

آزمون



کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



جزوه



فیلم



مشاوره



www.
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف





گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



نیم سال اول دوازدهم $\frac{6}{8}$



پایه دهم $\frac{1}{5}$



ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

دفترچه شماره ۱

پنجشنبه ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

ملاحظات	مدت زمان پاسخ گویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	ماده امتحانی	ردیف
		تا	از			
۴۰ سؤال ۷۰ دقیقه	۷۰ دقیقه	۴۰	۱	۴۰	ریاضیات	۱

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

شیمی ۳ مولکول‌ها در خدمت تندرستی: کل فصل آسایش و رفاه در سایه شیمی: از ابتدای فصل تا سر سلول سوختی صفحه‌های ۱ تا ۵۰ سهم در کنکور: ۵ سؤال	فیزیک ۳ حرکت بر خط راست + دینامیک و حرکت دایره‌ای (تا قبل از نیروی گرانشی) صفحه‌های ۱ تا ۵۳ سهم در کنکور: ۷ سؤال	ریاضیات گسسته آشنایی با نظریه اعداد (کل فصل ۱) صفحه‌های ۱ تا ۳۰ سهم در کنکور: ۱ سؤال	هندسه ۳ ماتریس و کاربردها + آشنایی با مقاطع مخروطی صفحه‌های ۹ تا ۳۹ سهم در کنکور: ۲ سؤال	حسابان ۲ تابع + مثلثات + حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت صفحه‌های ۱ تا ۵۸ سهم در کنکور: ۳ سؤال
شیمی پایه آب، آهنگ زندگی صفحه‌های ۹۸ تا ۱۲۲ سهم در کنکور: ۲ سؤال	فیزیک پایه ترمودینامیک صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۹ سهم در کنکور: ۲ سؤال	آمار و احتمال آمار توصیفی صفحه‌های ۶۹ تا ۹۵ سهم در کنکور: ۱ سؤال	هندسه پایه تجسم فضایی هندسه ۱ صفحه‌های ۷۷ تا ۹۶ سهم در کنکور: ۱ سؤال	ریاضی پایه حد و پیوستگی حسابان ۱ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۵۱ سهم در کنکور: ۳ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در نیم سال اول ۱۴۰۴

نیم سال اول: ۷ آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید برای تسلط کامل بر مباحث نیم سال اول / شروع حرکت و یادگیری استفاده از ماشین پیشرفت ماز

- ۱- شروع مسیر؛ آرامش و هماهنگی:** دو مرحله آزمون پوششی؛ فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت ماز و ورود به مسیر حرفه‌ای کنکوری‌ها (فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت)
- ۲- چالش استمرار؛ پیگیری و استقامت:** چهار مرحله آزمون برای تکمیل نیم سال اول دوازدهم + مباحث پایه دهم
 ✓ در این مراحل دانش‌آموزان با پشتکار با حفظ استمرار خود در آزمون‌ها، فاصله خود را از رقبایان بیشتر می‌کنند.
 (زمان تسلط کامل بر نیم سال اول دوازدهم + دهم)
- ۳- جمع‌بندی پایان نیم سال:** یک مرحله آزمون جمع‌بندی نیم سال اول بعد از امتحانات ترم اول و تکمیل یادگیری نیم سال اول + مرور و جمع‌بندی (ایستگاه جمع‌بندی و جبران)





۱- دامنه تعریف تابع $y=f(x)$ بازه $[-1, 2]$ می باشد. دامنه تعریف تابع $y=2-f(3-\frac{x}{4})$ کدام است؟

- (۱) $[4, 16]$ (۲) $[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}]$ (۳) $[-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}]$ (۴) $[1, 12]$

۲- نمودار تابع $f(x)=2x^2-x-2$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و طول نقاط واقع بر آن را نصف می کنیم. اگر تابع حاصل را g بنامیم، وسیع ترین بازه ای که نمودار تابع g در آن بازه، نزولی اکید باشد، کدام است؟

- (۱) $[-\frac{1}{16}, +\infty)$ (۲) $(-\infty, \frac{1}{16}]$ (۳) $[-\frac{1}{8}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, \frac{1}{8}]$

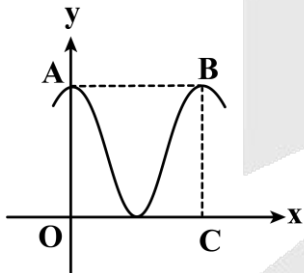
۳- باقی مانده تقسیم چند جمله ای $f(x)$ بر $x+2$ و $x-1$ به ترتیب -6 و 0 است. باقی مانده تقسیم $x^2+f(x-1)$ بر x^2-x-2 کدام است؟

- (۱) $2x+1$ (۲) $2x-1$ (۳) $3x-2$ (۴) $3x+2$

۴- هرگاه تابع $f(x)=|2x-4|(ax+b)$ در مجموعه \mathbb{R} نزولی اکید باشد، زوج مرتب (a,b) کدام می تواند باشد؟

- (۱) $(-2, 4)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(-2, -4)$ (۴) $(2, -4)$

۵- بخشی از نمودار تابع $f(x)=a-2\sin^2(\frac{\pi}{b}x)$ شکل مقابل است. اگر چهارضلعی $OABC$ مربع باشد، مقدار $f(\frac{11}{3})$ چه عددی است؟



- (۱) $\frac{3}{2}$ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ (۴) $\frac{3}{4}$

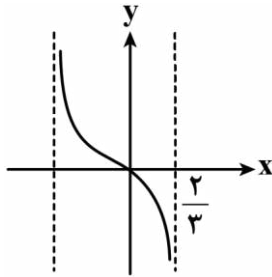
محل انجام محاسبات



۶- اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ باشند، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ چه عددی است؟

- (۱) $\frac{1}{8}$ (۲) $\frac{1}{12}$ (۳) $\frac{1}{3}$ (۴) $\frac{1}{6}$

۷- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{3} - \tan(ax + b)$ با فرض $0 < a, b < \frac{\pi}{4}$ شکل مقابل است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



- (۱) $\frac{2}{2}$ (۲) $\frac{2}{3}$ (۳) $\frac{2}{4}$ (۴) $\frac{4}{3}$

۸- اگر $x = \frac{\pi}{12}$ یک جواب معادله $a + 4 \sin^2 x = 2$ باشد، چهارمین جواب مثبت معادله چه عددی است؟

- (۱) $\frac{17\pi}{12}$ (۲) $\frac{19\pi}{12}$ (۳) $\frac{25\pi}{12}$ (۴) $\frac{23\pi}{12}$

۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax + b}{(x + 1)(ax - 2)} = -\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

- (۱) $b > 2$ (۲) $b < -2$ (۳) $b > -2$ (۴) $b < 2$

۱۰- به ازای چند مقدار حقیقی m رابطه $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x - 5}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} = -\infty$ برقرار است؟

- (۱) صفر (۲) ۱ (۳) ۲ (۴) ۳

محل انجام محاسبات



۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} \log \frac{x^2 - 1}{4 - x^2} = -\infty$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

- (۱) ۱ (۲) -۱ (۳) ۲ (۴) -۲

۱۲- هرگاه $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\alpha - f(x + \beta)} = +\infty$ باشد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

- (۱) -۴ (۲) -۲ (۳) ۴ (۴) ۶

۱۳- اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{a - b \sin(\frac{2}{3}x)}{\cos^2 x - a \cos x} = -\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

- (۱) $b > 1$ (۲) $b < -1$ (۳) $b > -1$ (۴) $b < 1$

۱۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{2 - 3(-1)^{[x]}}{2 - \sqrt{x}}$ در مجاورت مجانب قائم تابع به کدام شکل است؟



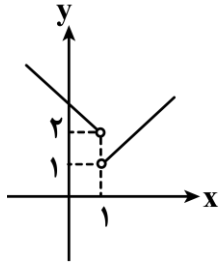
۱۵- تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 14}{mx^2 + 4x + 8}$ فقط یک مجانب قائم دارد. برای m چند مقدار مختلف به دست می‌آید؟

- (۱) ۱ (۲) ۲ (۳) ۳ (۴) ۴

محل انجام محاسبات



۱۶- نمودار تابع $y=f(x)$ شکل مقابل است. ضابطه تابع $y=g(x)$ کدام می‌تواند باشد تا $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x)-g(x))$ موجود باشد؟



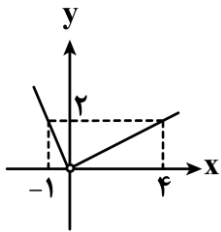
$$g(x) = \begin{cases} 5x - 2 & x > 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases} \quad (1)$$

$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases} \quad (2)$$

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x > 1 \\ 7x - 2 & x < 1 \end{cases} \quad (3)$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & x > 1 \\ 5x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (4)$$

۱۷- نمودار f شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(\sin x)}{|x|}$ چند برابر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2|x|)}{x}$ است؟



$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

$$2 \quad (2)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (4)$$

۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{a + \sqrt{bx-c}} = 4$ باشد، مقدار $\frac{ab}{c}$ چه عددی است؟

$$-1 \quad (4)$$

$$1 \quad (3)$$

$$-\frac{1}{2} \quad (2)$$

$$\frac{1}{2} \quad (1)$$

۱۹- تابع $f(x) = [\sqrt{2x+3}]$ در بازه $(3, k)$ فقط یک نقطه ناپیوستگی دارد. حداکثر مقدار k کدام است؟

$$16/5 \quad (4)$$

$$5 \quad (3)$$

$$11 \quad (2)$$

$$6/5 \quad (1)$$

محل انجام محاسبات



۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 4} & |x| \leq 1 \\ ax^2 - bx + 4 & |x| > 1 \end{cases}$ در تمام اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ چه عددی است؟

- (۱) ۲ (۲) -۲ (۳) $\frac{1}{2}$ (۴) $-\frac{1}{2}$

۲۱- اگر A یک ماتریس وارون پذیر و $A^2 = I$ باشد، مجموع تمام درایه‌های ماتریس $(2A - A^{-1})^2 - (2A + A^{-1})^2$ کدام است؟

- (۱) ۸ (۲) ۳۲ (۳) ۱۶ (۴) ۲۴

۲۲- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 2-i & i = j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{|x-A+I|}}{\sqrt{|B-I|-|x|}}$ کدام است؟
($[x]$ نماد جزء صحیح x است.)

- (۱) $[1, 6)$ (۲) $[1, 5]$ (۳) $[1, 5)$ (۴) $(1, 5)$

۲۳- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i & i \neq j \\ j & i = j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ \dots & \dots & \dots \\ A+I & 1 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A-I & 4 \\ \dots & \dots \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $|BC|$ کدام است؟

- (۱) ۲۸ (۲) -۱۴ (۳) ۱۴ (۴) -۲۸

محل انجام محاسبات



۲۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- الف) اگر صفحه p عمود بر محور سطح مخروطی آن را قطع کند و از رأس آن عبور کند، سطح مقطع حاصل دایره است.
 ب) اگر صفحه p به گونه‌ای هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور سطح مخروطی نباشد، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.
 ج) اگر صفحه p موازی با مولد سطح مخروطی آن را قطع کند و از رأس مخروطی عبور کند، سطح مقطع حاصل سهمی است.
 د) اگر صفحه p غیرموازی با مولد و غیرعمود بر محور سطح مخروطی تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.

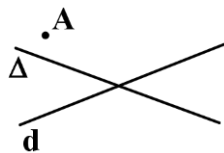
۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

۲۵- مطابق شکل، نقطه A در صفحه دو خط متقاطع d و Δ واقع است. حداکثر چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از d و Δ به یک فاصله و از A به فاصله ۵ واحد باشند؟



۱ (۱)

۲ (۲)

۳ (۳)

۴ (۴)

۲۶- نقطه A خارج از دو خط متنافر d و d' قرار دارد، چند خط وجود دارد که از A بگذرد و d و d' را قطع کند؟

(۲) بی‌شمار خط

(۱) دقیقاً یک خط

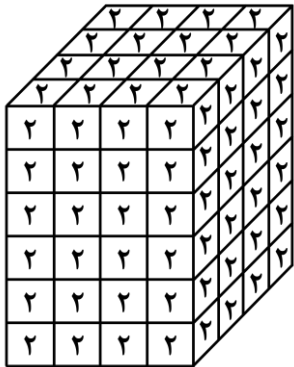
(۴) چنین خطی وجود ندارد.

(۳) حداکثر یک خط

محل انجام محاسبات



۲۷- یک مکعب مستطیل به ابعاد ۴، ۴ و ۶ از مکعب‌های $1 \times 1 \times 1$ تشکیل شده است و روی هر ۶ وجه بیرونی مکعب مستطیل و روی هر کدام از مربع‌های کوچک عدد ۲ نوشته شده است. این مکعب‌های کوچک را از هم جدا می‌کنیم. در چند مکعب از ۹۶ مکعب کوچک مجموع اعداد روی وجوه بزرگ‌تر از ۲ و کم‌تر از ۶ است؟

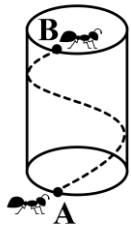


- (۱) ۱۶
- (۲) ۲۴
- (۳) ۳۲
- (۴) ۲۸

۲۸- مکعب مستطیلی به ابعاد ۲، ۴ و ۶ را با صفحه‌ای که از کوچک‌ترین یال آن می‌گذرد طوری برش زده‌ایم که حجم مکعب مستطیل به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است. کم‌ترین مساحت برای سطح مقطع حاصل از برش کدام است؟

- (۱) ۱۰
- (۲) $12/5$
- (۳) $4\sqrt{10}$
- (۴) $2\sqrt{10}$

۲۹- استوانه‌ی شکل مقابل را در نظر بگیرید. مورچه‌ای می‌خواهد از نقطه‌ی A شروع به حرکت کند و پس از یک دور کامل دور استوانه، به نقطه‌ی B دقیقاً در بالای نقطه‌ی A برسد. اگر شعاع قاعده و ارتفاع استوانه به ترتیب ۶ و 5π باشند، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این مورچه چقدر است؟

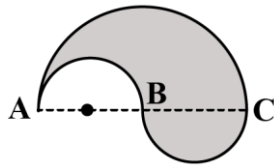


- (۱) 12π
- (۲) 13π
- (۳) 5π
- (۴) 60π

محل انجام محاسبات



۳۰- شکل مقابل، متشکل از ۳ نیم دایره به شعاع های ۱ و ۲ است. حجم حاصل از دوران این شکل هندسی حول محور AC کدام است؟



(۲) $\frac{8\pi}{3}$

(۱) $\frac{28\pi}{9}$

(۴) $\frac{28\pi}{3}$

(۳) $\frac{32\pi}{9}$

۳۱- اگر p عددی اول، $(p, 6) = 1$ و $a+p$ زوج باشد، باقی مانده $1 + a^2 - p + p^2 + p^3$ بر ۸ کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

۳۲- مجموع ارقام بزرگ ترین عدد صحیحی که باقی مانده تقسیم آن بر عدد ۴۲، همواره $\frac{6}{5}$ برابر خارج قسمت شود، کدام است؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۹

(۲) ۱۸

(۱) ۱۷

۳۳- در همنهشتی به پیمانه m ، سه عدد a ، ۱۲۳ و ۵۸ در یک کلاس همنهشتی قرار دارند. اگر $(m, 5) = 1$ و $m \neq 1$ باشد، مجموع ارقام کوچک ترین عدد چهار رقمی a کدام است؟

(۴) ۱۳

(۳) ۱۱

(۲) ۸

(۱) ۹

۳۴- معادله همنهشتی $(n^2 + 3n)x \equiv 13 \pmod{2n+1}$ در مجموعه اعداد صحیح دارای جواب است. n چند عدد طبیعی دورقمی می تواند داشته باشد؟

(۴) ۷۲

(۳) ۶۷

(۲) ۱۸

(۱) ۱۵

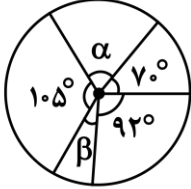
محل انجام محاسبات



۳۵- اگر معادله $693x + 1089y = \overline{aab5b}$ در مجموعه اعداد صحیح جواب داشته باشد، رقم یکان a^b کدام است؟

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۶- افراد یک جامعه بر اساس علاقه به تیم فوتبال به ۵ گروه متمایز تقسیم شده‌اند که نمودار مربوط به این آمارگیری در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر تعداد افراد موجود در ناحیه متناظر به زاویه مرکزی α ، ۲۰ درصد از کل افراد آن جامعه باشند، آن‌گاه اندازه β کدام است؟



- ۱ (۱) 19°
۲ (۲) 29°
۳ (۳) 21°
۴ (۴) 31°

۳۷- در داده‌های ۲۳، a ، ۲۵، ۲۷، ۲۲، ۲۴، مد و میانگین دو عدد طبیعی متوالی هستند. a کدام ویژگی را دارد؟

- ۱) عددی اول است. ۲) مربع کامل است. ۳) مکعب کامل است. ۴) بخش پذیر بر ۳ است.

۳۸- می‌خواهیم به یکی از داده‌های زیر ۲ واحد اضافه کنیم تا دامنه میان چارکی داده‌های جدید نسبت به داده‌های قبلی ۱ واحد افزایش پیدا کند. داده تغییر یافته (قبل از تغییر) چند شمارنده مثبت دارد؟

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

- ۱ (۱) ۲ (۲) ۳ (۳) ۴ (۴)

۳۹- از ۲۰ داده آماری با انحراف معیار ۴ به تعداد چهار داده با انحراف معیار ۶ حذف کرده‌ایم. اگر میانگین داده‌های حذف شده با میانگین کل داده‌های اولیه یکسان باشد، آن‌گاه واریانس شانزده داده باقی مانده کدام خواهد شد؟

- ۱ (۱) ۹ ۲ (۲) ۱۰ ۳ (۳) ۱۱ ۴ (۴) ۱۲

۴۰- ضریب تغییرات داده‌های زیر کدام است؟

۱۲, ۱۲, ۱۲, ۶۰

- ۱ (۱) $\frac{\sqrt{3}}{2}$ ۲ (۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳ (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$ ۴ (۴) $\frac{\sqrt{3}}{6}$

محل انجام محاسبات



گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



$\frac{6}{8}$ نیم سال اول دوازدهم

$\frac{1}{5}$ پایه دهم

دفترچه شماره ۲

پنجشنبه ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

ملاحظات	مدت زمان پاسخ گویی	شماره سؤال		تعداد سؤال	ماده امتحانی	ردیف
		تا	از			
۵۵ سؤال	۳۵ دقیقه	۶۵	۴۱	۲۵	فیزیک	۱
۶۵ دقیقه	۳۰ دقیقه	۹۵	۶۶	۳۰	شیمی	۲

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه آرای، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه های کنکور در نظر گرفته می شود.

شیمی ۳ مولکول‌ها در خدمت تندرستی: کل فصل آسایش و رفاه در سایه شیمی: از ابتدای فصل تا سر سلول سوختی صفحه‌های ۱ تا ۵۰ سهم در کنکور: ۵ سؤال	فیزیک ۳ حرکت بر خط راست + دینامیک و حرکت دایره‌ای (تا قبل از نیروی گرانشی) صفحه‌های ۱ تا ۵۳ سهم در کنکور: ۷ سؤال	ریاضیات گسسته آشنایی با نظریه اعداد (کل فصل ۱) صفحه‌های ۱ تا ۳۰ سهم در کنکور: ۱ سؤال	هندسه ۳ ماتریس و کاربردها + آشنایی با مقاطع مخروطی صفحه‌های ۹ تا ۳۹ سهم در کنکور: ۲ سؤال	حسابان ۲ تابع + مثلثات + حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت صفحه‌های ۱ تا ۵۸ سهم در کنکور: ۳ سؤال
شیمی پایه آب، آهنگ زندگی صفحه‌های ۹۸ تا ۱۲۲ سهم در کنکور: ۲ سؤال	فیزیک پایه ترمودینامیک صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۹ سهم در کنکور: ۲ سؤال	آمار و احتمال آمار توصیفی صفحه‌های ۶۹ تا ۹۵ سهم در کنکور: ۱ سؤال	هندسه پایه تجسم فضایی هندسه ۱ صفحه‌های ۷۷ تا ۹۶ سهم در کنکور: ۱ سؤال	ریاضی پایه حد و پیوستگی حسابان ۱ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۵۱ سهم در کنکور: ۳ سؤال

استراتژی و هدف گذاری با ماز در نیم سال اول ۱۴۰۴

نیم سال اول: ۷ آزمون در ۱۰۰ روز تحصیلی مفید برای تسلط کامل بر مباحث نیم سال اول / شروع حرکت و یادگیری استفاده از ماشین پیشرفت ماز

- ۱- شروع مسیر؛ آرامش و هماهنگی:** دو مرحله آزمون پوششی؛ فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت ماز و ورود به مسیر حرفه‌ای کنکوری‌ها (فرصت برای شروع حرکت با ماشین پیشرفت)
- ۲- چالش استمرار؛ پیگیری و استقامت:** چهار مرحله آزمون برای تکمیل نیم سال اول دوازدهم + مباحث پایه دهم
 ✓ در این مراحل دانش‌آموزان با پشتکار با حفظ استمرار خود در آزمون‌ها، فاصله خود را از رقبایان بیشتر می‌کنند.
 (زمان تسلط کامل بر نیم سال اول دوازدهم + دهم)
- ۳- جمع‌بندی پایان نیم سال:** یک مرحله آزمون جمع‌بندی نیم سال اول بعد از امتحانات ترم اول و تکمیل یادگیری نیم سال اول + مرور و جمع‌بندی (ایستگاه جمع‌بندی و جبران)



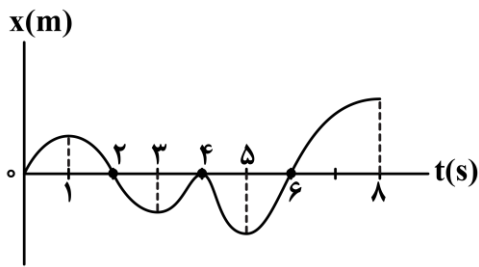
۴۱- با توجه به نمودار مکان - زمان زیر، مشخص کنید چه تعداد عبارت‌های زیر صحیح است؟

الف - سرعت متوسط در کل بازه زمانی مثبت است.

ب - مجموعاً ۵s بردار مکان در جهت محور X است.

ج - مجموعاً ۵s بردار مکان و سرعت هم جهت هستند.

د - متحرک مجموعاً ۳s با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور می‌شود.



۱ (۱)

۳ (۳)

۴۲- متحرکی که با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، با شتاب ثابت ترمز می‌کند تا پس از ۱۰ ثانیه متوقف شود.

بزرگی جابه‌جایی متحرک در ۲/۵ ثانیه آخر حرکت، چند برابر بزرگی جابه‌جایی آن در ۴ ثانیه آخر حرکت است؟

۱ (۱) $\frac{25}{64}$

۲ (۲) $\frac{5}{8}$

۳ (۳) $\frac{3}{4}$

۴ (۴) $\frac{9}{16}$

۴۳- معادله سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t^2 - 7$ است. شتاب

متوسط متحرک در ۳ ثانیه دوم حرکت آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱ (۱) ۳۶

۲ (۲) ۴۰

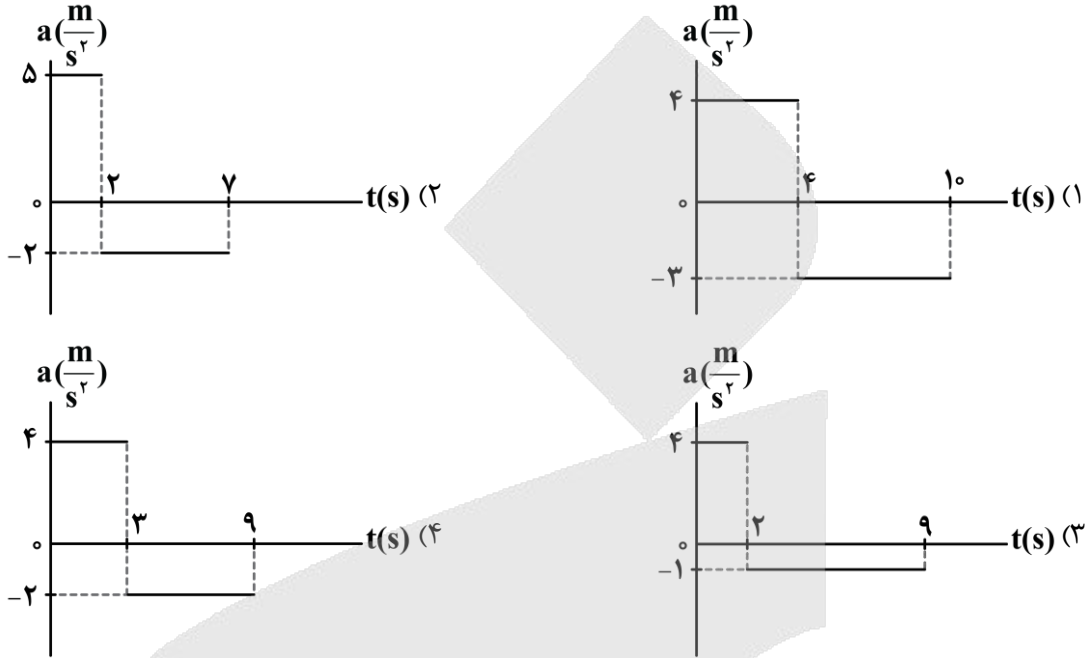
۳ (۳) ۲۴

۴ (۴) ۳۲

محل انجام محاسبات



۴۴- متحرکی بر روی محور X حرکت خود را با سرعت $10 \frac{m}{s} (\vec{i})$ شروع می کند و در نهایت پس از طی مسافتی، حرکت خود را با همان سرعت به پایان می رساند. اگر این متحرک در مسیر خود تغییر جهت داده باشد، کدام نمودار شتاب - زمان زیر، می تواند مربوط به حرکت آن باشد؟



۴۵- جسمی به جرم 6 kg را به انتهای فنر سبکی با ثابت $3000 \frac{N}{m}$ آویزان می کنیم. طول فنر چگونه تغییر می کند؟

$(g = 10 \frac{m}{s^2})$

- (۱) 2 cm افزایش می یابد.
- (۲) 2 cm کاهش می یابد.
- (۳) 0.5 cm افزایش می یابد.
- (۴) 0.5 cm کاهش می یابد.

۴۶- مطابق شکل، دو شخص به جرم های $m_1 = 75 \text{ kg}$ و $m_2 = 50 \text{ kg}$ با کفش های چرخ دار در یک سالن مسطح و صاف روبه روی هم ایستاده اند. شخص اول با نیروی 100 N شخص دوم را به طرف راست هل می دهد. اگر بردار شتاب این دو شخص به ترتیب \vec{a}_1 و \vec{a}_2 باشد، حاصل $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ در SI کدام است؟



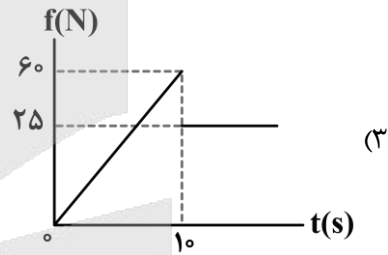
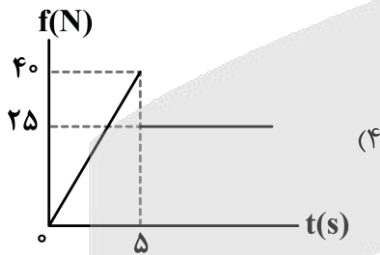
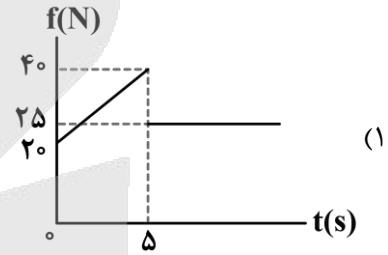
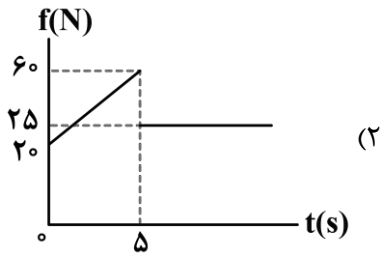
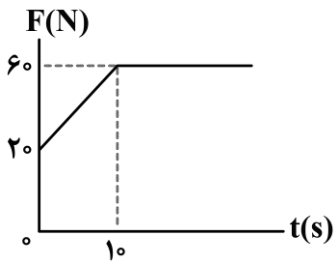
- (۱) $\frac{10}{3} \vec{i}$
- (۲) $-\frac{10}{3} \vec{i}$
- (۳) $\frac{2}{3} \vec{i}$
- (۴) $-\frac{2}{3} \vec{i}$

محل انجام محاسبات



۴۷- جسمی به جرم 5kg بر روی یک سطح افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی بین جسم و سطح به ترتیب برابر $0/5$ و $0/8$ است. یک نیروی افقی متغیر با زمان، مطابق نمودار زیر، به جسم وارد می‌شود. نمودار بزرگی نیروی

اصطکاک بر حسب زمان کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



۴۸- گلوله‌ای را در راستای قائم در هوا به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازه شتاب توپ را هنگام بالارفتن با « a_1 » و هنگام پایین آمدن با « a_2 » نشان دهیم و « g » اندازه شتاب گرانشی باشد، کدام مورد درست است؟

- (۱) $a_1 > g > a_2$ (۲) $a_1 > a_2 > g$ (۳) $a_2 > g > a_1$ (۴) $a_2 > a_1 > g$

۴۹- کارگری یک سطل محتوی مصالح به جرم 24kg را با طناب سبکی به طرف بالا می‌کشد. اگر بیشینه کشش قابل تحمل

طناب 300N باشد، این کارگر این سطل را با حداکثر چه شتابی در SI می‌تواند بالا بکشد؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



- (۱) $2/5$ (۲) 2
(۳) $1/5$ (۴) 1

محل انجام محاسبات



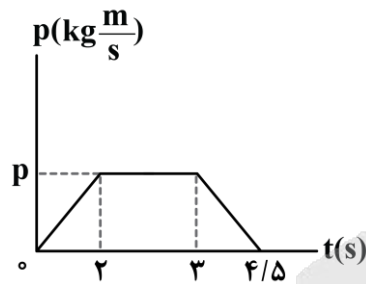
۵۰- نردبانی به جرم 25kg ، به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد و پایه آن روی سطح افقی، در آستانه سر خوردن است. اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، $50\sqrt{29}\text{N}$ باشد، نیرویی که دیوار به نردبان وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

- ۱۰۰ (۱) ۲۵۰ (۲) ۲۰۰ (۳) ۲۷۰ (۴)

۵۱- متحرکی به جرم 6kg با شتاب ثابت روی خط راست در حال حرکت است. اگر در لحظه $t=0$ تکانه آن برابر با $210 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ باشد و پس از 10 ثانیه به $450 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ برسد، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه است؟

- ۴ (۱) ۱۱ (۲) ۶ (۳) ۱۲ (۴)

۵۲- شخصی به جرم 60kg در یک آسانسور که رو به بالا شروع به حرکت می‌کند، روی یک ترازو ایستاده و نمودار تکانه - زمان او مطابق شکل است. اگر بیشترین عددی که ترازو نشان می‌دهد ۳ برابر کمترین عددی باشد که ترازو نشان می‌دهد، بیشترین تندی آسانسور چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)



- ۸ (۱)
۴ (۲)
۲/۵ (۳)
۵ (۴)

۵۳- اگر با ثابت ماندن جرم یک گلوله، انرژی جنبشی آن ۱۹ درصد کاهش یابد، اندازه تکانه آن چند درصد کاهش می‌یابد؟

- ۱۰ (۱) $\sqrt{19}$ (۲) ۱۹ (۳) ۱۱ (۴)

۵۴- پره‌های یک بالگرد با آهنگ 1500rpm می‌چرخند. طول نوک پره‌ها تا محور چرخش آن‌ها را 2m فرض کنید. دوره تناوب پره‌ها و تندی در نوک پره‌ها به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟

- ۱۰۰π ، ۰/۰۴ (۱) ۲۰۰π ، ۰/۰۴ (۲) ۱۰۰π ، ۰/۰۶ (۳) ۲۰۰π ، ۰/۰۶ (۴)

محل انجام محاسبات



۵۵- خودرویی به جرم 1500 kg روی سطح افقی با تندی ثابت، یک مسیر دایره‌ای به شعاع $37/5 \text{ m}$ را دور می‌زند. اگر بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی برابر با 9000 N باشد، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

الف - اگر خودرو با تندی $14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ حرکت کند، نمی‌لغزد.

ب - نیروی مرکزگرای وارد بر خودرو در این مسیر می‌تواند 8000 N باشد.

ج - بیشینه شتاب مرکزگرای خودرو $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «الف» و «ج» (۳) «ب» و «ج» (۴) «الف»، «ب» و «ج»

۵۶- یک لیتر از گاز A در دمای 23°C - و دو لیتر از گاز B در دمای 27°C ، هر دو با فشار یکسان ۳ اتمسفر، درون دو ظرف قرار دارند. نسبت تعداد ذرات گاز A به تعداد ذرات گاز B در این دو ظرف چقدر است؟

(۱) ۲ (۲) $\frac{23}{54}$ (۳) $\frac{3}{5}$ (۴) $\frac{5}{12}$

۵۷- گاز ایده‌آلی درون یک سیلندر قرار دارد و با افزودن تدریجی گرما، پیستونی با سطح مقطع 2 m^2 را به حرکت درمی‌آورد. اگر گاز در این فرایند 200 J کار روی محیط انجام دهد و فشار گاز درون سیلندر به صورت ثابت برابر با $1/25 \times 10^5 \text{ Pa}$ باقی بماند، جابه‌جایی پیستون چند سانتی‌متر خواهد بود؟

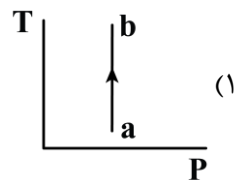
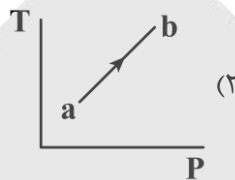
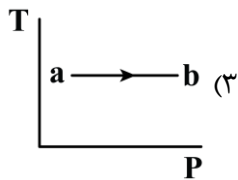
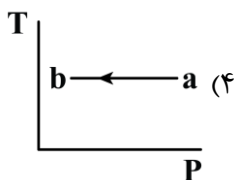
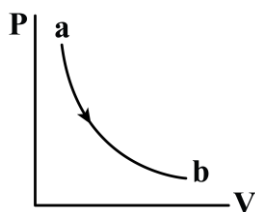
(۱) $12/5$ (۲) ۸ (۳) ۸۰ (۴) ۱۲۵

۵۸- اگر بخواهیم بدون گرمادادن به گاز کاملی، دمای آن را افزایش دهیم، از چه فرایندی باید استفاده کنیم؟

(۱) انبساط بی‌دررو (۲) تراکم بی‌دررو (۳) انبساط هم‌فشار (۴) تراکم هم‌فشار

محل انجام محاسبات

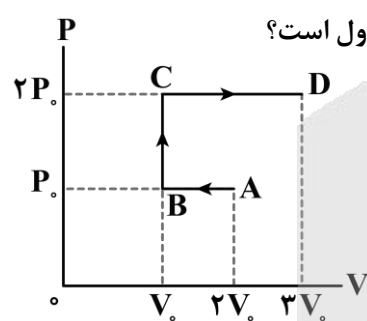
۵۹- نمودار $P-V$ زیر را که فرایندی را برای گاز کامل نشان می‌دهد در نظر بگیرید. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار $T-P$ این فرایند را به درستی نشان دهد؟



۶۰- اگر حجم یک گاز کامل محبوس در داخل یک پیستون، در دمای ثابت ۱۰ درصد کاهش یابد، فشار گاز تقریباً چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

- (۱) ۵ درصد افزایش (۲) ۵ درصد کاهش (۳) ۱۱ درصد کاهش (۴) ۱۱ درصد افزایش

۶۱- در شکل زیر، نمودار $P-V$ برای یک گاز ایده‌آل رسم شده است. اگر حجم اولیه گاز در نقطه A برابر ۲ لیتر و فشار



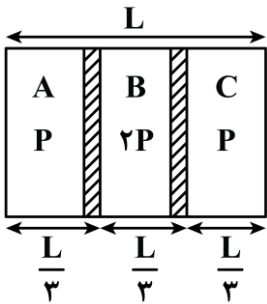
گاز در آن 10^5 پاسکال باشد، کار انجام شده روی گاز در طی فرایند A تا D چند ژول است؟

- (۱) $+100\text{ J}$
 (۲) -100 J
 (۳) $+300\text{ J}$
 (۴) -300 J

محل انجام محاسبات



۶۲- مطابق شکل، دو پیستون، یک ظرف عایق را به سه بخش مساوی تقسیم کرده‌اند. در بخش‌های A، B و C به ترتیب، گاز ایده‌آل با فشار اولیه P، ۲P و P قرار دارد. دمای گازها در هر سه بخش در ابتدا یکسان است. اگر پیستون‌ها رها شوند، پس از گذشت زمان طولانی و رسیدن به تعادل نهایی، طول نهایی بخش A چقدر خواهد بود؟



(۲) $\frac{L}{4}$

(۱) L

(۴) $\frac{L}{6}$

(۳) $\frac{L}{3}$

۶۳- ابتدا در یک فرایند بی‌دررو، فشار یک گاز کامل دو برابر می‌شود و سپس در فرایندی هم‌فشار، حجم گاز دو برابر می‌شود. در کل این فرایند، حجم گاز n برابر و دمای مطلق آن m برابر می‌شود. m و n کدام است؟

(۲) $m = 2, n = 1$

(۱) $1 < n < 2, 2 < m < 4$

(۴) $m = 4, n = 2$

(۳) $1 < m < 2, 2 < n < 4$

۶۴- در کدام مرحله از موتور درون‌سوز، پیستون پایین می‌رود و فشار و دمای مخلوط کاهش می‌یابد؟

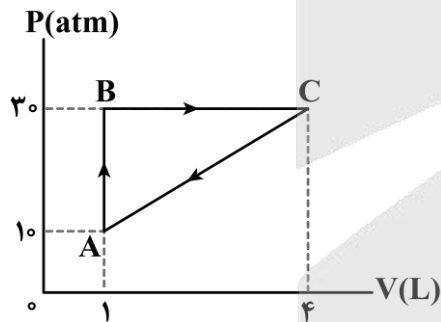
(۴) تخلیه

(۳) آتش‌گرفتن

(۲) ضربه تراکم

(۱) ضربه قدرت

۶۵- در یک ماشین گرمایی، گاز داخل یک استوانه، در هر دقیقه ۹۰۰ چرخه را مطابق شکل زیر می‌پیماید. توان خروجی ماشین چند کیلووات است؟



(۱) ۰/۷۵

(۲) ۹۰

(۳) ۴۵

(۴) ۱/۵

محل انجام محاسبات



۶۶- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- الف - مخلوط آب و روغن، ناپایدار بوده و با قرار دادن آن در یک محیط ثابت، آب بر روی روغن قرار می‌گیرد.
 ب - در رسوب ایجاد شده روی لباس هنگام شستن آن‌ها با آب سخت و صابون، شمار کاتیون‌ها نصف آنیون‌ها است.
 ج - دو مورد از اتم‌های کربن موجود در حلقهٔ بنزنی از پاک‌کننده‌های غیر صابونی، فقط به اتم‌های کربن متصل شده‌اند.
 د - اوره، همانند اتیلن گلیکول، گشتاور دو قطبی بزرگ‌تر از صفر داشته و با ذرات خود پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهد.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۶۷- برای تهیهٔ نوعی صابون مایع، $340/8$ گرم از اسید چرب سیر شده با فرمول $CH_3(CH_2)_{16}COOH$ را در شرایط مناسب در مجاورت با محلول پتاسیم هیدروکسید قرار می‌دهند. در این واکنش، به تقریب چند درصد جرمی از فراورده‌های تولید شده را صابون تشکیل می‌دهد؟ ($K = 39, O = 16, C = 12, H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)

(۱) $90/4$ (۲) $92/2$ (۳) $94/7$ (۴) 96

۶۸- محلول ۵ لیتری از سود با $pH = 13/5$ با 128 گرم از اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{16}H_{32}O_2$ واکنش می‌دهد. باز باقیمانده در این محلول، با چند گرم هیدرازین بر اساس معادلهٔ زیر و در حضور مقدار کافی فلز روی واکنش داده و طی این فرایند، چند گرم آمونیاک تولید می‌شود؟

(معادلهٔ واکنش موازنه شود. $O = 16, N = 14, C = 12, H = 1 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) $17 - 8$ (۲) $17 - 16$ (۳) $34 - 8$ (۴) $34 - 16$

۶۹- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- (۱) برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون در زمان استفاده از آب سخت، به برخی از صابون‌ها نمک‌های فسفات اضافه می‌کنند.
 (۲) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.
 (۳) پاک‌کننده ساخته شده از مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم، در هنگام واکنش با آب گرما آزاد می‌کند.
 (۴) از واکنش میان پودر جامد دی‌نیتروژن پنتاکسید با آب، نوعی پاک‌کننده خورنده با خاصیت بازی ایجاد می‌شود.

۷۰- با اضافه کردن چند میلی‌لیتر آب مقطر به 40 mL محلول HCl با $pH = 1/3$ ، می‌توان محلولی ساخت که pH آن با pH محلول ۲ مول بر لیتر اسید HX با $K_a = 5 \times 10^{-5}$ برابر شود؟

(۱) 40 (۲) 80 (۳) 120 (۴) 160

۷۱- مقدار $2/4$ گرم از یک اکسید گوگرد را در آب حل می‌کنیم تا 200 میلی‌لیتر محلول سولفوریک اسید تولید شود. اگر این محلول اسیدی با $0/2$ مول هیدروکسید فلز M به‌طور کامل خنثی شود، نسبت شمار آنیون به کاتیون در نمک حاصل از این واکنش کدام است؟ ($S = 32, O = 16 : g \cdot mol^{-1}$)



(۱) 2 (۲) 3 (۳) $0/5$ (۴) $1/5$

محل انجام محاسبات



۷۲- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

الف - اگر در دمای ثابت غلظت یون هیدروکسید در یک محلول اسیدی ۲ برابر شود، pH این محلول یک واحد افزایش پیدا می‌کند.

ب - در شرایط یکسان، مقداری محلول شیشه پاک‌کن جریان الکتریسیته را کمتر از محلول لوله‌بازکن عبور می‌دهد.

ج - منیزیم هیدروکسید، از مواد موجود در ضد اسیدها بوده و هر مول از آن، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.

د - دیواره داخلی معده انسان، به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در معده را جذب می‌کند.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۷۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

(۱) پرکاربردترین شکل انرژی در استفاده از فناوری‌هایی مثل فناوری مربوط به گرمایش آسان‌تر، انرژی الکتریکی است.

(۲) اکسیژن یکی از نافلزهای فعال است که به‌عنوان عامل اکسند تمایل دارد با اغلب عناصر فلزی واکنش دهد.

(۳) گونه اکسند مصرف شده در واکنش فلز کلسیم و گاز O_2 ، دارای ۸ الکترون با $n = 3$ در اتم خود است.

(۴) با قرار دادن قطعه آهن در محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان رنگ محلول مورد نظر تغییر می‌کند.

۷۴- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

(۱) در واکنش هیدروکلریک اسید با فلزها، یون کلرید نقشی در فرایند اکسایش-کاهش ندارد.

(۲) فلز آهن، در مقایسه با فلز آلومینیم، دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار بیشتری افزایش می‌دهد.

(۳) در سلول روی-مس، آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول مس مهاجرت می‌کنند.

(۴) ضریب الکترون در نیم‌واکنش تبدیل یون Sn^{4+} به Sn^{2+} ، دو برابر ضریب الکترون در نیم‌واکنش اکسایش یون F^- است.

۷۵- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

الف - نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره است.

ب - اندازه‌گیری پتانسیل هر نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نبوده و این کمیت، باید به‌طور نسبی اندازه‌گیری شود.

ج - هر مول از گاز هیدروژن وارد شده به نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، بیشتر از $22/4$ لیتر حجم را اشغال می‌کند.

د - علامت E° فلزهایی که کاهنده‌تر از H_2 هستند، در سری الکتروشیمیایی با نماد مثبت مشخص می‌شود.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

۷۶- درصد جرمی مس در آلیاژی از منگنز و مس، برابر ۶۰٪ است. اگر بر اثر واکنش کامل این قطعه با محلول هیدروبرمیک

اسید، $8/96L$ گاز در شرایط استاندارد تولید شود، جرم این قطعه برابر با چند گرم است؟

($Cu = 64, Mn = 55 : g \cdot mol^{-1}$)

$E^\circ(Cu^{2+}/Cu) = +0/34V$

$E^\circ(Mn^{2+}/Mn) = -1/18V$

۵۵ (۴)

۷۷ (۳)

۲۷/۵ (۲)

۳۸/۵ (۱)

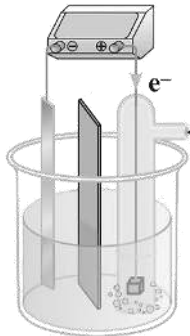
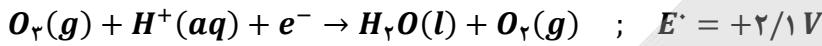
محل انجام محاسبات



۷۷- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟ ($Zn = 65, Ag = 108 : g.mol^{-1}$)

- (۱) با قرار گرفتن یک تیغه از جنس روی در محلولی از نقره نیترات، جرم این تیغه فلزی کاهش پیدا می‌کند.
- (۲) با کاهش قدرت کاهندگی فلز به کار رفته در آند یک سلول گالوانی، مقدار emf سلول کاهش پیدا می‌کند.
- (۳) دیواره متخلخل سلول‌های گالوانی، کمک می‌کند تا محلول‌های آندی و کاتدی از نظر بار الکتریکی خنثی بمانند.
- (۴) مقایسه قدرت اکسندگی یون‌های لیتیم، روی، مس و هیدروژن به صورت $Li^+ < Zn^{2+} < H^+ < Cu^{2+}$ است.

۷۸- در یک سمت از سلول گالوانی مقابل، نیم‌واکنش موازنه نشده زیر انجام می‌شود:



اوزون

اگر تیغه دیگر این سلول از جنس فلز روی باشد، به ازای مصرف ۶/۵ گرم از این فلز، چند الکترون در مدار خارجی سلول جاری شده و تفاوت جرم گاز تولید و مصرف شده در سمت کاتد برابر با چند گرم می‌شود؟ ($Zn = 65, O = 16 : g.mol^{-1}$)

(۱) $1/6 - 1/20.4 \times 10^{23}$

(۲) $3/2 - 1/20.4 \times 10^{23}$

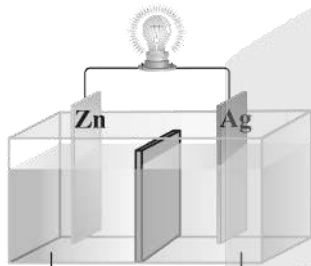
(۳) $1/6 - 2/40.8 \times 10^{23}$

(۴) $3/2 - 2/40.8 \times 10^{23}$

۷۹- در سلول مقابل، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه جابه‌جا شده و اگر نیم‌سلول نقره را

با نیم‌سلولی از جنس جایگزین کنیم، جهت حرکت الکترون‌ها در

مدار خارجی برعکس می‌شود.



محلول نقره نیترات محلول روی سولفات

(۱) نقره - آهن

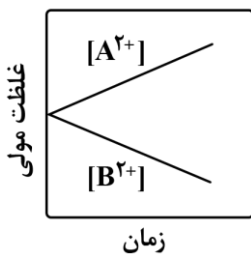
(۲) روی - آهن

(۳) نقره - منیزیم

(۴) روی - منیزیم

۸۰- با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی را نشان می‌دهد، کدام یک از مطالب داده شده

نادرست است؟



(۱) در این سلول، الکترودهای A و B می‌توانند به ترتیب روی و مس باشند.

(۲) جهت حرکت آنیون‌ها در این سلول، از سمت نیم‌سلول B به سمت نیم‌سلول A است.

(۳) در این سلول با گذشت زمان، مجموع شمار کاتیون‌ها در محلول‌ها افزایش پیدا می‌کند.

(۴) قدرت اکسندگی کاتیون‌های A^{2+} کمتر از قدرت اکسندگی کاتیون‌های B^{2+} است.

محل انجام محاسبات



۸۱- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- ۱) خون، محلولی با $pH > 7$ بوده و هنگام بیماری، توازن غلظت برخی از گونه‌های موجود در آن به هم می‌خورد.
- ۲) با افزایش دمای یک نمونه از آب، انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات در این ماده به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند.
- ۳) در فرایند انجماد، حجم آب افزایش پیدا کرده و شمار پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌های آب افزایش می‌یابد.
- ۴) نیاز روزانه بدن هر فرد بالغ به یون سدیم، نزدیک به نصف نیاز آن به کاتیون حاصل از سومین فلز قلیایی است.

۸۲- اگر سدیم نیترات و نقره نیترات را در شرایط خاصی به صورت هم‌زمان در آب حل کنیم، انحلال‌پذیری آن‌ها به ترتیب برابر با ۱۰۲ و ۳۰۶ گرم در ۱۰۰ گرم آب می‌شود. در محلول سیرشده حاصل از این فرایند، درصد جرمی نقره نیترات چند برابر سدیم نیترات شده و غلظت مولی یون نیترات چند برابر یون سدیم می‌شود؟

($Ag = 108, Na = 23, O = 16, N = 14 : g.mol^{-1}$)

- ۱) ۵ - ۲ (۲) ۲) ۲/۵ - ۲ (۲) ۳) ۵ - ۳ (۳) ۴) ۲/۵ - ۳ (۴)

۸۳- اگر معادله انحلال‌پذیری (S) یک نمک بر حسب دما (θ) به صورت $S = -0.2\theta + 44$ باشد، بر اثر گرم کردن $420g$ محلول سیرشده این نمک از دمای $20^\circ C$ تا دمای $50^\circ C$ ، چند گرم رسوب تشکیل شده و درصد جرمی محلول نهایی ایجاد شده طی این فرایند تقریباً چقدر است؟

- ۱) ۱۲ - ۲۵/۳ (۱) ۲) ۱۸ - ۲۵/۳ (۲) ۳) ۱۲ - ۲۸/۵ (۳) ۴) ۱۸ - ۲۸/۵ (۴)

۸۴- کدام موارد از عبارات‌های داده شده درست است؟

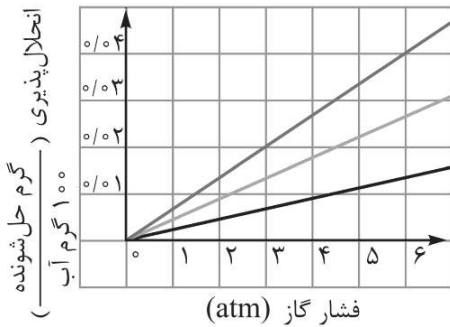
- الف - یک نمونه از گاز فلوئور، در مقایسه با نمونه‌ای از گاز هیدروژن کلرید، در دمای بالاتری به حالت مایع درمی‌آید.
 ب - ید، برخلاف گوگرد دی‌اکسید، از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده و در دمای اتاق، به حالت جامد یافت می‌شود.
 ج - هگزان یک مایع بی‌رنگ بوده و در صورت افزودن مقداری از آن به آب، نمونه هگزان روی سطح آب قرار می‌گیرد.
 د - مولکول کربن دی‌اکسید، همانند ذرات آب و H_2S ، قطبی بوده و در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا می‌کند.

- ۱) «الف» و «ب» (۱) ۲) «ب» و «ج» (۲) ۳) «ج» و «د» (۳) ۴) «الف» و «د» (۴)

۸۵- کدام یک از مطالب داده شده درست است؟

- ۱) تفاوت انحلال‌پذیری لیتیم سولفات و سدیم نیترات در آب در دمای $20^\circ C$ ، کمتر از این مقدار در دمای $40^\circ C$ است.
- ۲) سدیم کلرید، فقط با روش شیمیایی از آب دریا جدا شده و از آن در تولید گاز هیدروژن و کلر می‌توان استفاده کرد.
- ۳) برای تبدیل محلول سیرنشده‌ای از لیتیم سولفات به یک محلول سیرشده، می‌توان دمای این محلول را کاهش داد.
- ۴) ترکیب حاصل از فراوان‌ترین یون چند اتمی آب دریا با یون باریم، بیش از 0.1 گرم در 100 گرم آب حل می‌شود.

محل انجام محاسبات



۸۶- نمودار مقابل، روند تغییر انحلال پذیری سه گاز O_2 ، N_2 و NO بر حسب تغییر فشار در آب را نشان می‌دهد. مقدار عددی غلظت مولی گاز O_2 در محلول سیر شده این ماده در فشار 36 atm ، برابر با تفاوت مقدار انحلال پذیری گازهای نیتروژن و نیتروژن مونوکسید در چه فشاری است؟ ($O = 16 \text{ g.mol}^{-1}$)

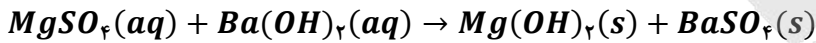
۱۱/۲۵ (۲)

۷/۵ (۱)

۱۲/۵ (۴)

۶/۲۵ (۳)

۸۷- محلول‌های مجزایی از منیزیم سولفات و سدیم هیدروکسید با درصد جرمی و چگالی برابر در اختیار داریم. اگر غلظت کاتیون در محلول اول به اندازه 0.8 mol.L^{-1} کمتر از غلظت کاتیون در محلول دوم باشد، هر لیتر از محلول منیزیم سولفات با چند لیتر محلول 0.2 مولار باریم هیدروکسید به‌طور کامل واکنش داده و در این فرایند، مجموعاً چند مول ماده رسوبی در کف ظرف ایجاد می‌شود؟ ($S = 32, Mg = 24, O = 16, N = 14, H = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)



۰/۸ - ۲ (۴)

۰/۸ - ۴ (۳)

۰/۴ - ۲ (۲)

۰/۴ - ۴ (۱)

۸۸- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- ۱) در ادرار اغلب افراد مبتلا به سنگ کلیه، نمک‌های کلسیم با غلظت بیشتر از مقدار انحلال پذیری آن‌ها وجود دارد.
- ۲) بنزین، برخلاف ضدیخ، نوعی محلول غیرآبی بوده و ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی در سرتاسر آن یکسان است.
- ۳) آب، از مولکول‌های خمیده ساخته شده و تنها ماده‌ای است که به سه حالت فیزیکی در طبیعت یافت می‌شود.
- ۴) اتانول رایج‌ترین حلال در آزمایشگاه بوده و از آن به‌عنوان حلال در تهیه بسیاری از داروها استفاده می‌شود.

۸۹- کدام موارد از عبارات‌های داده شده درست است؟

- الف - ترتیب گشتاور دوقطبی برخی مواد هیدروژن دار بر حسب دمای (D) به صورت $AsH_3 > PH_3 > NH_3$ است.
- ب - قدرت نیروهای بین مولکولی در یک نمونه از HBr از یک نمونه HF بیشتر و از یک نمونه HCl کمتر است.
- ج - سیلیسیم تتراکلرید، دارای ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی بوده و نسبت به متان دمای جوش پایین تری دارد.
- د - در مواد مولکولی با نقطه جوش بسیار نزدیک، ماده با جرم مولی بیشتر، قطبیت پایین تری دارد.

۴) «ب» و «د»

۳) «ب» و «ج»

۲) «الف» و «د»

۱) «الف» و «ج»

۹۰- در شرایط استاندارد، 321 گرم KIO_3 را در واکنش موازنه نشده $H_2(g) + KIO_3(s) \rightarrow KI(s) + H_2O(l)$ مصرف کرده و نیمی از آب تولید شده در این واکنش را به 9 گرم محلول 11 درصد جرمی منیزیم سولفات اضافه می‌کنیم. درصد جرمی منیزیم سولفات در محلول ایجاد شده به چند درصد رسیده و در واکنش انجام شده، چند گرم گاز هیدروژن مصرف می‌شود؟ ($H = 1$ و $O = 16$ و $K = 39$ و $I = 127$)

۱۸ - ۴ (۴)

۹ - ۴ (۳)

۱۸ - ۲ (۲)

۹ - ۲ (۱)

محل انجام محاسبات



۹۱- در کدام گزینه، گشتاور دوقطبی مولکول دوم، بیشتر از گشتاور دوقطبی مولکول اول است؟



۹۲- محلول سیرشده‌ای از آمونیاک با غلظت ۲۰ مول بر لیتر و چگالی $1/14 \text{ g.mL}^{-1}$ در اختیار داریم. انحلال‌پذیری گاز آمونیاک در شرایط داده شده برابر با چند گرم در ۱۰۰ گرم آب است؟ ($H = 1$ و $N = 14$)

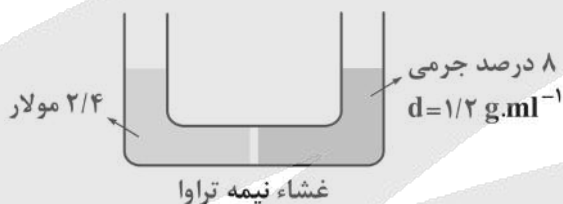


۹۳- با توجه به اطلاعات داده شده در جدول زیر، در چند ردیف داده‌های نادرست وجود دارد؟

نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار الکترون با $l = 0$ در کاتیون	شمار پیوند اشتراکی در واحد فرمولی
منیزیم سولفید	MgS	۴	۱
سدیم نیترات	NO_3Na	۴	۴
کروم (II) کلرید	$CrCl$	۶	۰
آلومینیم سولفات	$Al_2(SO_4)_3$	۴	۱۲



۹۴- مطابق تصویر زیر، محلولی از سدیم هیدروکسید در تیغه سمت راست و محلولی از گلوکز در تیغه سمت چپ یک ظرف دارای غشای نیمه‌تراوا ریخته شده است:



در ابتدای کار، جهت جریان آب از خلال غشا به کدام سمت بوده و در صورت وارد کردن یک نیروی خارجی به محلول موجود در تیغه سمت چپ، سرعت اسمز چگونه تغییر می‌کند؟ ($Na = 23, O = 16, H = 1 : \text{g.mol}^{-1}$)

- (۱) راست - افزایش می‌یابد (۲) چپ - افزایش می‌یابد
(۳) راست - کاهش می‌یابد (۴) چپ - کاهش می‌یابد

۹۵- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- (۱) با استفاده از روش تقطیر، برخلاف روش صافی کربن، نمی‌توان مواد آلی فرار موجود در آب را از آن جدا کرد.
(۲) دیواره یاخته‌های گیاهی فقط اجازه گذر به برخی از ذره‌ها و مولکول‌های کوچک مثل آب و یونها را می‌دهد.
(۳) در شرایط یکسان، غلظت مولی گاز NO در محلول سیرشده این ماده، کمتر از O_2 در محلول سیرشده آن است.
(۴) ماهی با عبور آب از درون آبشش، اکسیژن مولکولی محلول در آب را جذب و در فرایند سوخت‌وساز مصرف می‌کند.

محل انجام محاسبات



بودجه بندی دروس آزمون بعد...

تاریخ برگزاری: ۲۷ آذرماه

<p>ریاضیات گسسته</p> <p>آشنایی با نظریه اعداد (از ابتدای حل معادله سیاله تا انتهای فصل)</p> <p>گراف و مدل سازی (معرفی گراف) صفحه های ۲۶ تا ۴۲</p>	<p>هندسه ۳</p> <p>آشنایی با مقاطع مخروطی صفحه های ۳۳ تا ۴۶</p>	<p>حسابان ۲</p> <p>حدهای نامتناهی - حد در بی نهایت صفحه های ۴۵ تا ۶۹</p>
<p>آمار و احتمال</p> <p>آمار استنباطی صفحه های ۹۷ تا ۱۲۱ ریاضی ۱ صفحه های ۱۵۲ تا ۱۷۰</p>	<p>هندسه پایه</p> <p>دایره هندسه ۲ (تا ابتدای حالت های دودایره نسبت به هم) صفحه های ۹ تا ۲۰</p>	<p>ریاضی پایه</p> <p>الگو و دنباله ریاضی ۱ صفحه های ۱۴ تا ۲۷ حسابان ۱ صفحه های ۱ تا ۶</p>
<p>شیمی ۳</p> <p>آسایش و رفاه در سایه شیمی: از جاری شدن انرژی با سفر الکترون تا انتهای آبکاری صفحه های ۴۲ تا ۶۰</p>	<p>فیزیک ۳</p> <p>دینامیک و حرکت دایره ای (از نیروی کشش طناب تا انتهای فصل ۲) صفحه های ۴۴ تا ۶۰</p>	
<p>شیمی پایه</p> <p>قدر هدایای زمینی را بدانیم (تا انتهای دنیای واقعی واکنش ها) صفحه های ۱ تا ۲۵</p>	<p>فیزیک پایه</p> <p>الکتروسیته ساکن (تا قبل از خازن) صفحه های ۱ تا ۳۲</p>	



آزمون



کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



جزوه



فیلم



مشاوره



www.
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف





گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی

آزمون ماز | پایه دوازدهم



۶/۸ نیم سال اول دوازدهم



۱/۵ پایه دهم



ویژه کنکوری های ۱۴۰۵

دفترچه پاسخ

پنجشنبه ۱۳ آذرماه ۱۴۰۴

- ✓ پاسخنامه سریع؛ برای بررسی فوری بعد از آزمون
- ✓ تحلیل تمام گزینه های هر سؤال؛ برای بررسی سؤالاتی که پاسخ نادرست داده اید
- ✓ نکات و درسنامه های آموزشی؛ برای یادگیری کامل مباحث هر سؤال
- ✓ مشاوره تستی؛ برای یادگیری انواع روش های حل تست
- ✓ استراتژی آزمون؛ برای یادگیری مدیریت زمان و مدیریت جلسه آزمون



ویراستاران	طراحان	مسئول درس	درس
<p>مهرداد اسپیدکار مأده بادان فیروز حمیدرضا ولی پور - مهران جعفری فؤاد خیرآبادی</p>	<p>مهرداد کیوان - حسین شفیع زاده علی منصف شکری - سوگند روشنی رسول حاجی زاده</p>	<p>حسین شفیع زاده سید جواد نظری مهرداد کیوان</p>	ریاضیات
<p>حامد نبی منصور - حنا خلعتبری علیرضا ملک حسینی</p>	<p>سعید احمدی - سجاد صادقی زاده محمد جواد سورچی - حسین عبدوی نژاد مهدی پارسا - مهران تاکی - محسن فندچر مصطفی واثقی - سارا قانع - مجید میرزائی حامد نبی منصور</p>	<p>سجاد صادقی زاده سعید احمدی</p>	فیزیک
<p>فرهنگ امیری - طاها حق بین رامین رزمجو امیرعلی حسینی فرد</p>	<p>فرشاد هادیان فرد - علی ترابی عالیه میرزایی - فرهنگ امیری بنیامین بهرامی - سعیده محبی</p>	<p>فرشاد هادیان فرد</p>	شیمی

تیم اجرایی و تولید آزمون

مجتبی آدمیان

نازنین امیری

زهرة جعفری

مأده بادان فیروز

مدیر تولید آزمون: محدثه شیخعلی



یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوبتون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین. راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهاداتتون رو برامون بنویسین.

دکتر رسول خنجری



چه زمانی باید تجدید آموزش کنیم؟

در مقاله قبلی گفتیم خیلی از دانش آموزا بعد از خوندن یک مبحث سریع می رن سراغ تست، در حالی که تمرین ها و مثال های کتاب درسی، بخش اصلی فهم واقعی هستن.

گفتیم تمرین ها مثل آینه ان؛ نشون می دن واقعاً مطلب رو فهمیدی یا فقط فکر می کنی بلدی.

و چون طراح کنکور از همین تمرین ها الهام می گیره، کسی که روی مثال های کتاب مسلط باشه، در واقع ذهن طراح رو می شناسه. بدون تمرین، وارد تست زدن شدن یعنی سردرگمی؛ ولی تمرین ها نقشه راه یادگیری ان و باعث می شن مغزت مسیر حل مسئله رو پیدا کنه.

حالا در این مقاله می خوایم بگیم:

دقیقاً چه زمانی باید آموزش یک مبحث رو دوباره انجام بدی؟

۱ تجدید آموزش در مباحث خوندنی

(زیست، زمین شناسی، و بخش های نظری فیزیک و شیمی و...)

وقتی یک مبحث خوندنی رو می خونن، مغز همون لحظه تازه و فعاله و فکر می کنی «همه چی یادم مونده»، ولی این فقط توهم تسلطه؛ حافظه کوتاه مدته و هنوز محک نخورده.

چه زمانی باید تست بزنی؟ ۴۸ تا ۷۲ ساعت بعد از مطالعه.

این فاصله باعث میشه: مطالب ته نشین بشن، بخش واقعی یادگیری وارد حافظه بلند مدت بشه، و معلوم بشه چی رو واقعاً فهمیدی و چی فقط «جلو چشم بوده».

یک مثال ساده:

تازه خونن مبحث، مثل بتن تازه ست؛ تا چند ساعت اول شکل مشخصی نزاره، اما دو روز بعد سفت شده و تکلیفش معلومه. تست زدن هم بایر زمانی باشه که مغز واقعاً «سفت» شده باشه.

وقتی تست می زنی، دو حالت داری:

حالت دوم:

کمتر از نصف تست ها رو درست می زنی

اینجا اوضاع خوب نیست!

یعنی مطالب قبلیت وارد ذهن نشده و فقط «خوانده ای که خوانده باشی».

این حالت یعنی:

■ تمرکز پایین بوده،

■ فقط هایلایت کردی،

■ یا خیال کردی «آسون بود».

در این شرایط حتماً باید تجدید آموزش بدی:

برگرد دوباره از اول با تمرکز واقعی بخون؛ این بار واقعاً بفهم.

حالت اول:

بیشتر از نصف تست ها رو درست می زنی

یعنی یادگیری قابل قبوله.

غلط ها بهت نشون می دن:

■ کجا بد فهمیدی

■ کجا نکات فرار داری

■ کجا باید مرور جزئی انجام بدی

اینجا تجدید آموزش کامل لازم نیست؛ فقط

مرور هدفمند می خوای.



(ریاضی، فیزیک مسئله‌ای، شیمی محاسباتی و...)

اینجا شرایط کاملاً متفاوت است.

اینجا فهمیدن از روی درس یا ویدئو کافی نیست؛ باید دستت گرم بشه. پس تست یا تمرین رو کی بزنی؟

برای حل کردنی‌ها فاصله بزرگ نداز!!!

روند درست:

- مبحث رو از استاد / ویدئو یاد می‌گیری
- همون جلسه یا نهایتاً ۱-۲ ساعت بعد تمرین‌های کتاب رو حل می‌کنی
- بعد تست‌های همون مبحث رو می‌زنی

چرا؟

چون مغز در مباحث حل کردنی سریع دچار توهم میشه: «فرمول رو فهمیدم پس بلام!» اما موقع تست می‌فهمی حتی نمی‌دونی از کجا شروع کنی.

مثال

مثل دوچرخه‌سواریه، هیچ‌کس فقط با دیدن فیلم یاد نمی‌گیره؛ باید پا بزنه.

کی باید تجدید آموزش بدیم؟

وقتی تست‌های همون روز این‌طوری باشن:

- نمی‌تونی سؤال رو شروع کنی
- فرمول رو بلدی ولی کاربردشو نه
- زمانت زیاد می‌ره
- روی مسائل ساده هم اشتباه می‌کنی

این یعنی باید دوباره برگردی سر جزوه و مرحله‌به‌مرحله مسیر حل رو یاد بگیری.

تجدید آموزش در تحلیل آزمون ماز

همین قواعد در آزمون ماز هم صدق می‌کنه.

وقتی کارنامه بررسی مبحثی رو نگاه می‌کنی، درصد تسلط معیار تصمیم‌گیریه.

چون آزمون ماز استاندارد، مرز تجدید آموزش میاد پایین‌تر: از ۵۰٪ ← ۳۰٪

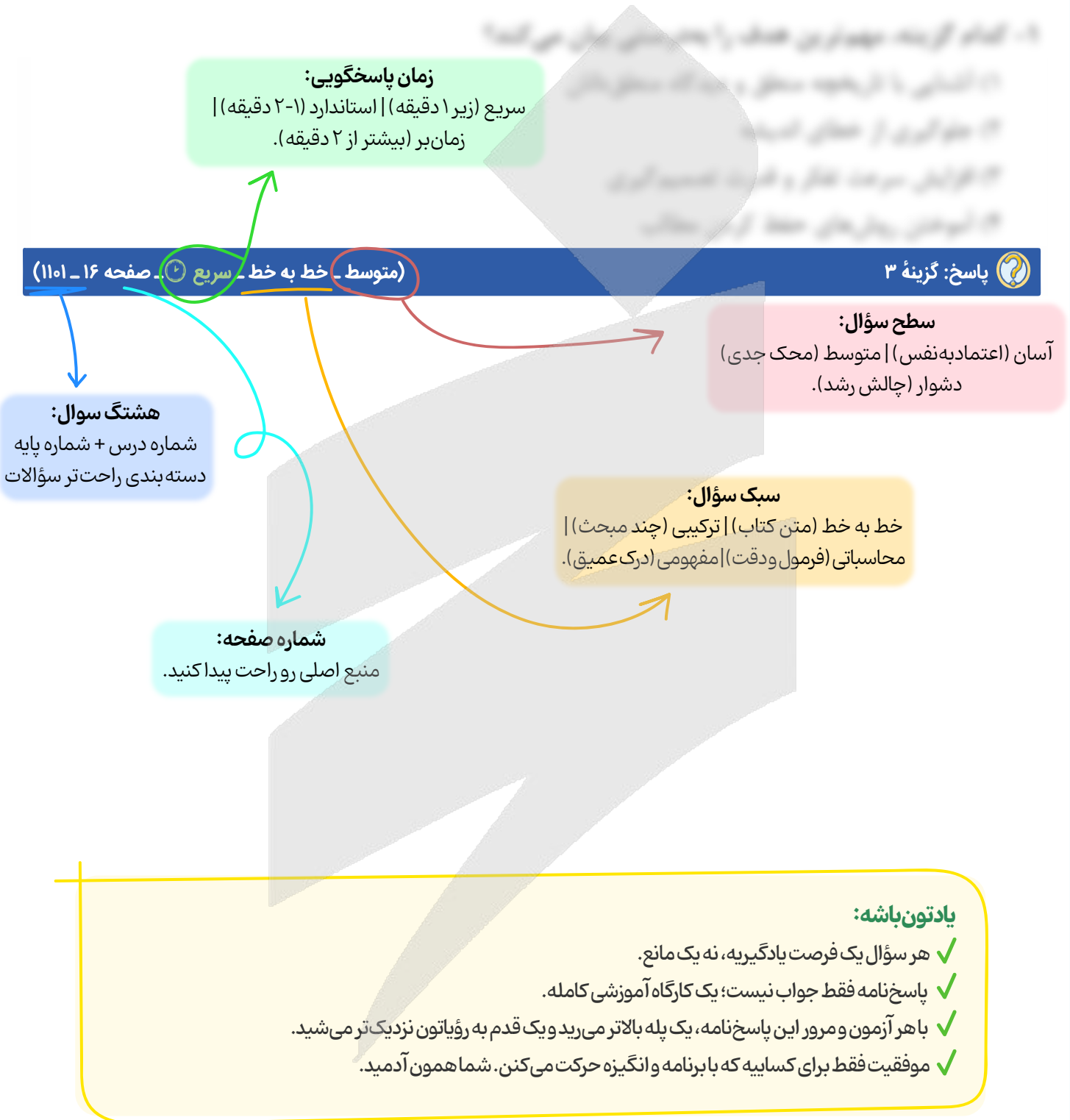
یعنی: اگر در یک مبحث کمتر از ۳۰٪ سؤال‌ها رو درست زدی، اون مبحث نیاز به تجدید آموزش داره.

جمع‌بندی آخر...

یادت باشه تجدید آموزش، تنبیه نیست؛ تصمیره. درست مثل وقتی که یک قطعه از ماشین خوب کار نمی‌کنه و تو مجبور می‌شی دوباره باز کنی و درست ببندی. مرور و تست زنی فقط نشون می‌دن کدوم بخش‌ها لقی می‌زنن؛ اما تجدید آموزش اون جاییه که واقعاً یادگیری محکم می‌شه. پس هر وقت دیری نتیجه تست‌ها با میزان تلاشت هماهنگ نیست، نترس از اینکه یک قدم برگردی عقب، چون همین یک قدم برگشته که باعث میشه سه قدم جلوتری.



راهنمای پاسخنامه آزمون‌ها





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون QRcode بالا را اسکن کنید!

یا بر روی لینک زیر کلیک کنید!

پاسخنامه ویدئویی

بودجه‌بندی این آزمون

حسابان ۲: تابع + مثلثات + حدهای نامتناهی - حد در بی‌نهایت، صفحه‌های ۱ تا ۵۸
ریاضی پایه: حد و پیوستگی، حسابان ۱ صفحه‌های ۱۱۳ تا ۱۵۱
هندسه ۳: ماتریس و کاربردها + آشنایی با مقاطع مخروطی، صفحه‌های ۹ تا ۳۹
هندسه پایه: تجسم فضایی، هندسه ۱ صفحه‌های ۷۷ تا ۹۶
گسسته: آشنایی با نظریه اعداد (کل فصل ۱)، صفحه‌های ۱ تا ۳۰
آمار و احتمال: آمار توصیفی، صفحه‌های ۶۹ تا ۹۵

سهم در کنکور

حسابان ۲: این مبحث در مجموع ۳ تست از ۶ تست کنکور را پوشش داده است.
ریاضی پایه: این مبحث در مجموع ۳ تست از ۱۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه ۳: این مبحث در مجموع ۲ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
هندسه پایه: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۸ تست کنکور را پوشش داده است.
گسسته: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.
آمار و احتمال: این مبحث در مجموع ۱ تست از ۴ تست کنکور را پوشش داده است.

۱- دامنه تعریف تابع $y = f(x)$ بازه $[-1, 2]$ می‌باشد. دامنه تعریف تابع $y = 2 - f(3 - \frac{x}{4})$ کدام است؟

- (۱) $[4, 16]$ (۲) $[-\frac{5}{4}, -\frac{1}{2}]$ (۳) $[-\frac{5}{4}, \frac{1}{2}]$ (۴) $[1, 12]$

(آسان - مفهومی - سریع) - حسابان ۲ صفحه ۹ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$-1 \leq 3 - \frac{x}{4} \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -\frac{x}{4} \leq -1 \Rightarrow 4 \leq x \leq 16$$

با توجه به این که دامنه تابع $y = f(x)$ برابر با $[-1, 2]$ است، می‌توان گفت:

$$-1 \leq 3 - \frac{x}{4} \leq 2 \Rightarrow -4 \leq -\frac{x}{4} \leq -1 \Rightarrow 4 \leq x \leq 16$$

چطوری دامنه و برد تابع بعد از انتقال محاسبه می‌شه؟

اگر دامنه تابع $y = f(x)$ بازه $[m, n]$ باشد، برای تعیین دامنه تابع $y = af(bx + c) + d$ کافی است نامعادله زیر را حل کنیم:

$$m \leq bx + c \leq n$$

اگر برد تابع $y = f(x)$ بازه $[p, q]$ باشد، برای تعیین برد تابع $y = af(bx + c) + d$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

$$p \leq f(x) \leq q \Rightarrow p \leq f(bx + c) \leq q \Rightarrow \text{سه طرف را در } a \text{ ضرب و با جمع می‌کنیم.}$$

یه نمونه باحال ببین!

اگر دامنه و برد تابع $y = f(x)$ به ترتیب بازه‌های $[-1, 2]$ و $[0, 4]$ باشد، دامنه و برد تابع $y = 2 + 3f(2x - 5)$ را محاسبه کنید.

$$\text{دامنه} \Rightarrow -1 \leq 2x - 5 \leq 2 \xrightarrow{+5} 4 \leq 2x \leq 7 \Rightarrow 2 \leq x \leq \frac{7}{2}$$

$$D_{2+3f(2x-5)} = [2, \frac{7}{2}]$$



$$\text{برد} \Rightarrow 0 \leq f(x) \leq 4 \Rightarrow 0 \leq f(2x-5) \leq 4 \xrightarrow{\times 3} 0 \leq 3f(2x-5) \leq 12 \xrightarrow{+2} 2 \leq 2+3f(2x-5) \leq 14$$

$$R_{2+3f(2x-5)} = [2, 14]$$



۲- نمودار تابع $f(x) = 2x^2 - x - 2$ را نسبت به مبدأ مختصات قرینه کرده و طول نقاط واقع بر آن را نصف می‌کنیم. اگر تابع حاصل را g بنامیم، وسیع‌ترین بازه‌ای که نمودار تابع g در آن بازه، نزولی اکید باشد، کدام است؟

- (۱) $[-\frac{1}{16}, +\infty)$ (۲) $(-\infty, \frac{1}{16}]$ (۳) $[-\frac{1}{8}, +\infty)$ (۴) $(-\infty, \frac{1}{8}]$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۱۰-۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$f(x) = 2x^2 - x - 2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ}} y = -2x^2 - x + 2 \xrightarrow{x \rightarrow 2x} g(x) = -8x^2 - 2x + 2$$

رأس سهمی $g(x)$ برابر با $-\frac{1}{8}$ است. پس در بازه $[-\frac{1}{8}, +\infty)$ اکیداً نزولی است.

مراحل تبدیل را به ترتیب انجام می‌دهیم:

$$f(x) = 2x^2 - x - 2 \xrightarrow{\text{قرینه نسبت به مبدأ مختصات}} y = -2(-x)^2 - (-x) - 2 \xrightarrow{\text{طول نقاط نصف}} y = -2(2x)^2 - (2x) + 2$$

$$y = -2x^2 - x + 2 \qquad g(x) = -8x^2 - 2x + 2$$

تابع $g(x)$ یک سهمی است که دهانه آن رو به پایین است، بنابراین در بازه $[-\frac{b}{2a}, +\infty)$ اکیداً نزولی می‌باشد.

تابع در بازه $[-\frac{2}{2 \times (-8)}, +\infty)$ یعنی $[-\frac{1}{8}, +\infty)$ نزولی اکید است. $g(x) = -8x^2 - 2x + 2 \Rightarrow$

توابع صعودی و نزولی

تابع f را «صعودی» می‌گوییم هرگاه در آن با افزایش x ، y زیاد شده یا ثابت باقی بماند.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \geq f(x_1)$$

تابع f را «اکیداً صعودی» می‌گوییم هرگاه در آن با افزایش x ، y زیاد شود.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) > f(x_1)$$



تابع f را «نزولی» می‌گوییم هرگاه در آن با افزایش x ، y کم شده یا ثابت باقی بماند.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) \leq f(x_1)$$



تابع f را «اکیداً نزولی» گوییم هرگاه در آن با افزایش x ، y کم شود.

$$x_2 > x_1 \Rightarrow f(x_2) < f(x_1)$$



تابعی که صعودی یا نزولی باشد را **یکنوا** و تابعی که اکیداً صعودی یا اکیداً نزولی باشد را **اکیداً یکنوا** می‌گوییم.
تابعی که در بازه‌ای صعودی و در بازه‌ای نزولی باشد را **غیریکنوا** می‌گوییم.



تابع ثابت $f(x) = k$ هم صعودی و هم نزولی (یکنوا) می‌باشد.



۳- باقی‌مانده تقسیم چند جمله‌ای $f(x)$ بر $x+2$ و $x-1$ به ترتیب -6 و 0 است. باقی‌مانده تقسیم $x^2 + f(x-1)$ بر $x^2 - x - 2$ کدام است؟

$$3x + 2 \quad (4)$$

$$3x - 2 \quad (3)$$

$$2x - 1 \quad (2)$$

$$2x + 1 \quad (1)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۱۹ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

باقی‌مانده تقسیم $f(x)$ بر $x+2$ و $x-1$ به ترتیب -6 و 0 است، بنابراین:

$$f(x) \mid x+2 \qquad f(x) \mid x-1$$

$$\vdots$$

$$\vdots$$

$$\underline{-6}$$

$$\underline{0}$$

$$f(-2) = -6$$

$$f(1) = 0$$

در تقسیم $x^2 + f(x-1)$ بر $x^2 - x - 2$ ، چون مقسوم‌علیه درجه دوم است، پس باقی‌مانده تقسیم، حداکثر درجه ۱ است، بنابراین باقی‌مانده را $r(x) = ax + b$ فرض می‌کنیم و طبق قضیه تقسیم داریم:

$$x^2 + f(x-1) \mid x^2 - x - 2$$

$$\vdots \qquad Q(x)$$

$$\underline{ax + b}$$

$$x^2 + f(x-1) = (x^2 - x - 2) \times Q(x) + ax + b$$

$$\downarrow$$

$$(x-2)(x+1)$$

با جای‌گذاری $x=2$ و $x=-1$ در عبارت قبل به‌دست می‌آید:

$$\Rightarrow \begin{cases} x=2 \Rightarrow 4 + f(1) = 2a + b \Rightarrow 2a + b = 4 \\ x=-1 \Rightarrow 1 + f(-2) = -a + b \Rightarrow -a + b = -5 \end{cases} \Rightarrow a = 3, b = -2$$

بنابراین باقی‌مانده تقسیم $x^2 + f(x-1)$ بر $x^2 - x - 2$ برابر $3x - 2$ است.



قضیه تقسیم

در تقسیم چندجمله‌ای $A(x)$ بر چندجمله‌ای $B(x)$ ، اگر خارج قسمت $q(x)$ و باقی‌مانده $r(x)$ فرض شود، داریم:

مقسوم
↑
 $A(x) \overline{) B(x)} \rightarrow$ مقسوم‌علیه
∴ $q(x) \rightarrow$ خارج قسمت
 $\overline{r(x)} \rightarrow$ باقی‌مانده

$$A(x) = B(x) \times q(x) + r(x)$$

! درجه باقی‌مانده!

درجه باقی‌مانده یعنی $r(x)$ باید از درجه مقسوم‌علیه کمتر باشد.

! درجه خارج قسمت!

به طور کلی، اگر مقسوم از درجه n و مقسوم‌علیه از درجه m باشد ($n > m$)، آن‌گاه خارج قسمت از درجه $n - m$ و باقی‌مانده حداکثر از درجه $m - 1$ است.

باقی‌مانده تقسیم بر چندجمله‌ای خطی

اگر مقسوم‌علیه از درجه اول باشد، باقی‌مانده از درجه صفر (عدد) است که برای محاسبه آن، کافی است ریشه مقسوم‌علیه را در مقسوم جای‌گذاری کنیم.

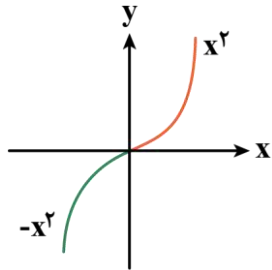
$$\begin{array}{l} A(x) \overline{) ax + b} \\ \vdots \quad q(x) \\ \hline r \end{array}$$

$$A(x) = (ax + b) \times q(x) + r \xrightarrow{x = -\frac{b}{a}} r = A\left(-\frac{b}{a}\right)$$



- ۴- هرگاه تابع $f(x) = |2x - 4|(ax + b)$ در مجموعه \mathbb{R} نزولی اکید باشد، زوج مرتب (a, b) کدام می‌تواند باشد؟
- (۱) $(-2, 4)$ (۲) $(2, 4)$ (۳) $(-2, -4)$ (۴) $(2, -4)$

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۱۸ - ۱۲۰۱



می‌دانیم تابع $y = x|x|$ در \mathbb{R} اکیداً صعودی است:

$$y = x|x| = \begin{cases} x^2 & x \geq 0 \\ -x^2 & x \leq 0 \end{cases}$$

لذا اگر تابع $f(x) = |2x - 4|(ax + b)$ بخواهد اکیداً یکنوا باشد، باید ریشه $2x - 4$ و $ax + b$ یکسان باشد، پس:

$$2x - 4 = 0 \Rightarrow x = 2 \xrightarrow{ax + b = 0} 2a + b = 0$$

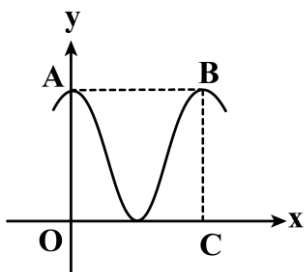
یعنی $b = -2a$ می‌باشد، به این ترتیب:

$$f(x) = |2x - 4|(ax + b) = |2x - 4|(ax - 2a) \Rightarrow f(x) = 2a(x - 2)|x - 2|$$

تابع $y = (x-2)|x-2|$ اکیداً صعودی است، پس برای آن که f اکیداً نزولی باشد، باید $a < 0$ باشد و چون $b = -2a$ است، پس: $b > 0$ لذا زوج مرتب $(-2, 4)$ قابل قبول است.



۵- بخشی از نمودار تابع $f(x) = a - 2\sin^2(\frac{\pi}{b}x)$ شکل مقابل است. اگر چهارضلعی $OABC$ مربع باشد، مقدار $f(\frac{11}{3})$ چه عددی



است؟

- (۱) $\frac{3}{2}$
- (۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}$
- (۳) $\frac{\sqrt{3}}{4}$
- (۴) $\frac{3}{4}$

پاسخ: گزینه ۱

(متوسط - ترکیبی - زمان بَر ۶ - حسابان ۲ صفحه ۲۸ - ۱۴۰۲)

به کمک اتحاد $\cos 2\alpha = 1 - 2\sin^2 \alpha$ ضابطه تابع را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = a - (1 - \cos(\frac{2\pi}{b}x)) = \cos(\frac{2\pi}{b}x) + a - 1$$

با توجه به نمودار می‌بینیم $\min(f) = 0$ می‌باشد، پس:

$$\min(f) = a - 1 - 1 = 0 \Rightarrow a = 2$$

بنابراین:

$$\max(f) = a - 1 + 1 = a \Rightarrow \max(f) = 2$$

مشخص است که $T = OC$ و چون چهارضلعی $OABC$ مربع است، پس $T = \max(f) = 2$ می‌باشد و داریم:

$$T = 2 \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|} = 2 \Rightarrow |b| = 2 \Rightarrow b = \pm 2$$

حال به محاسبه $f(\frac{11}{3})$ می‌پردازیم:

$$f(x) = 1 + \cos(\pm 2\pi x) \Rightarrow f(\frac{11}{3}) = 1 + \cos(\pm \frac{22\pi}{3}) = 1 + \cos(\pm(4\pi - \frac{2\pi}{3})) = 1 + \cos(\mp \frac{2\pi}{3}) = 1 + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$$

دوره تناوب و مقدار ماکزیمم و مینیمم توابع سینوسی و کسینوسی

در مورد توابع $f(x) = a \sin(bx + c) + d$ یا $f(x) = a \cos(bx + c) + d$ می‌توان گفت:

$$T = \frac{2\pi}{|b|} \text{ : دوره تناوب}$$

$$\begin{aligned} \min(f) &= -|a| + d \\ \max(f) &= |a| + d \end{aligned}$$

راهنمای مسیرت

آیا ما نمودار تابع‌های مثلثاتی سینوسی و کسینوسی با توان ۲ رو بلدیم؟ خیر!

پس چیکار باید کرد؟ باید هر موقع از این دست سؤالات داشتیم که نمودار داده شده بود و ضابطه توان ۲ داشت، با استفاده از روابط طلایی در اولین قدم توان دوم رو توی فرمول از بین ببریم.



$$\cos 2\alpha = \begin{cases} 1 - 2\sin^2 \alpha \\ 2\cos^2 \alpha - 1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \sin^2 \alpha = \frac{1 - \cos 2\alpha}{2} \\ \cos^2 \alpha = \frac{1 + \cos 2\alpha}{2} \end{cases}$$



۶- اگر $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ باشند، مقدار $\tan(\alpha + \beta)$ چه عددی است؟

$$\frac{1}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{1}{3} \quad (۳)$$

$$\frac{1}{12} \quad (۲)$$

$$\frac{1}{8} \quad (۱)$$

(آسان - ترکیبی - سریع) حسابان ۲ صفحه ۴۲ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۴

از آن جایی که $\tan \alpha$ و $\tan \beta$ جواب‌های معادله $2x^2 - x - 4 = 0$ هستند، بنابراین:

$$\tan \alpha + \tan \beta = -\frac{-1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\tan \alpha \times \tan \beta = \frac{-4}{2} = -2$$

حال به محاسبه $\tan(\alpha + \beta)$ می‌پردازیم، ببینید:

$$\tan(\alpha + \beta) = \frac{\tan \alpha + \tan \beta}{1 - \tan \alpha \times \tan \beta} = \frac{\frac{1}{2}}{1 - (-2)} = \frac{\frac{1}{2}}{3} = \frac{1}{6}$$

یادآوری روابط بین ریشه‌های معادله درجه دوم

اگر α و β ($\alpha > \beta$) ریشه‌های معادله $ax^2 + bx + c = 0$ باشند، داریم:

$$۱) S = \alpha + \beta = -\frac{b}{a}$$

$$۳) |\alpha - \beta| = \frac{\sqrt{\Delta}}{|a|}$$

$$۵) \alpha^2 + \beta^2 = S^2 - 2P$$

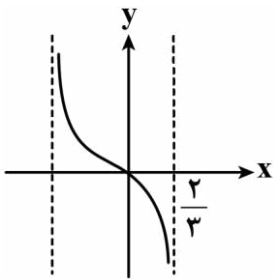
$$۲) P = \alpha \times \beta = \frac{c}{a}$$

$$۴) \sqrt{\alpha} \pm \sqrt{\beta} = \sqrt{S \pm 2\sqrt{P}}$$

$$۶) \alpha^3 + \beta^3 = S^3 - 3PS$$



۷- بخشی از نمودار تابع $f(x) = \sqrt{3} - \tan(ax + b)$ با فرض $0 < a, b < \frac{\pi}{2}$ شکل مقابل است. مقدار $\frac{b}{a}$ کدام است؟



$$\frac{2}{2} \quad (۱)$$

$$\frac{2}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{2}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{4}{3} \quad (۴)$$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۳۲ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۴

با توجه به نمودار تابع $f(0) = 0$ می‌باشد، پس:

$$f(0) = \sqrt{3} - \tan b = 0 \Rightarrow \tan b = \sqrt{3} \xrightarrow{0 < b < \frac{\pi}{2}} b = \frac{\pi}{3}$$



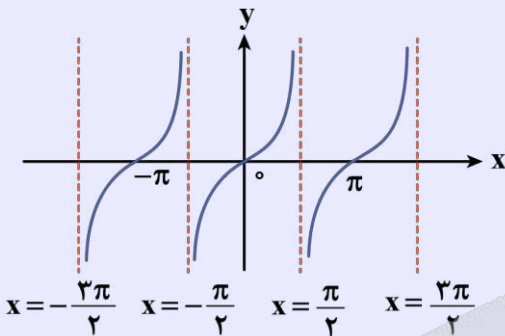
از طرفی در $x = \frac{\pi}{3}$ تابع تعریف نشده است، لذا کمان تابع به ازای $x = \frac{\pi}{3}$ باید برابر $\frac{\pi}{2}$ باشد، بنابراین:

$$\frac{\pi}{3}a + b = \frac{\pi}{2} \xrightarrow{b = \frac{\pi}{3}} \frac{\pi}{3}a = \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \frac{\pi}{4}$$

$$\frac{b}{a} = \frac{\frac{\pi}{3}}{\frac{\pi}{4}} = \frac{4}{3}$$

پس حاصل $\frac{b}{a}$ برابر است با:

رسم نمودار تابع تانژانت



دامنه: دامنه تابع $y = \tan x$ برابر $\mathbb{R} - \left\{ x = k\pi + \frac{\pi}{2}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ است.

برد: برد تابع \mathbb{R} می باشد.

دوره تناوب: دوره تناوب تابع $T = \pi$ می باشد.

تابع در حالت کلی غیریکنوا است و یک به یک و وارون پذیر نمی باشد.



۸- اگر $x = \frac{\pi}{12}$ یک جواب معادله $a + 4\sin^2 x = 2$ باشد، چهارمین جواب مثبت معادله چه عددی است؟

$$\frac{23\pi}{12} \quad (4)$$

$$\frac{25\pi}{12} \quad (3)$$

$$\frac{19\pi}{12} \quad (2)$$

$$\frac{17\pi}{12} \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۳۹ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۴

جواب معادله است، پس در معادله صدق می کند، بنابراین:

$$a + 4\sin^2 x = 2 \Rightarrow a = 2 - 4\sin^2 x \Rightarrow a = 2(1 - 2\sin^2 x) \Rightarrow a = 2\cos 2x$$

$$\xrightarrow{\text{جواب معادله } \frac{\pi}{12}} a = 2\cos \frac{\pi}{6} \Rightarrow a = \sqrt{3}$$

حال به محاسبه جواب های معادله می پردازیم:

$$\sqrt{3} = 2\cos 2x \Rightarrow \cos 2x = \frac{\sqrt{3}}{2} \Rightarrow 2x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{6} \Rightarrow x = k\pi \pm \frac{\pi}{12} \quad (k \in \mathbb{Z})$$

k	۰	۱	۲	...
x	$\pm \frac{\pi}{12}$	$\frac{11\pi}{12}, \frac{13\pi}{12}$	$\frac{23\pi}{12}, \frac{25\pi}{12}$...

بنابراین چهارمین جواب مثبت معادله برابر $\frac{23\pi}{12}$ است.

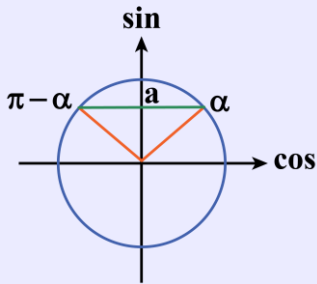


معادله مثلثاتی معادله‌ای است که مجهول آن (x) در کمان یک نسبت مثلثاتی قرار بگیرد. مثلاً معادله $\sin x = \frac{1}{2}$ یک معادله مثلثاتی است

که با حل این معادله به دنبال زوایایی هستیم که سینوس آن‌ها برابر $\frac{1}{2}$ است.

برای حل معادلات مثلثاتی باید در دو طرف تساوی، نسبت مثلثاتی یکسان و هم‌علامت داشته باشیم. اگر در یک طرف به جای نسبت مثلثاتی عدد داشتیم، ابتدا باید به جای آن، نسبت مثلثاتی زاویه‌ای که این عدد را می‌دهد بنویسیم؛ سپس با قواعد زیر جواب‌های کلی معادله را به دست آوریم:

۱) معادله مثلثاتی سینوسی:



$$\sin x = a \xrightarrow{-1 \leq a \leq 1} \sin x = \sin \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha \end{cases}$$

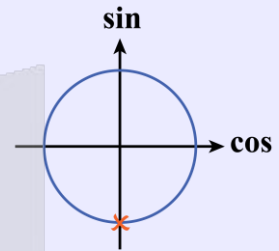
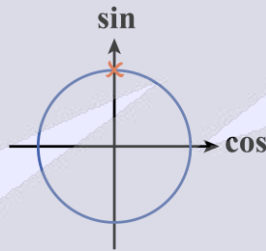
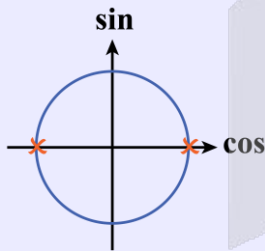
$$\sin x = \sin y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi + \pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

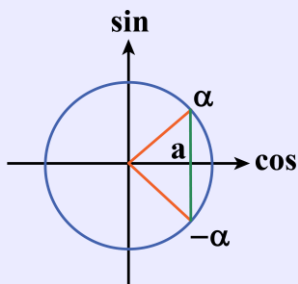
۱) $\sin A = 0 \Rightarrow A = k\pi$

۲) $\sin A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$

۳) $\sin A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$



۲) معادله مثلثاتی کسینوسی:



$$\cos x = a \xrightarrow{-1 \leq a \leq 1} \cos x = \cos \alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha \\ x = 2k\pi - \alpha \end{cases}$$

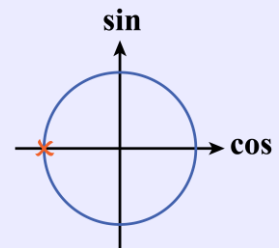
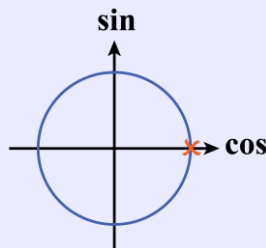
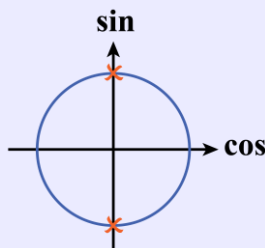
$$\cos x = \cos y \rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + y \\ x = 2k\pi - y \end{cases}$$

حالت‌های خاص:

۱) $\cos A = 0 \Rightarrow A = k\pi + \frac{\pi}{2}$

۲) $\cos A = 1 \Rightarrow A = 2k\pi$

۳) $\cos A = -1 \Rightarrow A = 2k\pi + \pi$



۹- اگر $\lim_{x \rightarrow -1} \frac{ax+b}{(x+1)(ax-2)} = -\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

(۴) $b < 2$

(۳) $b > -2$

(۲) $b < -2$

(۱) $b > 2$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۵۱ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۳

حد هر دو طرف در $x = -1$ برابر $-\infty$ است، یعنی در $x = -1$ حدهای راست و چپ هر دو $-\infty$ می‌باشند، پس مخرج در $x = -1$ ریشه مضاعف دارد.

$$ax - 2 = 0 \Rightarrow x = \frac{2}{a} \Rightarrow \frac{2}{a} = -1 \Rightarrow a = -2$$

$$\lim_{x \rightarrow -1} \frac{-2x + b}{(x+1)(-2x-2)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow -1} \frac{2x - b}{2(x+1)^2} = \frac{-2 - b}{0^+} = -\infty$$

$$\Rightarrow -2 - b < 0 \Rightarrow b > -2$$

حد بی‌نهایت

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} f(x)$ ، اگر حاصل حد برابر ∞ شود به آن **حد بی‌نهایت** می‌گوییم. در حد توابع کسری که پس از ساده‌سازی صورت و مخرج، حاصل حد صورت، عددی ثابت و غیرصفر، و حاصل حد مخرج برابر صفر (صفرحدی) شود، به جواب ∞ می‌رسیم:

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{g(a) \neq 0}{(حدی)0} = \infty$$

به نکته طلایی!

$\frac{\text{عدد مثبت غیرصفر}}{0^+} = +\infty$	$\frac{\text{عدد مثبت غیرصفر}}{0^-} = -\infty$
$\frac{\text{عدد منفی غیرصفر}}{0^+} = -\infty$	$\frac{\text{عدد منفی غیرصفر}}{0^-} = +\infty$

به نمودارهای زیر توجه کنید:



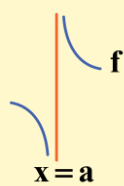
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{وجود ندارد}$$



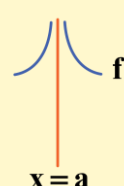
$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$$



به نمونه بحال ببین!

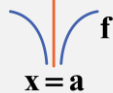
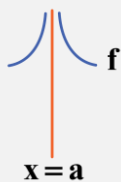
حاصل حدهای زیر را به دست آورید.

$$1) \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x}{x-3} = \frac{2 \times 3}{3^- - 3} = \frac{6}{0^-} = -\infty$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x}{|x-3|} = \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 3^+} \frac{4x}{|x-3|} = \frac{4 \times 3}{0^+} = +\infty \\ \lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{4x}{|x-3|} = \frac{4 \times 3}{0^+} = +\infty \end{cases} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 3} \frac{4x}{|x-3|} = +\infty$$

۳ حالت خاص رو یادت باشه!

در محاسبه حد بی‌نهایت، اگر پس از ساده‌سازی در مخرج، عامل صفرشونده با توان زوج یا عامل صفرشونده در قدرمطلق داشته باشیم یا عامل صفر شونده مخرج به صورت $1 \pm \sin x$ یا $1 \pm \cos x$ باشد، در این صورت حدهای راست و چپ در آن نقطه هر دو هم‌علامت خواهند شد و هر دو شاخه در اطراف مجانب قائم به یک سمت حرکت می‌کنند.



$$f(x) = \frac{g(x)}{|x-a|} \quad g(a) \neq 0$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{(x-a)^{2n}} \quad g(a) \neq 0$$

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 \pm \sin 0} \quad g(a) \neq 0$$

مخرج صفر می‌شود

$$f(x) = \frac{g(x)}{1 \pm \cos 0} \quad g(a) \neq 0$$

مخرج صفر می‌شود



۱۰- به‌ازای چند مقدار حقیقی m رابطه $\lim_{x \rightarrow m^-} \frac{2x-5}{x^4 - 5x^3 + 6x^2} = -\infty$ برقرار است؟

۳ (۴)

۲ (۳)

۱ (۲)

صفر (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۵۲ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۴

$x = m$ یکی از ریشه‌های مخرج است که صورت را صفر نمی‌کند:

$$x^4 - 5x^3 + 6x^2 = x^2(x^2 - 5x + 6) = x^2(x-2)(x-3)$$

کافی است نقاط $x=0$ ، $x=2$ و $x=3$ که ریشه‌های مخرج هستند را به جای m قرار داده و درستی حد را بررسی کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{2x-5}{x^2(x-2)(x-3)} = \frac{-5}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{2x-5}{x^2(x-2)(x-3)} = \frac{-1}{0^+} = -\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{2x-5}{x^2(x-2)(x-3)} = \frac{1}{0^-} = -\infty$$

پس هر ۳ مقدار m قابل قبول است.





۱۱- اگر $\lim_{x \rightarrow a^-} \log \frac{x^2-1}{4-x^2} = -\infty$ باشد، مقدار a کدام می‌تواند باشد؟

(۴) -۲

(۳) ۲

(۲) -۱

(۱) ۱

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) حسابان ۲ صفحه ۵۰ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ ، پس باید در نقطه $x = a$ عبارت $\frac{x^2-1}{4-x^2}$ برابر صفر شود و با توجه به دامنه تابع لگاریتمی و این که

حد چپ در نقطه a در حال محاسبه است، باید $\frac{x^2-1}{4-x^2}$ در سمت چپ $x = a$ مثبت باشد تا $\log \frac{x^2-1}{4-x^2}$ تعریف شده باشد.

$$P = \frac{x^2-1}{4-x^2} > 0 \Rightarrow \begin{array}{c|cccc} P & - & + & - & + \\ \hline & -2 & -1 & 1 & 2 \\ & \text{ن} & \text{ن} & \text{ن} & \text{ن} \end{array}$$

تابع داده شده در سمت چپ $x = -1$ و $x = 2$ تعریف شده است ولی $x = -1$ ریشه کسر $\frac{x^2-1}{4-x^2}$ است.

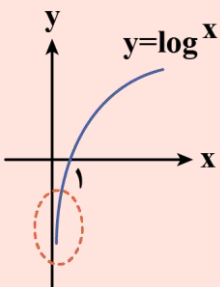
دامنه تابع لگاریتمی

$$h(x) = \log_{g(x)}^{f(x)} \Rightarrow \begin{cases} f(x) > 0 & (1) \\ g(x) > 0 & (2) \\ g(x) \neq 1 & (3) \end{cases} \Rightarrow D_h = (1) \cap (2) \cap (3)$$

توجه داشته باشید که ۳ شرط بالا فقط برای دامنه لگاریتم است و در حقیقت باید دامنه $f(x)$ و $g(x)$ هم محاسبه شده و با (۱)، (۲) و (۳) اشتراک گرفته شوند تا دامنه واقعی $h(x)$ به دست آید.

تذکره!

برای درک بهتر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \log x = -\infty$ نمودار $y = \log x$ را ببینید:





۱۲- هرگاه $f(x) = -x^2 + 6x - 6$ به طوری که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\alpha - f(x+\beta)} = +\infty$ باشد، مقدار $\beta - \alpha$ کدام است؟

۶ (۴)

۴ (۳)

-۲ (۲)

-۴ (۱)

(سخت - مفهومی - زمان ۲۰ - حسابان ۲ صفحه ۵۲ - ۱۳۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

از آن جایی که حاصل $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\alpha - f(x+\beta)} = +\infty$ است، پس باید حد مخرج برابر 0^+ باشد، یعنی:

$$\lim_{x \rightarrow 2} \alpha - f(x+\beta) = 0^+$$

از طرفی چون هر دو حد راست و چپ در $x=2$ برابر $+\infty$ شده است و $f(x)$ از درجه دوم است، پس در مخرج عامل $(x-2)^2$ وجود دارد:

$$\alpha - f(x+\beta) = (x-2)^2 \Rightarrow \alpha - \left(-(x+\beta)^2 + 6(x+\beta) - 6 \right) = (x-2)^2 \Rightarrow \alpha + (x+\beta)^2 - 6(x+\beta) + 6 = (x-2)^2$$

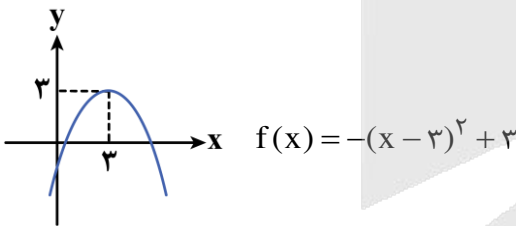
$$\Rightarrow x^2 + (2\beta - 6)x + \beta^2 - 6\beta + 6 + \alpha = x^2 - 4x + 4 \Rightarrow \begin{cases} 2\beta - 6 = -4 \Rightarrow \beta = 1 \\ \beta^2 - 6\beta + 6 + \alpha = 4 \xrightarrow{\beta=1} 1 - 6 + 6 + \alpha = 4 \Rightarrow \alpha = 3 \end{cases}$$

بنابراین $\beta - \alpha$ برابر است با:

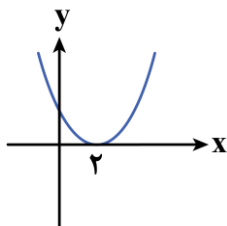
$$\beta - \alpha = 1 - 3 = -2$$

روش دوم

نمودار تابع f را رسم می‌کنیم:



با توجه به این که $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\alpha - f(x+\beta)} = +\infty$ ، پس نمودار $y = \alpha - f(x+\beta)$ در $x=2$ بر محور x مماس خواهد شد و البته تابع در این نقطه دارای \min به شکل مقابل خواهد بود.



پس اگر نمودار f را یک واحد به چپ انتقال دهیم و نسبت به محور طول‌ها قرینه کنیم به $y = -f(x+1)$ می‌رسیم که در $M \Big|_{-3}^2$ دارای

\min است و با انتقال ۳ واحد به سمت بالا بر محور x مماس خواهد شد، یعنی:

$$\alpha - f(x+\beta) = 3 - f(x+1)$$

پس:

$$\alpha = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{1}{\beta + (x-2)^2 - 3} = \frac{1}{0^+} = +\infty \Rightarrow \beta - \alpha = 1 - 3 = -2$$



۱۳- اگر $\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{a - b \sin(\frac{2}{3}x)}{\cos 2x - a \cos x} = -\infty$ باشد، حدود b کدام است؟

(۴) $b < 1$

(۳) $b > -1$

(۲) $b < -1$

(۱) $b > 1$

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - حسابان ۲ صفحه ۵۲ - ۱۲۰۳

پاسخ: گزینه ۲

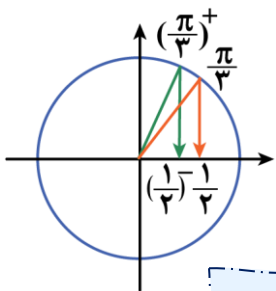
چون حد تابع برابر بی نهایت شده است، پس $x = \frac{\pi}{3}$ مخرج را صفر می کند:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \cos 2x - a \cos x = 0 \Rightarrow \cos \frac{2\pi}{3} - a \cos \frac{\pi}{3} = 0 \Rightarrow -\frac{1}{2} - \frac{a}{2} = 0 \Rightarrow a = -1$$

با توجه به مقدار a حد را بازنویسی می کنیم:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{-1 - b \sin(\frac{2}{3}x)}{\cos 2x + \cos x} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{-1 - b \sin(\frac{2}{3}x)}{\underbrace{2 \cos^2 x - 1}_{\cos 2x} + \cos x} = \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{-1 - b \sin(\frac{2}{3}x)}{\underbrace{(2 \cos x - 1)}_{-} \underbrace{(\cos x + 1)}_{+}}$$

دقت کنید در مخرج عامل $2 \cos x - 1$ هنگامی که $x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+$ برابر 0^- می شود، زیرا:



$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \cos x < \frac{1}{2} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} 2 \cos x - 1 < 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} 2 \cos x - 1 = 0^-$$

در نتیجه $2 \cos x - 1$ وقتی x با مقادیر بزرگتر از $\frac{\pi}{3}$ به آن نزدیک می شود از $\frac{1}{2}$ کمتر است.
 $\cos x < \frac{1}{2}$

در نتیجه $2 \cos x - 1$ وقتی x با مقادیر بزرگتر از $\frac{\pi}{3}$ به آن نزدیک می شود از صفر کمتر است.
 $2 \cos x - 1 < 0$

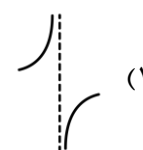
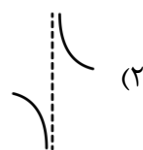
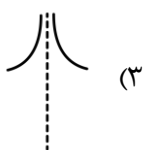
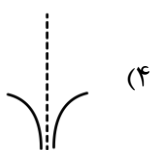
بنابراین:

$$\lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} \frac{-1 - b \sin(\frac{2}{3}x)}{(2 \cos x - 1)(\cos x + 1)} = -\infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow (\frac{\pi}{3})^+} -1 - b \sin(\frac{2}{3}x) > 0 \Rightarrow -1 - b \sin(\frac{\pi}{3})^+ > 0$$

$\Rightarrow -1 - b > 0 \Rightarrow b < -1$



۱۴- نمودار تابع $f(x) = \frac{2-3(-1)^{[x]}}{2-\sqrt{x}}$ در مجاورت مجانب قائم تابع به کدام شکل است؟






$x = 4$ مجانب قائم تابع است، زیرا ریشهٔ مخرج است و عبارت صورت به ازای آن تعریف شده و غیرصفر است به طوری که:

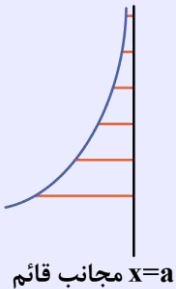
$$\lim_{x \rightarrow 4^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2 - 3(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{2 - 3 \times 1}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4^+} \frac{-1}{2 - \sqrt{x}} = +\infty$$

$$\lim_{x \rightarrow 4^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2 - 3(-1)^{\lfloor x \rfloor}}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{2 - 3(-1)}{2 - \sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow 4^-} \frac{5}{2 - \sqrt{x}} = +\infty$$

پس نمودار تابع در همسایگی مجانب قائم $x = 4$ به صورت  است.

مجانب قائم

مجانب قائم خط قائمی است که نمودار تابع به آن نزدیک و نزدیکتر می‌شود. اگر خط $x = a$ مجانب قائم تابع $f(x)$ باشد، آن‌گاه:



$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \infty$$

برای به دست آوردن مجانب قائم در توابع کسری ریشه‌های مخرج را به دست می‌آوریم به شرطی که ریشهٔ صورت نباشد و حداقل در یک همسایگی آن تابع تعریف شود.

توابعی که دارای برد محدود هستند مانند $y = \sin x$ ، $y = \cos x$ و ... مجانب قائم ندارند زیرا y نمی‌تواند به ∞ میل کند.

یه نمونهٔ باحال ببین!

مجانب قائم توابع زیر را به دست آورید.

$$f(x) = \frac{x+1}{|x|-1}$$

$$|x|-1=0 \Rightarrow |x|=1 \Rightarrow \begin{cases} x=1 & \text{مجانب قائم} \\ x=-1 & \text{مجانب قائم نیست زیرا صورت را صفر می‌کند.} \end{cases}$$

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{\sqrt{x}-1}$$

$$\sqrt{x}=0 \Rightarrow x=0 \text{ مجانب قائم نیست}$$

$$\sqrt{x}-1=0 \Rightarrow x-1=0 \Rightarrow x=1 \text{ مجانب قائم}$$

$$D_g = (1, +\infty)$$

$x=0$ مجانب قائم نیست زیرا تابع در همسایگی آن تعریف نمی‌شود.



۱۵- تابع $f(x) = \frac{2x^2 - 3x - 14}{mx^2 + 4x + 8}$ فقط یک مجانب قائم دارد. برای m چند مقدار مختلف به دست می آید؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - زمان بَر (۵) - حسابان ۲ صفحه ۵۶ - ۱۲۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

چند حالت می توانیم بررسی کنیم:

حالت اول

مخرج ریشه مضاعف داشته باشد:

$$\Delta_{\text{مخرج}} = b^2 - 4ac = 0 \Rightarrow 16 - 32m = 0 \Rightarrow m = \frac{1}{2}$$

$$f(x) = \frac{(x+2)(2x-7)}{\frac{1}{2}(x+4)^2} \Rightarrow \text{مجانِب قائم است. } x = -4$$

حالت دوم

مخرج درجه اول باشد، در این حالت داریم:

$$m = 0$$

$$f(x) = \frac{(x+2)(2x-7)}{4(x+2)} = \frac{2x-7}{4} \text{ فاقد مجانب قائم است، پس } m=0 \text{ غیرقابل قبول است.}$$

حالت سوم

ریشه صورت، همان ریشه مخرج باشد تا پس از ساده سازی کسر، عبارت مخرج به درجه اول تبدیل شود، یعنی $x = \frac{7}{2}$ ریشه مخرج باشد.

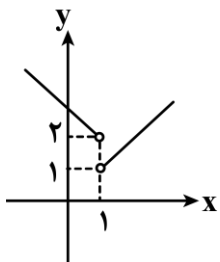
$$m \times \frac{49}{4} + 14 + 8 = 0 \Rightarrow \frac{49m}{4} = -22 \Rightarrow m = \frac{-88}{49}$$

البته توجه کنید که اگر $x = -2$ ریشه مخرج باشد، همان $m = 0$ به دست می آید که قابل قبول نمی باشد، پس در کل ۲ مقدار $m = \frac{1}{2}$ و

$$m = \frac{-88}{49} \text{ قابل قبول اند.}$$



۱۶- نمودار تابع $y = f(x)$ شکل مقابل است. ضابطه تابع $y = g(x)$ کدام می تواند باشد تا $\lim_{x \rightarrow 1} (2f(x) - g(x))$ موجود باشد؟



$$g(x) = \begin{cases} x - 3 & x > 1 \\ x & x < 1 \end{cases} \quad (۲)$$

$$g(x) = \begin{cases} x + 2 & x > 1 \\ 5x + 2 & x < 1 \end{cases} \quad (۴)$$

$$g(x) = \begin{cases} 5x - 2 & x > 1 \\ x + 1 & x < 1 \end{cases} \quad (۱)$$

$$g(x) = \begin{cases} 4x - 1 & x > 1 \\ 7x - 2 & x < 1 \end{cases} \quad (۳)$$

(متوسط - مفهومی - زمان بَر (۵) - حسابان ۱ صفحه ۱۲۵ - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

اگر فرض کنیم: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \alpha$ ، $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \beta$ ، آن گاه با شرط برابری حد چپ و راست تابع $2f - g$ در $x = 1$ داریم:

$$2 - \alpha = 4 - \beta \Rightarrow \alpha - \beta = -2$$

و با توجه به گزینه ها فقط گزینه ۳ این ویژگی را دارد.



تابع $y = f(x)$ در $x = 1$ حد ندارد زیرا حدهای راست و چپ تابع در این نقطه با هم برابر نیستند، به طوری که:

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = 1, \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = 2$$

اگر فرض کنیم: $\lim_{x \rightarrow 1^+} g(x) = \alpha$, $\lim_{x \rightarrow 1^-} g(x) = \beta$ ، آن‌گاه با شرط برابری حد چپ و راست تابع $2f - g$ در $x = 1$ داریم:

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 1^+} (2f(x) - g(x)) &= 2 - \alpha \\ \lim_{x \rightarrow 1^-} (2f(x) - g(x)) &= 4 - \beta \end{aligned} \Rightarrow 2 - \alpha = 4 - \beta$$

$$\alpha - \beta = -2$$

پس:

لذا در بین گزینه‌ها، فقط گزینه ۳ این شرط را دارد.

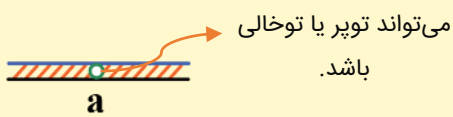
شرط آن که تابع در یک نقطه دارای حد باشد، آن است که:



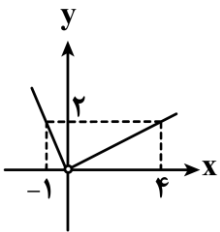
(۱) تابع در همسایگی آن نقطه (نه لزوماً خود آن نقطه) تعریف شده باشد.

(۲) حدهای راست و چپ اعداد مشخصی باشند. یعنی اعداد غیرمشخص و ∞ نباشند.

(۳) حدهای راست و چپ با هم برابر باشند. یعنی $\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^-} f(x)$.



۱۷- نمودار f شکل مقابل است. مقدار $\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(\sin x)}{|x|}$ چند برابر $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2|x|)}{x}$ است؟



- (۱) $\frac{1}{2}$
- (۲) ۲
- (۳) ۱
- (۴) $-\frac{1}{2}$

آسان - مفهومی - سریع (حسابان ۱ صفحه ۱۴۳ - ۱۱۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x > 0 \\ 2 & \\ -2x & x < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(\sin x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \sin x}{-x} = 2 \\ \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(2|x|)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \times 2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{2}{1} = 2$$

ابتدا ضابطه تابع f را می‌نویسیم:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}x & x > 0 \\ 2 & \\ -2x & x < 0 \end{cases}$$



با توجه به ضابطه f داریم:

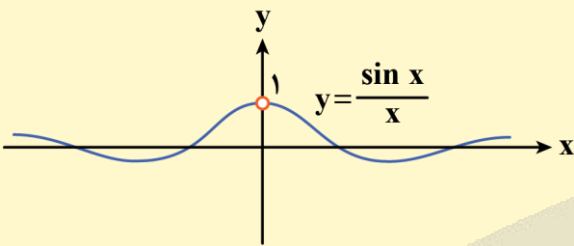
$$\lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{f(\sin x)}{|x|} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{-2 \sin x}{-x} = 2$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{f(\sqrt{|x|})}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\frac{1}{2} \times 2|x|}{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x} = 1$$

بنابراین جواب برابر $\frac{2}{1}$ یا همان 2 است.

یک حد معروف!

بلد بودن این حد از نون شب واجب‌تره!



$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{a \sin x}{bx} = \frac{a}{b}$$

در نتیجه:



۱۸- اگر $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{a + \sqrt{bx - c}} = 4$ باشد، مقدار $\frac{ab}{c}$ چه عددی است؟

۴) -1

۳) 1

۲) $-\frac{1}{2}$

۱) $\frac{1}{2}$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - حسابان ۱ صفحه ۱۴۲ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۳

روش اول

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{a + \sqrt{bx - c}} = \frac{0}{a + \sqrt{-c}}$$

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{a + \sqrt{bx - c}}$ ، چون حد صورت کسر برابر صفر است، پس حد مخرج کسر نیز برابر صفر می‌شود، بنابراین:

$$a + \sqrt{-c} = 0 \Rightarrow \sqrt{-c} = -a \xrightarrow{\substack{c < 0 \\ a < 0}} -c = a^2 \Rightarrow c = -a^2$$

به کمک اتحاد مزدوج داریم:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{a + \sqrt{bx - c}} \times \frac{a - \sqrt{bx - c}}{a - \sqrt{bx - c}} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(a - \sqrt{bx - c})}{a^2 - (bx - c)} = 4 \xrightarrow{\substack{a^2 = -c \\ \sqrt{-c} = |a|}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x(a - \sqrt{-c})}{-bx} = 4$$

$$\Rightarrow \frac{2 \times 2a}{-b} = 4 \Rightarrow a = -b$$

بنابراین:

$$\begin{cases} a = -b \\ a^2 = -c \end{cases} \Rightarrow \frac{ab}{c} = \frac{a(-a)}{-a^2} = 1$$

روش دوم

(برای فارغ التحصیل‌ها و کسانی که مشتق بلدن 😊)

قسمت اول این روش مانند روش فوق می‌باشد که نتیجه می‌شود $c = -a^2$. حال برای محاسبه حد $\frac{0}{0}$ می‌توان از روش هوییتال استفاده کرد،

ببینید:

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{2x}{a + \sqrt{bx - c}} \xrightarrow[\text{HOP}]{\text{باید } \frac{0}{0} \text{ باشد}} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{2}{\frac{b}{2\sqrt{bx - c}}} = \frac{4\sqrt{-c}}{b} = 4 \Rightarrow \sqrt{-c} = b \xrightarrow{c < 0, b > 0} -c = b^2 \Rightarrow c = -b^2$$

بنابراین:

$$\frac{ab}{c} = \frac{ab}{-b^2} = \frac{-a}{b} = \frac{\sqrt{-c}}{\sqrt{-c}} = 1$$

(اگر مشتق بلدی گوش کن!) قضیه هوییتال (HOP)

اگر $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{0}{0}$ و توابع $f(x)$ و $g(x)$ در $x = a$ مشتق‌پذیر باشند، برای محاسبه این حد مبهم، می‌توانیم از قضیه هوییتال استفاده

کنیم و اگر مجدداً حد مبهم $\frac{0}{0}$ شود باز هم قضیه هوییتال را تکرار می‌کنیم.

$$\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[\text{HOP}]{\frac{0}{0}} \lim_{x \rightarrow a} \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

قلقشو یاد بگیر!

اگر حاصل $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ برابر عدد مشخص و حقیقی k باشد، در این صورت:

$$\lim_{x \rightarrow a} g(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(a)}{\text{حدی}} = k \Rightarrow f(a) \text{ یعنی کسر صورت در نتیجه صورت کسر یعنی } f(a) \text{ باید مبهم } \frac{0}{0} \text{ شود، در نتیجه صورت کسر یعنی } f(a) \text{ هم صفر می‌شود. (} \circ \text{ حدی)}$$

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = 0 \rightarrow \lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\text{حدی}}{g(a)} = k \neq 0 \Rightarrow \text{چون حاصل حد، عدد مشخص و مخالف صفر } k \text{ می‌شود، پس حد باید مبهم } \frac{0}{0} \text{ شود، در نتیجه مخرج کسر یعنی } g(a) \text{ هم صفر می‌شود. (} \circ \text{ حدی)}$$



۱۹- تابع $f(x) = [\sqrt{2x+3}]$ در بازه $(3, k)$ فقط یک نقطه ناپیوستگی دارد. حداکثر مقدار k کدام است؟

۱۶/۵ (۴)

۵ (۳)

۱۱ (۲)

۶/۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع) - حسابان ۱ صفحه ۱۵۱ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

$$\sqrt{2x+3} = 3 \Rightarrow 2x+3=9 \Rightarrow x=3$$

$$\sqrt{2x+3} = k ; k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2x+3} = 4 \Rightarrow 2x+3=16 \Rightarrow x=6/5$$

$$\sqrt{2x+3} = 5 \Rightarrow 2x+3=25 \Rightarrow x=11$$

تابع $f(x)$ در نقاطی ناپیوسته است که $\sqrt{2x+3}$ عدد صحیح باشد. با توجه به بازه داده شده داریم:

$$\sqrt{2x+3} = 3 \Rightarrow 2x+3=9 \Rightarrow x=3$$

$$\sqrt{2x+3} = k ; k \in \mathbb{N} \Rightarrow \sqrt{2x+3} = 4 \Rightarrow 2x+3=16 \Rightarrow x=6/5$$

$$\sqrt{2x+3} = 5 \Rightarrow 2x+3=25 \Rightarrow x=11$$

x	۳	۶/۵	۱۱
$\sqrt{2x+3}$	۳	۴	۵

$x=3$ در بازه داده شده قرار ندارد، پس جز نقاط ناپیوستگی محسوب نمی‌شود، بنابراین $x=6/5$ طول اولین نقطه ناپیوستگی است، زیرا در این نقطه داخل براکت عدد صحیح می‌شود. پس می‌توانیم بازه را تا ۱۱ ادامه دهیم زیرا حداکثر مقدار طول بازه خواسته شده است. اگر $k > 11$ باشد، آن‌گاه $x=11$ هم جزء نقاط ناپیوستگی خواهد بود و تابع $f(x)$ در بازه $(3, k)$ دارای حداقل ۲ نقطه ناپیوستگی خواهد بود که خلاف فرض سؤال است. پس بیش‌ترین مقدار k برابر ۱۱ خواهد بود.

توابع براکتی

از پیوستگی توابع براکتی به فرم $f(x) = [g(x)]$ بدانید:

(۱) در نقاطی که درون براکت، عدد صحیح ایجاد شود، (احتمالاً) تابع ناپیوسته است.

یه نمونه باحال ببین!

تابع $f(x) = [2x]$ در نقاط $..., -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, ...$ ناپیوسته است.

(۲) اگر x به سمت طول نقطه \min تابع $g(x)$ میل کند و درون براکت عدد صحیح ایجاد شود، آن‌گاه تابع در این نقطه پیوسته خواهد بود.

یه نمونه باحال ببین!

تابع $y = [(x-1)^2]$ در $x=1$ پیوسته است.

(۳) تابع $f(x) = [g(x)]$ در بازه‌هایی به فرم

(نقطه‌ای که درون براکت را تبدیل به عدد صحیح $k+1$ می‌کند، نقطه‌ای که درون براکت را به عدد صحیح k تبدیل می‌کند)

به شرط پیوسته بودن $g(x)$ در این بازه، پیوسته است.

یه نمونه باحال ببین!

تابع $y = [\sqrt{x}]$ در بازه‌های مانند $(4, 9)$ پیوسته است.

درون براکت تبدیل به ۳ می‌شود / درون براکت تبدیل به ۲ می‌شود.





۲۰- تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt{x^2 + 4x + 4} & |x| \leq 1 \\ ax^2 - bx + 4 & |x| > 1 \end{cases}$ در تمام اعداد حقیقی پیوسته است. مقدار $\frac{a}{b}$ چه عددی است؟

$$-\frac{1}{2} \quad (4)$$

$$\frac{1}{2} \quad (3)$$

$$-2 \quad (2)$$

$$2 \quad (1)$$

سخت - محاسباتی - استاندارد (۵) - حسابان ۱ صفحه ۱۵۱ - ۱۱۰۵

پاسخ: گزینه ۱

تابع $f(x)$ را ساده می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} |x+2| & |x| \leq 1 \Rightarrow -1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 - bx + 4 & |x| > 1 \Rightarrow \begin{cases} x > 1 \\ x < -1 \end{cases} \end{cases} \Rightarrow f(x) = \begin{cases} |x+2| & -1 \leq x \leq 1 \\ ax^2 - bx + 4 & x < -1 \cup x > 1 \end{cases}$$

از آن جایی که تابع $f(x)$ در همه نقاط پیوسته است، باید در نقاط مرزی $x=1$ و $x=-1$ نیز پیوسته باشد.
بررسی پیوستگی در $x=1$:

$$f(1) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} |x+2| = 3$$

$$\Rightarrow a - b + 4 = 3 \Rightarrow a - b = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} ax^2 - bx + 4 = a - b + 4$$

بررسی پیوستگی در $x=-1$:

$$f(-1) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^+} |x+2| = 1$$

$$\Rightarrow a + b + 4 = 1 \Rightarrow a + b = -3$$

$$\lim_{x \rightarrow (-1)^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow (-1)^-} ax^2 - bx + 4 = a + b + 4$$

از دو معادله $a - b = -1$ و $a + b = -3$ نتیجه می‌شود که $a = -2$ و $b = -1$ می‌باشد، بنابراین:

$$\frac{a}{b} = \frac{-2}{-1} = 2$$

پیوستگی



وقتی تابع پیوسته باشد نقاط نمودار به هم متصل می‌باشند و اگر نمودار دارای حفره یا پرش (بریدگی) باشد نمودار تابع ناپیوسته است.

شرایط پیوستگی تابع در نقطه a

(۱) تابع در نقطه a و همسایگی آن تعریف شده باشد.

(۲) حد تابع در نقطه a موجود باشد.

(۳) مقدار تابع با حد تابع در نقطه a برابر باشد.

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \text{عدد مشخص}$$

$$\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = f(a)$$





۲۱- اگر A یک ماتریس وارون پذیر و $A^2 = I$ باشد، مجموع تمام درایه های ماتریس $(2A + A^{-1})^2 - (2A - A^{-1})^2$ کدام است؟

۲۴ (۴)

۱۶ (۳)

۳۲ (۲)

۸ (۱)

(سخت - مفهومی - زمان بر) - هندسه ۳ صفحه ۲۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

$$A^2 = I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}A^2 = A^{-1}I \Rightarrow A = A^{-1}$$

$$(2A + A^{-1})^2 - (2A - A^{-1})^2 = (2A + A)^2 - (2A - A)^2 = 9A^2 - A^2 = 8A^2 = 8I = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow مجموع درایه ها = ۱۶

چون A وارون پذیر است، پس A^{-1} وجود دارد، طرفین تساوی $A^2 = I$ را در A^{-1} ضرب می کنیم و داریم:

$$A^2 = I \xrightarrow{\times A^{-1}} A^{-1}A^2 = A^{-1}I \Rightarrow A = A^{-1}$$

حال به جای A^{-1} در عبارت خواسته شده از A استفاده می کنیم:

$$(2A + A^{-1})^2 - (2A - A^{-1})^2 = (2A + A)^2 - (2A - A)^2 = 9A^2 - A^2 = 8A^2 = 8I = \begin{bmatrix} 8 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$$

\Rightarrow مجموع درایه ها = ۱۶

قلقشو یاد بگیر!

(۱) طرفین یک تساوی ماتریسی را می توان در یک ماتریس دلخواه ضرب کرد اما نمی توان حذف کرد:

$$A = B \Rightarrow AC = BC$$

$$AC = BC \not\Rightarrow A = B$$

⚠ زنگ خطر!

در حالت کلی اصلا اجازه نداریم این کار رو بکنیم!

عضو بی اثر در ضرب ماتریس ها

$AI = IA = A$ یعنی اگر A یک ماتریس مربعی باشد، آن گاه: $AI = IA = A$

وارون پذیری ماتریس

اگر A وارون پذیر باشد، (یعنی $|A| \neq 0$)، آن گاه A^{-1} وجود دارد، در این صورت:

$$AA^{-1} = A^{-1}A = I$$



۲۲- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ و $a_{ij} = \begin{cases} 1 & i \neq j \\ 2-i & i = j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ باشند، دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{x-|A+I|}}{\sqrt{|B-I|-|x|}}$ کدام است؟ (نماد جزء

صحیح x است.)

(۱, ۵) (۴)

(۱, ۵) (۳)

(۱, ۵) (۲)

(۱, ۶) (۱)

(متوسط - ترکیبی - استاندارد) - هندسه ۳ صفحه ۳۱ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

ابتدا ماتریس A و سپس ماتریس های $A+I$ و $B-I$ را تشکیل داده و دترمینان هر کدام را به دست می آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow A+I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |A+I| = 2 \times 1 - 1 \times 1 = 1$$



$$B = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow B - I = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow |B - I| = 5 \times 1 - 0 \times (-1) = 5$$

حال باید دامنه تعریف تابع $y = \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{5-[x]}}$ را پیدا کنیم:

$$1) x - 1 \geq 0 \Rightarrow x \geq 1$$

$$2) 5 - [x] > 0 \Rightarrow [x] < 5 \Rightarrow x < 5 \Rightarrow 1 \leq x < 5 \Rightarrow x \in [1, 5)$$

یادآوری!

برای به دست آوردن دترمینان $A + B$ یا $A - B$ ، ابتدا باید این ماتریس‌ها را تشکیل دهیم و سپس دترمینان بگیریم.

$$\triangleq |A \pm B| \neq |A| \pm |B|$$

••• ibo •••

۲۳- اگر $A = [a_{ij}]_{2 \times 2}$ ، $a_{ij} = \begin{cases} i^j & i \neq j \\ i & i = j \end{cases}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ و $C = \begin{bmatrix} A - I & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$ باشد، $|BC|$ کدام است؟

(۱) ۲۸ (۲) -۱۴ (۳) ۱۴ (۴) -۲۸

(متوسط - محاسباتی - زمان بر) - هندسه ۳ صفحه ۳۰ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

ابتدا ماتریس A و سپس $A + I$ ، $A - I$ و سرانجام ماتریس‌های B و C را مشخص کرده و دترمینان آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1^2 \\ 2^1 & 2 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{cases} A + I = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix} \\ A - I = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \end{cases}$$

حال ماتریس‌های B و C را تشکیل داده و دترمینان آن‌ها را به دست می‌آوریم:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط حول سطر اول}} |B| = 1(-2) - 2(0) + 0 = -2$$

$$C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 4 \\ 2 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \xrightarrow{\text{بسط حول سطر اول}} |C| = 0 - 1(2) + 4(4) = 14$$

از طرفی می‌دانیم $|BC| = |B||C|$ ، بنابراین:

$$|BC| = -2 \times 14 = -28$$

دترمینان ضرب ماتریس‌ها، همان ضرب دترمینان ماتریس‌ها!

اگر A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند، آن‌گاه:

$$|A \times B| = |A| \times |B|$$

••• ibo •••



۲۴- چه تعداد از گزاره‌های زیر درست است؟

- (الف) اگر صفحه p عمود بر محور سطح مخروطی آن را قطع کند و از رأس آن عبور کند، سطح مقطع حاصل دایره است.
 (ب) اگر صفحه p به گونه‌ای هر دو تکه بالایی و پایینی سطح مخروطی را قطع کند و شامل محور سطح مخروطی نباشد، فصل مشترک صفحه و سطح مخروطی یک هذلولی است.
 (ج) اگر صفحه p موازی با مولد سطح مخروطی آن را قطع کند و از رأس مخروطی عبور کند، سطح مقطع حاصل سهمی است.
 (د) اگر صفحه p غیرموازی با مولد و غیرعمود بر محور سطح مخروطی تنها یکی از دو نیمه مخروط را قطع کند، سطح مقطع حاصل یک بیضی است.

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(آسان - خطبه‌خط - سریع - هندسه ۳ صفحه ۳۵ - ۱۲۰۲)

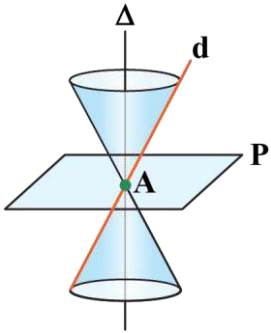
پاسخ: گزینه ۲

بررسی سریع:

۲ مورد (پ) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

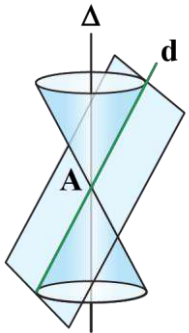
(الف) به عبارت «از رأس آن عبور کند» دقت کنید! در این حالت سطح مقطع حاصل یک نقطه است و در حالتی سطح مقطع دایره خواهد شد که صفحه p از رأس سطح مخروطی عبور نکند!!



پس مورد «الف» نادرست است.

(پ) طبق متن کتاب درسی صفحه ۳۵ کاملاً درست است. ✓

(ج) باز هم به عبارت «از رأس سطح مخروطی عبور کند» دقت کنید. در این حالت جواب یک خط است و در صورتی جواب یک سهمی است که صفحه از رأس مخروطی عبور نکند!

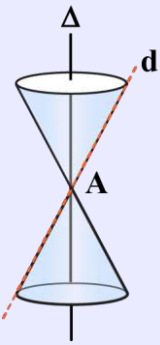


پس مورد «ج» نادرست است.

(د) طبق متن کتاب درسی صفحه ۳۵ کاملاً درست است. ✓



مقاطع مخروطی



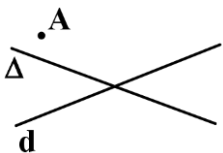
دو خط d و Δ را که در نقطه A مانند شکل متقاطع (غیرعمود) هستند، در نظر می‌گیریم. اگر خط Δ ثابت باشد و خط d را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران را **رویۀ مخروطی (سطح مخروطی)** می‌نامیم. در این حالت خط Δ را محور، خط d را مولد و نقطه A را رأس سطح مخروطی می‌نامیم. فصل مشترک یک صفحه و سطح مخروطی، **مقطع مخروطی** نامیده می‌شود و انواع مختلفی دارد که عبارتند از **دایره**، **بیضی**، **سهمی** و **هذلولی** که البته در حالت‌های خاص ممکن است نقطه، یک خط یا دو خط متقاطع باشند، نوع مقطع ایجاد شده بستگی به وضعیت صفحه نسبت به دو خط d و Δ دارد که در جدول زیر این حالات بررسی شده است.

هذلولی	سهمی	بیضی	دایره
صفحه P از رأس مخروط عبور نمی‌کند و دو نیمه سطح مخروطی را قطع می‌کند.	صفحه P با مولد d موازی است و از رأس مخروط عبور نمی‌کند.	صفحه P بر محور Δ عمود نبوده و غیرموازی با مولد d است.	صفحه P بر محور سطح مخروطی عمود است و از رأس آن عبور نمی‌کند.
حالات خاص			
در این حالت، اگر صفحه P از رأس مخروطی عبور کرده و هر دو نیمه سطح مخروطی را قطع کند، فصل مشترک دو خط متقاطع خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط یک خط خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطه رأس خواهد بود.	در این حالت، اگر صفحه P از رأس سطح مخروطی عبور کند، فصل مشترک فقط نقطه رأس خواهد بود.

اگر دو صفحه موازی یک رویۀ مخروطی را قطع کنند، سطح مقطع ایجاد شده به غیر از دو دایره، دو بیضی، دو سهمی، دو هذلولی می‌تواند سهمی و خط یا دایره و نقطه یا بیضی و نقطه یا هذلولی و دو خط متقاطع نیز باشد.



۲۵- مطابق شکل، نقطه A در صفحه دو خط متقاطع d و Δ واقع است. حداکثر چند نقطه در صفحه می‌توان یافت که از d و Δ به یک فاصله و از A به فاصله 5 واحد باشند؟



- ۱ (۱)
- ۲ (۲)
- ۳ (۳)
- ۴ (۴)

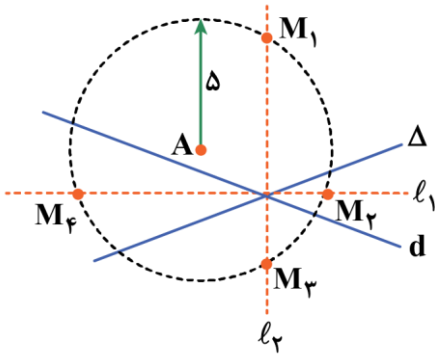
(متوسط - مفهومی - سریع ۶) - هندسه ۳ صفحه ۳۹ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d و Δ به یک فاصله هستند، نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و Δ است.



همچنین نقاطی که به فاصله ۵ واحد از نقطه A هستند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ است، حال این دایره نیمساز زوایای بین دو خط d و Δ (یعنی l_1 و l_2) را حداکثر در ۴ نقطه ممکن است قطع کند.



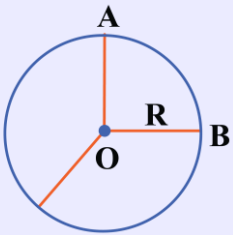
رفع ابهام!

چرا می‌گوییم حداکثر در ۴ نقطه؟ چون بسته به فاصله A تا خطوط d و Δ ممکن است حتی هیچ نقطه‌ای با خصوصیات ذکر شده وجود نداشته باشد!

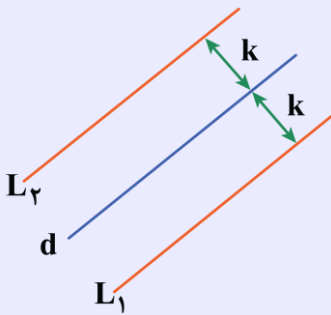
مکان هندسی

مجموعه نقاطی از فضا یا صفحه که دارای ویژگی یکسانی باشند را «مکان هندسی» می‌گوییم. به معرفی چند مکان هندسی معروف می‌پردازیم:

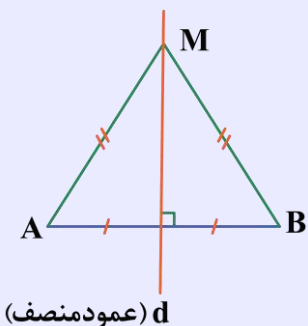
۱) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطه ثابت O به فاصله ثابت R باشند، دایره‌ای به مرکز O و شعاع R است.



۲) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از خط d به فاصله معلوم k باشند، خط موازی d و به فاصله k از آن است.



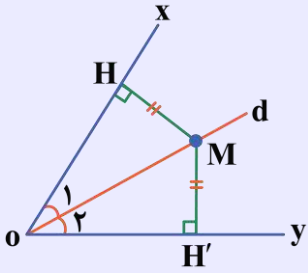
۳) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از سر یک پاره‌خط به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر عمودمنصف آن پاره‌خط است.



$$M \in d \Leftrightarrow MA = MB$$

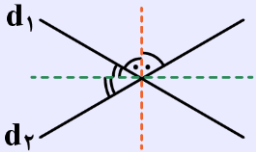


۴) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از ۲ ضلع یک زاویه به یک فاصله باشند، نقاط واقع بر نیمساز آن زاویه است.



$$M \text{ روی نیمساز زاویه } xOy \text{ واقع است.} \Leftrightarrow MH = MH'$$

۵) مکان هندسی نقاطی از صفحه که از دو خط متقاطع d_1 و d_2 به یک فاصله هستند، نیمسازهای زوایای بین آن دو خط متقاطع است.

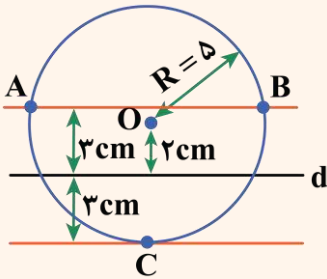


اشتراک چند مکان هندسی

اگر در یک سوال چند مکان هندسی مدنظر باشد تمامی آن‌ها را رسم کرده و نقاط برخورد (مشترک) را به عنوان جواب در نظر می‌گیریم.

یه نمونه باحال ببین!

سؤال: نقطه O به فاصله ۲cm از خط d واقع است. چند نقطه در صفحه یافت می‌شود که از O به فاصله ۵ و از خط d به فاصله ۳cm باشد؟ ابتدا دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۵cm رسم می‌کنیم، سپس خط ۲ موازی با d در دو طرف آن رسم می‌کنیم، همان‌طور که در شکل می‌بینید، این دو مکان هندسی ۳ نقطه مشترک (C, B, A) دارند، پس مسئله ۳ جواب دارد.



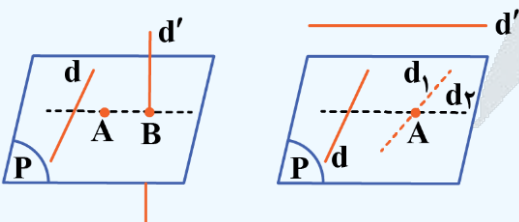
۲۶- نقطه A خارج از دو خط متناظر d و d' قرار دارد، چند خط وجود دارد که از A بگذرد و d و d' را قطع کند؟

- (۱) دقیقاً یک خط (۲) بی‌شمار خط (۳) حداکثر یک خط (۴) چنین خطی وجود ندارد.

(متوسط - مفهومی - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۸۱ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:



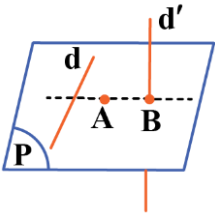
با توجه به دو حالت موجود در شکل‌ها حداکثر یک خط وجود دارد که از A بگذرد و d و d' را قطع کند.



یک صفحه بر نقطه A و خط d عبور می‌دهیم که دو حالت ممکن است رخ دهد:

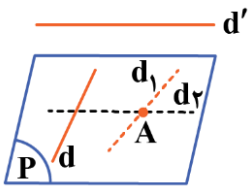
حالت اول

اگر صفحه P خط d را در B قطع کند، خط گذرا از A و B جواب است. یعنی یک خط وجود دارد که از A می‌گذرد و d و d' را قطع می‌کند.



حالت دوم

اگر صفحه P موازی d' باشد، هر خط که از A بگذرد و d را قطع کند با d' موازی یا متناظر است. یعنی خطی وجود ندارد که از A بگذرد و d و d' را قطع کند.



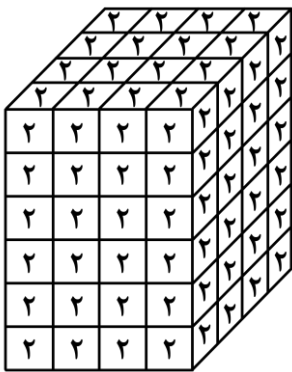
بنابراین صفر یا یک خط (حداکثر یک خط) وجود دارد که از A بگذرد و d و d' را قطع کند.

مشاوره‌نامه

حل مسائل هندسه فضایی (مسائل مربوط به وضعیت نقطه، خط و صفحه) با فرمول یا قضیه مشخصی حل نمی‌شود و صرفاً نیاز به دانستن تمامی مطالب و قضایای مربوط به آن‌ها و تجربه و تمرین و تصور درست دارد.



۲۷- یک مکعب مستطیل به ابعاد ۴، ۴ و ۶ از مکعب‌های ۱×۱×۱ تشکیل شده است و روی هر ۶ وجه بیرونی مکعب مستطیل و روی هر کدام از مربع‌های کوچک عدد ۲ نوشته شده است. این مکعب‌های کوچک را از هم جدا می‌کنیم. در چند مکعب از ۹۶ مکعب کوچک مجموع اعداد روی وجوه بزرگ‌تر از ۲ و کم‌تر از ۶ است؟



۱۶ (۱)

۲۴ (۲)

۳۲ (۳)

۲۸ (۴)

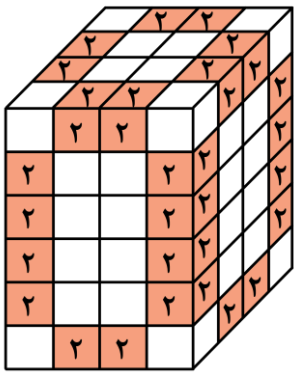
(متوسط - مفهومی - استاندارد) - هندسه ۱ (صفحه ۹۰ - ۱۰۰۴)

پاسخ: گزینه ۳

بررسی سریع:

تعداد مکعب‌هایی را می‌خواهیم که مجموع اعداد روی وجه‌های آن‌ها از بین ۲ یا ۴ یا ۶ باشد. این مکعب‌ها مکعب‌هایی هستند که فقط دو وجه رو به بیرون دارند که تعدادشان برابر است با:

$$۸ \times ۲ + ۴ \times ۴ = ۳۲$$



مجموع اعداد روی مکعب‌های کوچک یا ۲ است یا ۴ یا ۶. چون تعداد مکعب‌هایی را می‌خواهیم که مجموع اعداد روی آن‌ها بزرگ‌تر از ۲ و کوچک‌تر از ۶ است، تنها مکعب‌هایی قابل قبول هستند که مجموع اعداد روی آن‌ها ۴ است و این مکعب‌ها مطابق شکل در قسمت میانی هر وجه واقع شده‌اند و حال مکعب ۱۲ یال دارد که روی ۴ یال بالا و ۴ یال پایین هر کدام ۲ تا از این مکعب‌ها و روی ۴ یال عمودی هر کدام ۴ تا از این مکعب‌ها قرار دارد، پس تعداد کل آن‌ها برابر است با:

$$8 \times 2 + 4 \times 4 = 32$$



۲۸- مکعب مستطیلی به ابعاد ۲، ۴ و ۶ را با صفحه‌ای که از کوچک‌ترین یال آن می‌گذرد طوری برش زده‌ایم که حجم مکعب مستطیل به نسبت ۱ به ۳ تقسیم شده است. کم‌ترین مساحت برای سطح مقطع حاصل از برش کدام است؟

(۴) $2\sqrt{10}$

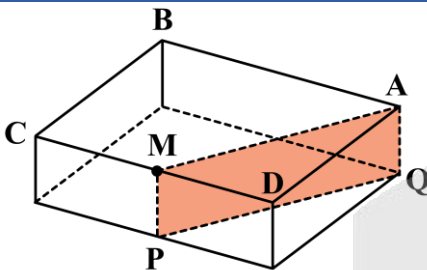
(۳) $4\sqrt{10}$

(۲) $12/5$

(۱) ۱۰

(سخت - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۱ صفحه ۹۲ - ۱۰۰۴

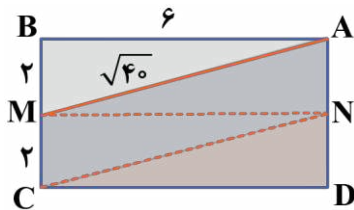
پاسخ: گزینه ۱



کوچک‌ترین یال مکعب، یال به طول ۲ است، دو حجم به وجود آمده پس از برش، دو منشور با قاعده‌های متفاوت، اما با ارتفاع یکسان هستند، پس اگر حجم یکی سه برابر دیگری است، یعنی مساحت قاعده‌اش نیز سه برابر مساحت قاعده دیگری است، یعنی در مستطیل ABCD باید AM را به گونه‌ای از رأس A رسم کنیم که مساحت مستطیل ABCD را به نسبت ۱ به ۳ تقسیم کند که برای این کار دو حالت می‌توان در نظر گرفت:

حالت اول

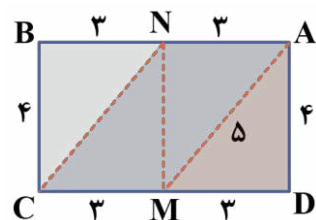
نقطه M وسط ضلع BC باشد:



$$S_{AMPQ} = AQ \times AM = 2 \times \sqrt{40} = 4\sqrt{10}$$

حالت دوم

نقطه M وسط ضلع CD باشد:



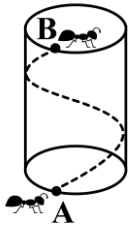
$$S_{AMPQ} = AQ \times AM = 2 \times 5 = 10$$

بنابراین کم‌ترین مساحت برای سطح مقطع حاصل برابر ۱۰ است.





۲۹- استوانه شکل مقابل را در نظر بگیرید. مورچه‌ای می‌خواهد از نقطه A شروع به حرکت کند و پس از یک دور کامل دور استوانه، به نقطه B دقیقاً در بالای نقطه A برسد، اگر شعاع قاعده و ارتفاع استوانه به ترتیب ۶ و 5π باشند، طول کوتاه‌ترین مسیر ممکن برای این مورچه چقدر است؟

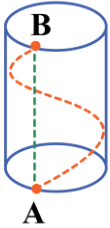


- (۱) 12π
- (۲) 13π
- (۳) 5π
- (۴) 60π

(متوسط - مفهومی - زمان‌بر) - هندسه ۱ صفحه ۹۳ - ۱۰۰۴

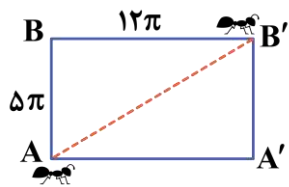
پاسخ: گزینه ۲

سطح جانبی استوانه را از روی پاره‌خط AB برش می‌زنیم و باز می‌کنیم.



مطابق شکل کوتاه‌ترین فاصله مورد نظر قطر مستطیل $ABB'A'$ است که عرض آن همان 5π یعنی ارتفاع استوانه و طول آن محیط قاعده استوانه است که برابر است با:

$$BB' = 2\pi r = 2\pi \times 6 = 12\pi$$



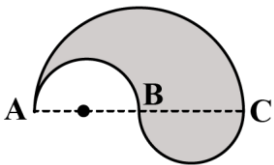
حال باید اندازه قطر AB' را پیدا کنیم که طبق فیثاغورس برابر است با:

$$AB' = \sqrt{(5\pi)^2 + (12\pi)^2} = 13\pi$$

توجه کنید که نقاط A' و B' قبل از برش دقیقاً بر روی نقاط A و B قرار دارند!



۳۰- شکل مقابل، متشکل از ۳ نیم‌دایره به شعاع‌های ۱ و ۲ است. حجم حاصل از دوران این شکل هندسی حول محور AC کدام است؟



- (۱) $\frac{8\pi}{3}$
- (۲) $\frac{28\pi}{3}$
- (۳) $\frac{28\pi}{9}$
- (۴) $\frac{32\pi}{9}$

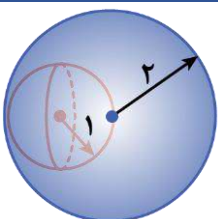
- (۱) $\frac{28\pi}{9}$
- (۲) $\frac{28\pi}{3}$
- (۳) $\frac{32\pi}{9}$
- (۴) $\frac{28\pi}{3}$

(آسان - مفهومی - سریع) - هندسه ۱ صفحه ۹۵ - ۱۰۰۴

پاسخ: گزینه ۴

بررسی سریع:

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 - \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi(8-1) = \frac{28\pi}{3}$$



حجم حاصل از دوران سطح داده شده یک کره به شعاع ۲ خواهد بود که کره‌ای به شعاع ۱ از درون آن برداشته شده است:

$$V = \frac{4}{3}\pi \times 2^3 - \frac{4}{3}\pi \times 1^3 = \frac{4}{3}\pi(8-1) = \frac{28\pi}{3}$$





۳۱- اگر p عددی اول، $(p, 6) = 1$ و $a+p$ زوج باشد، باقی‌مانده $1 + a^2 - p + p^2 + p^3$ بر 8 کدام است؟

(۴) ۵

(۳) ۴

(۲) ۳

(۱) ۲

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۱۶ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۲

طبق اطلاعات سؤال از $(p, 6) = 1$ و اول بودن p متوجه می‌شویم که p عدد اولی غیر از ۲ و ۳ است. از آن جایی که تنها عدد زوج اول ۲ است، پس یعنی p فرد است. حال به بررسی تک‌تک جملات عبارت $1 + a^2 - p + p^2 + p^3$ می‌پردازیم. ابتدا آن را به صورت زیر تفکیک می‌کنیم:

$$p^3 + p^2 - p + a^2 + 1$$

(۱)
(۲)
(۳)

(۱): مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $24k+1$ است. $\Rightarrow p^2 = 24k+1$

(۲): اگر n عددی فرد باشد، $n^3 - n$ همواره بر ۲۴ بخش پذیر است، زیرا:

$$n^3 - n = n(n^2 - 1) \Rightarrow n(n-1)(n+1)$$

\downarrow
 $8k+1$

بر ۲۴ بخش پذیر است. \Rightarrow از هر سه عدد متوالی یکی بر ۳ بخش پذیر است. $\Rightarrow n^3 - n = (n-1)n(n+1)$ از طرفی

(۳): چون $a+p$ زوج و p فرد است پس a فرد است و می‌دانیم مربع هر عدد فرد همواره برابر $8k+1$ است.

بنابراین:

$$p^3 + p^2 - p + a^2 + 1 \Rightarrow 24k+1 + 24k'+1 + 8k''+1+1 = 8q+3$$

یادآوری!

(۱) مربع هر عدد فرد همواره برابر $8k+1$ است. (چرا؟)
می‌دانیم که یک عدد فرد به صورت $2k+1$ است. پس:

$$(2k+1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 4k(k+1) + 1 = 8k'+1$$

$\underbrace{4k(k+1)}_{2k'}$

توجه کنید که از هر دو عدد متوالی مثل k و $k+1$ ، یکی از آن‌ها زوج است.

(۲) مربع هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ به صورت $24k+1$ است. (چرا؟)

$$p = 2k+1 \Rightarrow p^2 = 4k+1 \xrightarrow{\times 3} 3p^2 = 12k+3 \Rightarrow 24 \mid 3p^2 - 3 \xrightarrow{\times 5 \text{ طرف راست}} 24 \mid 15p^2 - 15 \quad (I)$$

از طرفی برای هر عدد اول بزرگ‌تر از ۳ باقی‌مانده تقسیم آن به ۳ یا ۱ است یا ۲:

$$p = 3k \pm 1 \Rightarrow p^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 \xrightarrow{\times 8} 8p^2 = 72k^2 \pm 48k + 8 \Rightarrow 24 \mid 8p^2 - 8 \xrightarrow{\times 2 \text{ طرف راست}} 24 \mid 16p^2 - 16 \quad (II)$$

از تفاضل طرف دوم (I) و (II) داریم:

$$24 \mid p^2 - 1 \Rightarrow p^2 = