برای پاسخ به سؤال ابتدا صورت عبارت خواسته‌شده را کمی ساده می‌کنیم در این سؤال اتحاد مربع دو جمله‌ای و مزدوج مورد استفاده قرار می‌گیرند.

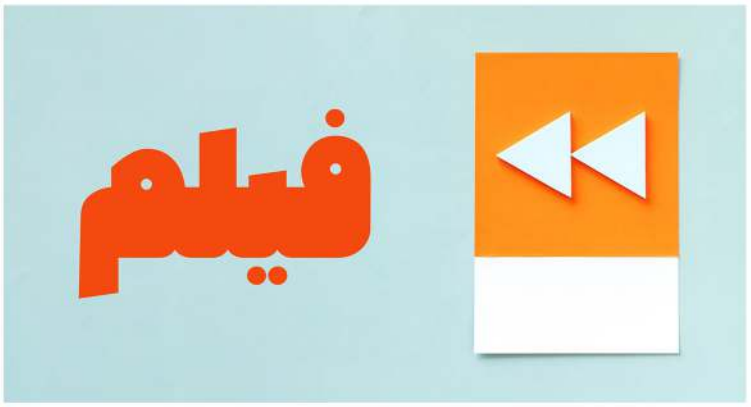
$$(a^۲+b^۲-۲ab)^۲(a^۲+b^۲+۲ab)^۲\xrightarrow{\text{مربع دو جمله‌ای}}((a-b)^۲)^۲((a+b)^۲)^۲$$

WWW.ArefOnline.ir

آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

$= (a-b)^۴(a+b)^۴ = ((a-b)(a+b))^۴ = (a^۲-b^۲)^۴$

و امّا $a^۲ = \sqrt{\sqrt{۶}-۲}$ و $b^۲ = \sqrt{\sqrt{۶}+۲}$ می‌شوند پس داریم:

$((\sqrt{\sqrt{۶}-۲} - \sqrt{\sqrt{۶}+۲})^۲)^۲ = (\sqrt{۶}-۲+\sqrt{۶}+۲-۲\sqrt{۶-۴})^۲ = (۲\sqrt{۶}-۲\sqrt{۲})^۲$

$= ۲۴ + ۸ - ۸\sqrt{۱۲} = ۳۲ - ۱۶\sqrt{۳} = ۱۶(۲-\sqrt{۳})$

---

۴۵ گزینه ۴ داخل پرانتز اول مخرج مشترک می‌گیریم:

$(\sqrt[۳]{x^۲} + \frac{۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} + ۱)(\sqrt[۳]{x^۲} - ۱) = ۲\sqrt[۳]{x} = \frac{(\sqrt[۳]{x^۴}+۱+\sqrt[۳]{x^۲})(\sqrt[۳]{x^۲}-۱)}{\sqrt[۳]{x^۲}} = ۲\sqrt[۳]{x} \xrightarrow{\text{اتحاد چاق و لاغر}} \frac{x^۲-۱}{\sqrt[۳]{x^۲}} = ۲\sqrt[۳]{x}$

$\Rightarrow x^۲ - ۱ = ۲x \Rightarrow x^۲ - ۲x - ۱ = ۰$

می‌دانیم معادلهٔ درجهٔ ۲ به‌صورت $x^۲ - sx + p$ است. درواقع مجموع ریشه‌ها ۲ خواهد بود.

داریم:

$x_۱ + x_۲ = s = ۲$

---

۴۶ گزینه ۳ در فرض سؤال در سمت چپ، مخرج مشترک گرفته و داریم:

$\frac{۱}{a^۳+۱} + \frac{۱}{a^۳-۱} = ۲ \Rightarrow \frac{a^۳-۱+a^۳+۱}{(a^۳+۱)(a^۳-۱)} = ۲ \Rightarrow \frac{۲a^۳}{a^۶-۱} = ۲ \Rightarrow \frac{a^۳}{a^۶-۱} = ۱ \Rightarrow a^۶ - ۱ = a^۳ \Rightarrow a^۶ = a^۳ + ۱ \quad (۱)$

حال خواستهٔ سؤال را محاسبه می‌کنیم:

$(\frac{۱}{a^۳-\sqrt{a^۳}+۱} + \frac{۱}{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱})^{۱۴۰۱} = (\frac{a^۳+\sqrt{a^۳}+۱+a^۳-\sqrt{a^۳}+۱}{(a^۳+۱-\sqrt{a^۳})(a^۳+۱+\sqrt{a^۳})})^{۱۴۰۱} =$

$(\frac{۲a^۳+۲}{(a^۳+۱)^۲-a^۳})^{۱۴۰۱} \xrightarrow{(۱)} (\frac{۲a^۳+۲}{a^۶+۲a^۳+۱-a^۳})^{۱۴۰۱} \xrightarrow{(۱)} (\frac{۲a^۳+۲}{a^۳+۱+۲a^۳+۱-a^۳})^{۱۴۰۱} = (\frac{۲a^۳+۲}{۲a^۳+۲})^{۱۴۰۱} =$

$۱^{۱۴۰۱} = ۱$

---

۴۷ گزینه ۴

فرض: $\frac{\sqrt{۱+\sqrt{۳}}+\sqrt{\sqrt{۳}-۱}}{\sqrt{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}}} = A \xrightarrow{\text{به توان ۲}}$

$\frac{۱+\sqrt{۳}+\sqrt{۳}-۱+۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} = A^۲ \Rightarrow \frac{۲\sqrt{۳}+۲\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} = A^۲ \xrightarrow{\text{مزدوج مخرج } x}$

$\Rightarrow A^۲ = \frac{۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})}{\sqrt{۳}-\sqrt{۲}} \times \frac{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}} = \frac{۲(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})^۲}{۱} \xrightarrow{A>۰} A = \sqrt{۲}(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})$

$\Rightarrow A = \sqrt{۶}+۲ \Rightarrow$ حاصل عبارت مطلوب $= \sqrt{۶}+۲-۲ = \sqrt{۶}$

---

۴۸ گزینه ۱

h = ارتفاع و x = قاعده

WWW.ArefOnline.ir

$h = ۳x + ۲$

$S_۱ = \frac{۱}{۲}x(۳x+۲) \qquad S_۲ = \frac{۱}{۲}(x+۴)(۳x+۶)$

$S_۲ = \frac{۹}{۲}S_۱ \quad \Rightarrow \frac{۱}{۲}(x+۴)(۳x+۶) = \frac{۹}{۲} \times \frac{۱}{۲}x(۳x+۲)$

$۶x^۲ + ۳۶x + ۴۸ = (۳x^۲ + ۲x) \times ۹ \Rightarrow ۶x^۲ + ۳۶x + ۴۸ = ۲۷x^۲ + ۱۸x$

$۲۱x^۲ - ۱۸x - ۴۸ = ۰ \Rightarrow ۷x^۲ - ۶x - ۱۶ = ۰$

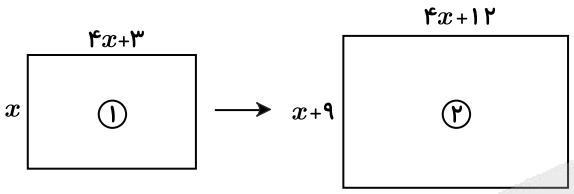
$x = \frac{۳ \pm \sqrt{۱۲۱}}{۷} = \frac{۳ \pm ۱۱}{۷} = \begin{cases} ۲ \ \checkmark \\ -\frac{۸}{۷} \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow S_۱ = \frac{۱}{۲} \times ۲ \times ۸ = ۸$

---

۴۹ گزینه ۴

داریم:



$P_۱ = ۲(۵x+۳)$

$\frac{s_۲}{s_۱} = \frac{(۴x+۱۲)(x+۹)}{x(۴x+۳)} = ۱۰ \Rightarrow ۳۶x^۲ - ۱۸x - ۱۰۸ = ۰$

$\Rightarrow ۲x^۲ - x - ۶ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x_۱ = \frac{۱+۷}{۴} = ۲ \checkmark \\ x_۲ = \frac{۱-۷}{۴} < ۰ \text{ غ ق ق} \end{cases}$

$\Rightarrow P_۱ = ۲(۱۳) = ۲۶$

---

۵۰ گزینه ۱ هر نامعادله را جداگانه حل کرده و از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

$\frac{۲x-۳}{x+۱} > ۱ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱} - ۱ > ۰ \Rightarrow \frac{x-۴}{x+۱} > ۰ \rightarrow$

x	$-\infty$	-۱	۴	$+\infty$
	+	ت ن −	۰	+

$\Rightarrow x < -۱$ یا $x > ۴$

$\frac{۲x-۳}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۳}{x+۱} - ۳ < ۰ \Rightarrow \frac{-x-۶}{x+۱} < ۰ \rightarrow$

x	$-\infty$	-۶	-۱	$+\infty$
	−	۰	+ ت ن	−

$\Rightarrow x < -۶$ یا $x > -۱$

$\Rightarrow x < -۶ \ \text{یا} \ x > -۱ \quad (II)$

از اشتراک (I) و (II) به جواب $x > ۴$ یا $x < -۶$ می‌رسیم که همان $\mathbb{R} - [-۶, ۴]$ است.

---

۵۱ گزینه ۳ چون مجموعه جواب نامعادلهٔ درجه دوم به‌صورت بازهٔ $(a, +\infty)$ است؛ پس نامعادله نمی‌تواند درجه دوم باشد (زیرا در نامعادلهٔ درجه دوم باید مجموعه جواب یا بین دو ریشه یا خارج دو ریشه باشد)؛ پس به‌ناچار باید $۲a + ۳ = ۰$ باشد؛ یعنی $a = -\frac{۳}{۲}$ است. در این صورت نامعادله به‌صورت زیر خواهد بود:

$(۴b - ۵)x + ۴c + ۱ < ۰$

WWW.ArefOnline.ir

بنابراین برای اینکه مجموعه جواب به‌صورت $(a\ ,+\infty)$ باشد، باید ضریب x منفی باشد تا جهت نامعادله عوض شود.

$$x > \frac{-۴c-۱}{۴b-۵}$$

چون b طبیعی است، برای اینکه $۴b-۵ < ۰$ باشد، باید الزاماً $b=۱$ باشد.

$$\Rightarrow x > \frac{-۴c-۱}{-۱} \Rightarrow x > ۴c+۱$$

طبق فرض باید $۴c+۱=a$ که در این صورت داریم:

$$۴c+۱=-\frac{۳}{۲} \Rightarrow c=-\frac{۵}{۸} \Rightarrow \frac{a}{c}=\frac{-\frac{۳}{۲}}{-\frac{۵}{۸}}=۲/۴$$

---

۵۲ گزینه ۱ عبارت $\frac{۱-a}{۹-۳a}$ در صورتی فاقد ریشهٔ دوم است که منفی باشد؛ یعنی داشته باشیم:

a		۱		۳	
$۱-a$	+	۰	-		-
$۹-۳a$	+		+	۰	-
$\frac{۱-a}{۹-۳a}$	+	۰	-	ت‌ن	+

$\frac{۱-a}{۹-۳a} < ۰ \Rightarrow$ ریشه‌ها: $a=۱\ ,a=۳$

طبق جدول تعیین علامت : $۱ < a < ۳$

همچنین اگر $a=۳$ باشد، عبارت تعریف‌نشده خواهد بود؛ پس به‌ازای دو مقدار $a=۲$ و $a=۳$ ریشهٔ دوم عبارت موردنظر وجود ندارد.

---

۵۳ گزینه ۳ روش اول:

$$\frac{۷x-۸}{x^۲-x-۲} > \frac{x}{x-۲} \rightarrow \frac{۷x-۸}{(x-۲)(x+۱)} - \frac{x}{x-۲} > ۰$$

$$\rightarrow \frac{۷x-۸-x^۲-x}{(x-۲)(x+۱)} > ۰ \rightarrow \frac{-x^۲+۶x-۸}{(x-۲)(x+۱)} > ۰$$

$$\rightarrow \frac{x^۲-۶x+۸}{(x-۲)(x+۱)} < ۰ \rightarrow \frac{(x-۴)(x-۲)}{(x-۲)(x+۱)} < ۰$$

$$\rightarrow \frac{x-۴}{x+۱} < ۰ \xrightarrow[\text{توجه کنید } x=۲ \text{ مخرج را صفر می‌کند.}]{\text{تعیین علامت}} \begin{array}{c|ccccccc} x & -\infty & & -۱ & & ۴ & & +\infty \\ \hline & + & ن & - & ن & - & ۰ & + \end{array}$$

$$\rightarrow -۱ < x < ۲ \text{ یا } ۲ < x < ۴ \rightarrow x \in (-۱,۲) \cup (۲,۴)$$

روش دوم:

به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x=۰ \longrightarrow \frac{-۸}{-۲} > ۰$: درست ⟵ گزینهٔ دوم حذف می‌شود

$x=۳ \longrightarrow \frac{۱۳}{۴} > ۳$: درست ⟵ گزینه‌های اول و چهارم حذف می‌شوند

WWW.ArefOnline.ir

۵۴ گزینه ۳

$$(۵-۲m)x^۲-(۲m+n-۵)x-n<۰$$

در معادلهٔ درجهٔ ۲، $ax^۲+bx+c=۰$ اگر $a+c=b$ باشد، آن‌گاه یکی از ریشه‌ها برابر با -۱ است:

$$\begin{cases} x_۱=-۱ \\ x_۲=\dfrac{n}{۵-۲m} \end{cases}$$

با توجه به مجموعه جواب نامعادله باید ضریب $x^۲$ مثبت باشد، پس با توجه به طبیعی بودن m داریم: $m=۱$ یا $m=۲$

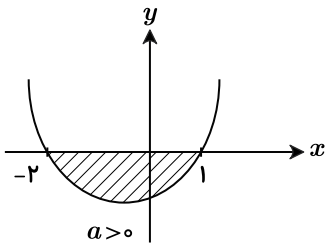
اگر $m=۱$ $\Rightarrow$ بازهٔ جواب $=(-۱,-۱)$ غ ق ق

پس $m=۲$ قابل قبول است.

$$\Rightarrow \frac{n}{۵-۲m}=m-۲ \Rightarrow \frac{n}{۱}=۰ \Rightarrow n=۰$$

$$\Rightarrow m+n=۲$$

۵۵ گزینه ۱ نامعادله به‌صورت زیر است:



$$\underbrace{(m+۴)x^۲+(m-n+۴)x-n}_{A}<۰ \xrightarrow{\text{پاسخ:}(m+۱,-۱)} A\text{دو ریشه دارد}$$

$$\Rightarrow m+۴>۰, \text{ریشه‌ها}: m+۱,-۱,m+۱<-۱$$

$$\Rightarrow -۴<m<-۲ \xrightarrow{m\in\mathbb{Z}} m=-۳ \Rightarrow A\text{ریشه‌های}=\{-۲,-۱\}$$

$$\Rightarrow A=x^۲+(۱-n)x-n \xrightarrow{A(-۲)=۰} ۴+۲n-۲-n=۰ \Rightarrow n=-۲$$

$$\Rightarrow mn=(-۳)(-۲)=۶$$

۵۶ **روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم گزینه ۴.**

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}>۱ \rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱}=\frac{۱}{۱}>۰ \rightarrow \frac{x+۱-۲x+۱}{۲x-۱}>۰ \rightarrow \frac{-x+۲}{۲x-۱}>۰$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \frac{۱}{۲} & & ۲ & +\infty \\ \hline & - & \text{ت ن} & + & ۰ & - \end{array} \rightarrow \frac{۱}{۲}<x<۲ \quad (I)$$

$$\frac{x+۱}{۲x-۱}<۳ \rightarrow \frac{x+۱}{۲x-۱}-\frac{۳}{۱}<۰ \rightarrow \frac{x+۱-۶x+۳}{۲x-۱}<۰ \rightarrow \frac{-۵x+۴}{۲x-۱}<۰$$

$$\rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & \frac{۱}{۲} & & \frac{۴}{۵} & +\infty \\ \hline & - & \text{ت ن} & + & ۰ & - \end{array} \rightarrow x>\frac{۱}{۲} \text{ یا } x<\frac{۴}{۵} \quad (II)$$

$(۰/۸<x<۲)$ از اشتراک I و II به جواب $\frac{۴}{۵}<x<۲$ می‌رسیم

WWW.ArefOnline.ir

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم

$x = ۱/۵ \xrightarrow{\text{نامعادله}} ۱ < \frac{۲/۵}{۲} < ۳$: درست ← گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند

$x = ۱ \xrightarrow{\text{نامعادله}} ۱ < ۲ < ۳$: درست ← گزینهٔ سوم حذف می‌شود

---

۵۷ گزینه ۳

روش اول: هر نامعادله را جداگانه حل کرده و سپس از جواب‌ها اشتراک می‌گیریم.

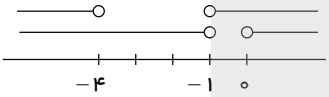
$$\frac{۲x-۱}{x+۱} > -۱ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} + \frac{۱}{۱} > ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱+x+۱}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{۳x}{x+۱} > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -۱ & ۰ & +\infty \\ \hline & + & \text{تن} - & ۰ & + \end{array} \Rightarrow x < -۱ \text{یا} x > ۰ \quad (I)$$

$$\frac{۲x-۱}{x+۱} < ۳ \Rightarrow \frac{۲x-۱}{x+۱} - \frac{۳}{۱} < ۰ \Rightarrow \frac{۲x-۱-۳x-۳}{x+۱} < ۰ \Rightarrow \frac{-x-۴}{x+۱} < ۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & -\infty & -۴ & -۱ & +\infty \\ \hline & - & ۰ & + \text{تن} & - \end{array} \Rightarrow x < -۴ \text{یا} x > -۱ \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک } II,I}$$



$$\Rightarrow x < -۴ \text{یا} x > ۰ \Rightarrow x \in \mathbb{R} - [-۴, ۰]$$

روش دوم: تست را به روش عددگذاری حل می‌کنیم.

$x = -۵ \xrightarrow{\text{نامعادله}} -۱ < \frac{۱۱}{۴} < ۳$: درست ⇒ گزینه‌های اول و دوم حذف می‌شوند.

$x = ۰ \xrightarrow{\text{نامعادله}} -۱ < -۱ < ۳$: نادرست ⇒ گزینهٔ چهارم حذف می‌شود.

---

۵۸ گزینه ۲ البته مجموعهٔ نامعادله باید بازهٔ $(۲, ۴)$ باشد نه $[۲, ۴]$ از طرفی مخرج کسر به ازای $x > \frac{۳}{۲}$ همواره مثبت است.

$$x - ۳\sqrt{x} + ۲ = ۰ \Rightarrow (\sqrt{x}-۱)(\sqrt{x}-۲) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = ۱ \\ x = ۴ \end{cases}$$

در بازهٔ $(۱, ۴)$ عبارت فوق، منفی است و برای آن که جواب نامعادلهٔ $(۲, ۴)$ باشد در این بازه پرانتز اول نیز باید منفی باشد. در ضمن $x = ۲$ ریشهٔ این عبارت است.

$$x = ۲ \Rightarrow ۴m^۲ - ۴ - ۸m + ۴ = ۰ \Rightarrow \begin{cases} m = ۰ \\ m = ۲ \end{cases}$$

$$if \;\; m = ۰ \Rightarrow (-x^۲ + ۴)$$

این عبارت در بازهٔ $(۲, ۴)$ همواره منفی است و قابل قبول است.

$$if \;\; m = ۲ \Rightarrow (۳x^۲ - ۸x + ۴)$$

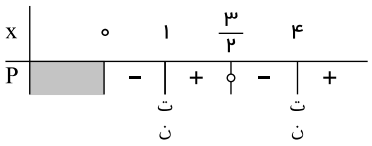
این عبارت در بازهٔ $(۲, ۴)$ مثبت است و قابل قبول نیست. بنابراین فقط $m = ۰$ مورد قبول است.

---

۵۹ گزینه ۲ گزینه‌ها را امتحان می‌کنیم. توجه کنید که به دلیل وجود $\sqrt{x}$، باید $x \geq ۰$ باشد.

WWW.ArefOnline.ir

$$m=-1 \Rightarrow P=\frac{\overbrace{(4x+4)}^{\text{مثبت}}(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow \frac{2x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$



$\Rightarrow$ جواب : $(1 , \frac{3}{2}] \cup (4 , +\infty)$

$$m=\frac{1}{3} \Rightarrow P=\frac{(-\frac{8}{9}x^2-\frac{4}{3}x+4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(-\frac{9}{4})} P=\frac{(2x^2+3x-9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0$$

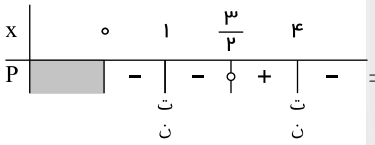
$$\Rightarrow \frac{(x+3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \leq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس $x=\frac{3}{2}$ یکی از جواب‌های نامعادله است. از طرفی به دلیل $x \geq 0$، عبارت $x+3$ مثبت است، پس:

$$(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)<0 \Rightarrow 1<x<4$$

$x=\frac{3}{2}$ در بازهٔ $(1 , 4)$ قرار دارد، پس این بازه جواب نامعادله است.

$$m=1 \Rightarrow P=\frac{(-4x+4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$



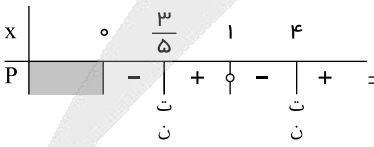
$\Rightarrow$ جواب : $[\frac{3}{2} , 4)$

$$m=\frac{7}{3} \Rightarrow P=\frac{(\frac{40}{9}x^2-\frac{28}{3}x+4)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \xrightarrow{\times(\frac{9}{4})} P=\frac{(10x^2-21x+9)(2x-3)}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

$$\Rightarrow \frac{(5x-3)(2x-3)^2}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0$$

عبارت $(2x-3)^2$ همواره نامنفی است، پس:

$$\xrightarrow{x=\frac{3}{2}} \frac{5x-3}{(\sqrt{x}-1)(\sqrt{x}-2)} \geq 0 \Rightarrow$$



$\Rightarrow$ جواب : $[\frac{3}{5} , 1) \cup (4 , +\infty) \cup \{\frac{3}{2}\}$

---

۶۰ گزینه ۲ ابتدا نامعادلهٔ دوطرفهٔ $-2 < \frac{1-3x}{x+1} < 0$ را حل می‌کنیم.

$$\frac{1-3x}{x+1}<0 \Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -1 & & \frac{1}{3} & \\ \hline \frac{1-3x}{x+1} & - & \text{ت ن} & + & 0 & - \end{array} \Rightarrow x<-1 \text{ یا } x>\frac{1}{3} \quad (1)$$

WWW.ArefOnline.ir

$$\frac{۱-۳x}{x+۱} > -۲ \Rightarrow \frac{۱-۳x}{x+۱} + ۲ > ۰ \Rightarrow \frac{۱-۳x+۲x+۲}{x+۱} > ۰ \Rightarrow \frac{۳-x}{x+۱} > ۰$$

$$\Rightarrow \begin{array}{c|ccccc} x & & -۱ & & ۳ & \\ \hline \frac{۳-x}{x+۱} & - & ۰ & + & ۰ & - \end{array} \Rightarrow -۱ < x < ۳ \quad (۲)$$

اشتراک (۱) و (۲) جواب نامعادله است.

$$(۱) \cap (۲) : \frac{۱}{۳} < x < ۳$$

حال حدود $\frac{x}{۲}$ و سپس $\left[\frac{x}{۲}\right]$ را محاسبه می‌کنیم.

$$\frac{۱}{۶} < \frac{x}{۲} < \frac{۳}{۲} \Rightarrow \left[\frac{x}{۲}\right] = ۰, ۱$$

---

۶۱ گزینه ۴ طبق فرض داریم:

$$-۲ < \frac{۲}{x^۲-۳x+۲} < ۰ \Rightarrow \frac{x^۲-۳x+۲}{۲} < \frac{-۱}{۲} \Rightarrow x^۲-۳x+۲ < -۱ \Rightarrow x^۲-۳x+۳ < ۰ \quad (*)$$

در عبارت درجه دوم $x^۲-۳x+۳$ داریم $\Delta = ۹-۱۲ < ۰ , a = ۱ > ۰$، پس این عبارت همواره مثبت بوده و نامعادله (*) هیچ جواب حقیقی ندارد.

---

۶۲ گزینه ۱ روش اول: باید نامعادلهٔ $|۲x^۲-۴| < ۲x$ را حل کنیم می‌دانیم که ریشه‌های داخل قدرمطلق $\pm\sqrt{۲}$هستند.

$$x < -\sqrt{۲} : ۲x^۲-۴ < ۲x \to ۲x^۲-۲x-۴ < ۰ \to x^۲-x-۲ < ۰ \to (x-۲)(x+۱) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing$$

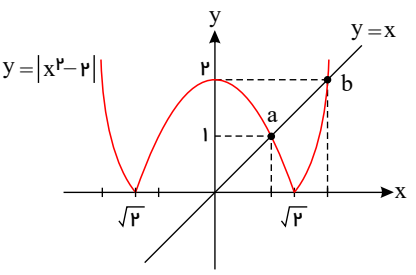
$$-\sqrt{۲} \le x \le \sqrt{۲} : -۲x^۲+۴ < ۲x \to ۲x^۲+۲x-۴ > ۰ \to x^۲+x-۲ > ۰ \to (x+۲)(x-۱) > ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} x < -۲ \text{ یا } x > ۱ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} ۱ < x < \sqrt{۲}$$

$$x > \sqrt{۲} : ۲x^۲-۴ < ۲x \to ۲x^۲-۲x-۴ < ۰ \to x^۲-x-۲ < ۰ \to (x-۲)(x+۱) < ۰$$
$$\xrightarrow{\text{تعیین علامت}} -۱ < x < ۲ \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \sqrt{۲} < x < ۲$$

از اجتماع جواب‌های بدست‌آمده به جواب $x \in (۱, ۲)$ می‌رسیم بنابراین $b-a = ۱$ است.

روش دوم: تابع $y = |۲x^۲-۴|$ و $y = ۲x$ را رسم کرده و مشخص می‌کنیم در چه بازه‌ای تابع $y = |۲x^۲-۴|$ زیر تابع $y = ۲x$ قرار دارد.

$$|۲x^۲-۴| < ۲x \to |۲(x^۲-۲)| < ۲x \to |x^۲-۲| < x$$



برای این منظور باید نقاط a, b را پیدا کنیم.

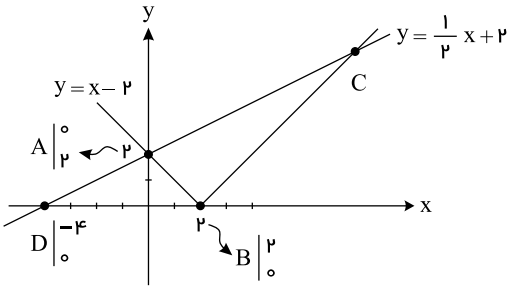
WWW.ArefOnline.ir

$$|x^۲-۲|=x \rightarrow \begin{cases} x^۲-۲=x \rightarrow x^۲-x-۲=۰ \rightarrow (x-۲)(x+۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=۲ & b \\ x=-۱ & \text{غ ق ق} \end{cases} \\ x^۲-۲=-x \rightarrow x^۲+x-۲=۰ \rightarrow (x+۲)(x-۱)=۰ \rightarrow \begin{cases} x=-۲ & \text{غ ق ق} \\ x=۱ & a \end{cases} \end{cases}$$

بنابراین جواب مسأله بازهٔ $(۱,۲)$ است و $b-a=۱$ است.

---

۶۳ گزینه ۴ دو تابع $y=\sqrt{x^۲-۴x+۴}=\sqrt{(x-۲)^۲}=|x-۲|$ و $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ را رسم می‌کنیم.



نقطهٔ C محل برخورد شاخهٔ $y=x-۲$ با خط $y=\frac{۱}{۲}x+۲$ است:

$$\frac{۱}{۲}x+۲=x-۲ \Rightarrow x=۸ \ , \ y=۶ \Rightarrow C \left| \begin{matrix} ۸ \\ ۶ \end{matrix} \right.$$

پس مساحت مثلث ABC (سطح محصور بین دو نمودار) برابر است با:

displaystyle S_\overset {\Delta}{ABC}=S_\overset {\Delta}{BDC} - S_\overset {\Delta}{ABD}\

$$= (\frac{۱}{۲}BD \times y_c) - (\frac{۱}{۲}BD \times y_A) = \frac{۱}{۲}BD(y_C - y_A)$$

$$= \frac{۱}{۲}(۲-۴)(۶-۲) = ۱۲$$

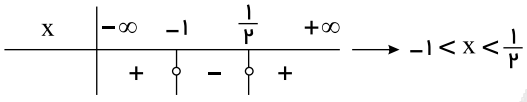
---

۶۴ گزینه ۲ باید نامعادلهٔ $(x-۱)^۲ > ۴x^۴$ را حل کنیم.

$$(x-۱)^۲ > ۴x^۴ \rightarrow \sqrt{(x-۱)^۲} > \sqrt{۴x^۴} \rightarrow |x-۱| > ۲x^۲$$

$$x \geq ۱ : x-۱ > ۲x^۲ \rightarrow ۲x^۲ - x + ۱ < ۰ \xrightarrow[\text{همواره مثبت}]{a>۰,\Delta<۰} \varnothing \xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} \varnothing \quad (I)$$

$$x < ۱ : -x+۱ > ۲x^۲ \rightarrow ۲x^۲ + x - ۱ < ۰$$



$$\xrightarrow{\text{اشتراک با شرط}} -۱ < x < \frac{۱}{۲} \quad (II)$$

از اجتماع I و II به جواب $x \in (-۱, \frac{۱}{۲})$ می‌رسیم و بیش‌ترین مقدار $b-a$ برابر $\frac{۱}{۲}-(-۱)=\frac{۳}{۲}$ است.

---

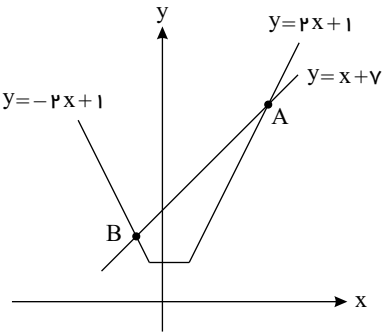
۶۵ گزینه ۴ تابع $y=|x-۲|+|x+۱|$ یک تابع گلدانی است که به‌ازای $x<-۱$ اکیداً نزولی و به‌ازای $x>۲$ اکیداً صعودی و در فاصلهٔ $-۱ \leq x \leq ۲$ ثابت است.

WWW.ArefOnline.ir

$x < -۱ : y = -x + ۲ - x - ۱ \to y = -۲x + ۱$

$-۱ \le x \le ۲ : y = -x + ۲ + x + ۱ \to y = ۳$

$x > ۲ : y = x - ۲ + x + ۱ \to y = ۲x - ۱$



$$\begin{cases} y = ۲x - ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \to x = ۸ \, , \, y = ۱۵ \to A \left| \begin{matrix} ۸ \\ ۱۵ \end{matrix} \right. \quad , \quad \begin{cases} y = -۲x + ۱ \\ y = x + ۷ \end{cases} \to x = -۲ \, , \, y = ۵ \to B \left| \begin{matrix} -۲ \\ ۵ \end{matrix} \right.$$

پس: $AB = \sqrt{(۸+۲)^۲ + (۱۵-۵)^۲} = \sqrt{۱۰۰ + ۱۰۰} = \sqrt{۲۰۰} = ۱۰\sqrt{۲}$

---

۶۶ گزینه ۱ طبق فرض داریم:

$$۱۵x^۲ + ۷۳x + ۱۴ < ۰ \Rightarrow \underbrace{(۵x+۱)}_{x=-\frac{۱}{۵}} \underbrace{(۳x+۱۴)}_{x=-\frac{۱۴}{۳}} < ۰ \Rightarrow \frac{-۱۴}{۳} < x < \frac{-۱}{۵} \quad (I)$$

$$|\frac{x-۱}{۲} - ۱| > ۳ \Rightarrow \left\{ \begin{matrix} \frac{x-۱}{۲} - ۱ > ۳ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} > ۴ \Rightarrow x > ۹ \\ \frac{x-۱}{۲} - ۱ < -۳ \Rightarrow \frac{x-۱}{۲} < -۲ \Rightarrow x < -۳ \end{matrix} \right\} \quad (II)$$

$$\xrightarrow{\text{اشتراک}(II),(I)} -\frac{۱۴}{۳} < x < -۳ \Rightarrow max(b-a) = -۳ - (-\frac{۱۴}{۳}) = \frac{۵}{۳}$$

---

۶۷ گزینه ۲ $y^۲ - ۱$ شمارندهٔ ۷۲ است؛ بنابراین:

$$y^۲ = ۰, ۴, ۹, ۲۵ \to y = ۰, \pm ۲, \pm ۳, \pm ۵$$

بنابراین با حذف ۳ زوج مرتب عضو که زوج مرتب‌های f تابع می‌شود.

---

۶۸ گزینه ۲

$g(x) = k \quad f(x) = x$

$g(۳x) + ۲f(۳+x) = ۳ + ۲x \Rightarrow k + ۲(۳+x) = ۳ + ۲x$

$\Rightarrow k + ۶ = ۳ \Rightarrow k = -۳ \Rightarrow g(x) = -۳$

$$\frac{f(-۱)}{g(۴)} = \frac{-۱}{-۳} = \frac{۱}{۳}$$

---

۶۹ گزینه ۳

طبق فرض:

$f(x) = c \quad (c \in \mathbb{R}) \, , \, g(x) = x$

$f(۲x) - g(۱-x) = ۴ + x \Rightarrow c - (۱-x) = ۴ + x \Rightarrow c = ۵ \to f(x) = ۵$

$\Rightarrow g(-۱)f(۳) = -۱ \times ۵ = -۵$

---

۷۰ گزینه ۱ نمودارهای دو تابع به‌صورت زیر هستند.

WWW.ArefOnline.ir

$$y=|x+۲|+|x-۱|=\begin{cases} x+۲+x-۱=۲x+۱ & , x\geq ۱ \\ x+۲-(x-۱)=۳ & -۲\leq x<۱ \\ -x-۲-x+۱=-۲x-۱ & x<-۲ \end{cases}$$

$$۳y+x=۱۷ \Rightarrow \left| \begin{matrix} x=۰ \\ y=\frac{۱۷}{۳} \end{matrix} \right.$$

$$\begin{cases} y=۲x+۱ \\ ۳y+x=۱۷ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} ۳(۲x+۱)+x=۱۷ \\ ۷x=۱۴ \rightarrow x=۲ \\ y=۲\times ۲+۱=۵ \\ \Rightarrow B \left| \begin{matrix} x=۲ \\ y=۵ \end{matrix} \right. \end{matrix}$$

$$\begin{cases} y=-۲x-۱ \\ ۳y+x=۱۷ \end{cases} \Rightarrow ۳(-۲x-۱)+x=۱۷ \Rightarrow -۵x=۲۰ \Rightarrow x=-۴$$

$$y=-۲(-۴)-۱=۷ \Rightarrow A \left| \begin{matrix} x=-۴ \\ y=۷ \end{matrix} \right.$$

$$AB=\sqrt{(۲+۴)^۲+(۵-۷)^۲}=\sqrt{۳۶+۴}=\sqrt{۴۰}=۲\sqrt{۱۰}$$

---

۷۱ گزینه ۳

$$\begin{matrix} |a|+۲>۱ \\ ۱-|a|<۱ \end{matrix} \Rightarrow \begin{matrix} f(۲+|a|)=a^۲+۴+۴|a|-۲-|a|-۷ \\ f(۱-|a|)=۲-۲|a|-۱ \end{matrix}$$

$$f(۱-|a|)=f(۲+|a|) \Rightarrow a^۲+۵|a|-۶=۰ \Rightarrow \begin{cases} |a|=۱ \Rightarrow a=\pm ۱ \\ |a|=-۶ \text{ غ ق ق} \end{cases}$$

---

۷۲ گزینه ۲ با توجه به ضابطهٔ تابع داریم:

$$۱+a^۲>۱ \Rightarrow |۱+a^۲|>۱ \Rightarrow f(۱+a^۲)=۷-۳(۱+a^۲)$$

$$a^۲>۰ \ , \ ۱+a^۲>۱ \Rightarrow |\frac{-a^۲}{۱+a^۲}|<۱ \Rightarrow f(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})=-۲(\frac{-a^۲}{۱+a^۲})$$

بنابراین:

$$۷-۳(۱+a^۲)=-۲(\frac{-a^۲}{۱+a^۲}) \Rightarrow ۴-۳a^۲=\frac{۲a^۲}{۱+a^۲} \xrightarrow{a^۲=t>۰} ۳t^۲+t-۴=۰ \Rightarrow t=۱\checkmark, t=\frac{-۴}{۳}\times \Rightarrow a=$$

$$\pm ۱$$

اختلاف مقادیر a برابر است با:

$$۱-(-۱)=۲$$

---

۷۳ گزینه ۳

$$\frac{۱}{۷} \ \frac{۱}{۸} \ \frac{۱}{۰} \longrightarrow \text{تعداد}=۱$$

$$\frac{۱}{۷} \ \frac{۴}{۰} \ \frac{۵}{} \longrightarrow \text{تعداد}=۲۰$$

$$\frac{۳}{۱} \ \frac{۶}{} \ \frac{۵}{} \longrightarrow \text{تعداد}=۹۰$$

$$\begin{matrix} ۳ \\ ۵ \end{matrix} \qquad \overline{\text{تعداد کل}=۱۱۱}$$

WWW.ArefOnline.ir

۷۴ گزینه ۲ اعداد سه رقمی مطلوب به دسته‌های زیر تقسیم می‌شوند:

۱) اعدادی که صدگان بیشتر یا مساوی ۳ دارند:

$\{۳, ۵, ۷, ۸\}$

$۴ \times ۶ \times ۵ = ۱۲۰$

۲) اعدادی که دهگان بیشتر از ۵ دارند و صدگان‌شان برابر ۲ است:

$۱ \times \underbrace{۲}_{۷,۸} \times ۵ = ۱۰$

۳) اعدادی که یکان بیشتر از ۷ و صدگان برابر با ۲ و دهگان برابر با ۵ دارند:

$۱ \times \underset{\{۵\}}{۱} \times \underset{\{۸\}}{۱} = ۱$

اکنون طبق اصل جمع داریم:

تعداد حالت‌های مطلوب $= ۱۲۰ + ۱۰ + ۱ = ۱۳۱$

---

۷۵ گزینه ۳ برای اینکه عددی مضرب ۶ باشد می‌بایست زوج بوده و بر ۳ نیز بخش‌پذیر باشد، بنابراین رقم یکان الزاماً باید ۲ باشد.

برای ۱۰ رقم اول می‌توان حالت‌های زیر را درنظر گرفت به‌صورتی که مجموع اعداد بر ۳ بخش‌پذیر باشد.

عدد ۱	عدد ۲
۱۰	۱
۷	۴
۴	۷
۱	۱۰

$$\binom{۱۰}{۱۰} + \binom{۱۰}{۳} + \binom{۱۰}{۶} + \binom{۱۰}{۹} = ۱ + ۱۲۰ + ۲۱۰ + ۱۰ = ۳۴۱$$

---

۷۶ گزینه ۳ برای حل این سؤال از متمّم استفاده می‌کنیم.

$$\left.\begin{array}{l} \text{کل حالات: } \binom{۹}{۵} = \frac{۹!}{۵! \times ۴!} = ۱۲۶ \\ \text{حالات نامطلوب} = \text{هر دو نفر دعوت شوند(سه نفر از سایر نفرات انتخاب شوند.)} = \binom{۷}{۳} = \frac{۷!}{۳! \times ۴!} = ۳۵ \end{array}\right\} \Rightarrow$$

حالات مطلوب $= ۱۲۶ - ۳۵ = ۹۱$

---

۷۷ گزینه ۴ روش اول

دو حالت در نظر می‌گیریم:

حالت اول: به دو نفر دو کتاب برسد و به یک نفر یک کتاب برسد.

$$\binom{۵}{۲}\binom{۳}{۲}\binom{۱}{۱} \times \underset{\downarrow}{۳} = ۱۰ \times ۳ \times ۱ \times ۳ = ۹۰$$

$$\begin{cases} \overset{۲}{A}, \overset{۲}{B}, \overset{۱}{C} \\ \overset{۲}{A}, \overset{۱}{B}, \overset{۲}{C} \\ \overset{۱}{A}, \overset{۲}{B}, \overset{۲}{C} \end{cases}$$

حالت دوم: به دو نفر یک کتاب برسد و به یک نفر سه کتاب برسد.

WWW.ArefOnline.ir

$$\binom{۵}{۱}\binom{۴}{۱}\times\binom{۳}{۳}\times\overset{\overset{۳}{\downarrow}}{\quad}=۵\times۴\times۱\times۳=۶۰$$

$$\begin{cases}\overset{۱}{A},\overset{۱}{B},\overset{۳}{C}\\ \overset{۱}{A},\overset{۳}{B},\overset{۱}{C}\\ \overset{۱}{A},\overset{۱}{B},\overset{۳}{C}\end{cases}$$

بنابراین کل حالات $۱۵۰=۶۰+۹۰$ است.

روش دوم

طبق اصل شمول و عدم شمول داریم:

$$۳^۵-۳\times۲^۵+۳=۲۴۳-۳\times۳۲+۳=۱۵۰$$

۷۸ گزینه ۴ چون می‌خواهیم ترتیب ارقام عدد به‌صورت نزولی باشد، کافی است سه رقم دلخواه از میان ارقام داده‌شده انتخاب کنیم و آنها را به‌صورت نزولی مرتب کنیم تا حالت مطلوب مسئله رخ دهد (توجه شود که اگر رقم صفر انتخاب شود، قطعاً در رقم یکان قرار می‌گیرد؛ بنابراین مشکلی ایجاد نمی‌شود)؛ پس تعداد حالت‌های مطلوب برابر است با:

$$\binom{۷}{۳}\times۱=۳۵$$

۷۹ گزینه ۲

$$\binom{n-۱}{k-۱}=(\frac{k}{k+۵})\binom{n}{k}\Rightarrow\frac{(n-۱)!}{(k-۱)!\cancel{(n-k)!}}=\frac{k}{k+۵}\times\frac{n!}{k!\cancel{(n-k)!}}$$

$$\Rightarrow\frac{\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{(k-۱)!}}=\frac{k}{k+۵}\times\frac{n\cancel{(n-۱)!}}{\cancel{k(k-۱)!}}\Rightarrow\frac{n}{k+۵}=۱\Rightarrow n=k+۵$$

$$k=۲\Rightarrow n=۷\Rightarrow n+k=۹$$

۸۰ با توجه به اینکه سکه را ۳ بار پرتاب کرده‌ایم، حداکثر ۳ بار ممکن است رو بیاید؛ پس عدد روی تاس قطعاً (۱) است. احتمال این رخداد برابر است باگزینه ۳ این که تاس عدد (۱) و سکه هر ۳ بار «رو» آمده باشد:

$$\underbrace{\frac{۱}{۶}}_{\text{آمدن تاس }۱}\times(\underbrace{\frac{۱}{۲}}_{\text{رو آمدن یک سکه}})^۳=\frac{۱}{۴۸}$$

۸۱ گزینه ۱

یکی از کارت‌ها ۱ بوده و دوتای دیگر دلخواه باشند. $\longrightarrow$ تعداد مطلوب $=\binom{۷}{۲}=۲۱$

یکی از کارت‌ها ۲ بوده و دوتای دیگر زوج باشند. $\longrightarrow$ تعداد مطلوب $=\binom{۳}{۲}=۳$

$$p(\text{مطلوب})=\frac{۲۱+۳}{\binom{۸}{۳}}=\frac{۲۴}{۵۶}=\frac{۳}{۷}$$

۸۲ گزینه ۴ فرض کنید تعداد مهره‌های سبز x باشد.

WWW.ArefOnline.ir

$$p(\text{مطلوب}) = ۱ - \frac{\binom{x}{۲}}{\binom{۵+x}{۲}} = \frac{۵}{۶}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{x(x-۱)}{۲}}{\frac{(۵+x)(۴+x)}{۲}} = \frac{۱}{۶} \Rightarrow ۶x^۲ - ۶x = x^۲ + ۹x + ۲۰$$

$$\Rightarrow ۵x^۲ - ۱۵x - ۲۰ = ۰ \Rightarrow x^۲ - ۳x - ۴ = ۰ \Rightarrow$$

$$(x-۴)(x+۱) = ۰ \Rightarrow \begin{cases} x = -۱ & \text{غ ق ق} \\ x = ۴ \end{cases}$$

اختلاف تعداد مهره‌ها $= ۱ \Rightarrow$ **تعداد مهره‌های سبز** $= ۴$

---

۸۳ گزینه ۲ حالت‌بندی را براساس عدد کوچک‌تر انجام می‌دهیم:

$$\text{تعداد کل حالت‌ها} = \binom{۸}{۲} = ۲۸$$

$\{۱\}$عدد کوچک‌تر باشد که حالتی $\rightarrow$ عدد بزرگ‌تر $\in \{۲, ۳, \cdots, ۸\} \rightarrow$ ۷حالت

$\{۲\}$عدد کوچک‌تر باشد که حالتی $\rightarrow$ عدد بزرگ‌تر $\in \{۴, ۶, ۸\} \rightarrow$ ۳حالت

$\{۳\}$عدد کوچک‌تر باشد که حالتی $\rightarrow$ عدد بزرگ‌تر $\in \{۶\} \rightarrow$ ۱حالت

$\{۴\}$عدد کوچک‌تر باشد که حالتی $\rightarrow$ عدد بزرگ‌تر $\in \{۸\} \rightarrow$ ۱حالت

اکنون توجه می‌کنیم که:

$$\text{عدد کوچک‌تر} \leq ۴ \xrightarrow{\text{عدد بزرگ‌تر} \geq ۸} \text{عدد بزرگ‌تر} \geq ۲ \times \text{عدد کوچک‌تر} \Rightarrow \text{دو عدد متمایزاند}$$

بنابراین همهٔ حالت‌ها را بررسی کرده‌ایم و طبق اصل جمع داریم:

$$n(A) = ۷ + ۳ + ۱ + ۱ = ۱۲ \Rightarrow P(A) = \frac{n(A)}{n(S)} = \frac{۱۲}{۲۸} = \frac{۳}{۷}$$

---

۸۴ گزینه ۳ تعداد مهره‌های دستهٔ کمتر را با n و تعداد مهره‌های دستهٔ بیشتر را با $۲n$ نمایش می‌دهیم. بنابراین:

تعداد کل حالت‌های انتخاب ۲ مهره از کیسه برابر است با:

$$n(S) = \binom{۳n}{۲}$$

طبق اصل ضرب تعداد حالت‌های انتخاب ۲ مهرهٔ غیرهم‌رنگ برابر است با:

$$n(A) = \binom{n}{۱}\binom{۲n}{۱}$$

$$\xrightarrow{\text{فرض مسئله}} \frac{n \times ۲n}{\frac{(۳n)(۳n-۱)}{۲}} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow \frac{۴n^۲}{۹n^۲ - ۳n} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow n^۲ - ۳n = ۰$$

$$\Rightarrow n(n-۳) = ۰ \xrightarrow{n>۰} n = ۳ \Rightarrow ۳n = ۹$$

WWW.ArefOnline.ir

پاسخنامه کلیدی

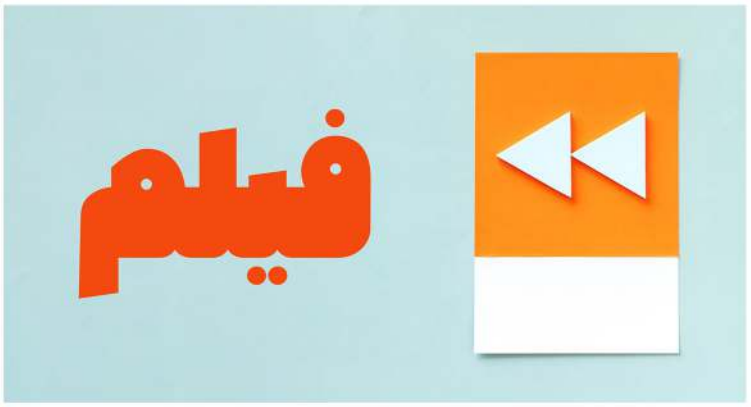
۱	۱	۱۳	۴	۲۵	۴	۳۷	۳	۴۹	۴	۶۱	۴	۷۳	۳
۲	۲	۱۴	۴	۲۶	۴	۳۸	۱	۵۰	۱	۶۲	۱	۷۴	۲
۳	۲	۱۵	۳	۲۷	۲	۳۹	۲	۵۱	۳	۶۳	۴	۷۵	۳
۴	۱	۱۶	۲	۲۸	۲	۴۰	۱	۵۲	۱	۶۴	۲	۷۶	۳
۵	۱	۱۷	۲	۲۹	۴	۴۱	۲	۵۳	۳	۶۵	۴	۷۷	۴
۶	۳	۱۸	۲	۳۰	۲	۴۲	۳	۵۴	۳	۶۶	۱	۷۸	۴
۷	۴	۱۹	۴	۳۱	۲	۴۳	۱	۵۵	۱	۶۷	۲	۷۹	۲
۸	۱	۲۰	۱	۳۲	۴	۴۴	۴	۵۶	۴	۶۸	۲	۸۰	۳
۹	۴	۲۱	۴	۳۳	۳	۴۵	۴	۵۷	۳	۶۹	۳	۸۱	۱
۱۰	۳	۲۲	۱	۳۴	۲	۴۶	۳	۵۸	۲	۷۰	۱	۸۲	۴
۱۱	۳	۲۳	۱	۳۵	۳	۴۷	۴	۵۹	۲	۷۱	۳	۸۳	۲
۱۲	۱	۲۴	۴	۳۶	۲	۴۸	۱	۶۰	۲	۷۲	۲	۸۴	۳

WWW.ArefOnline.ir

آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف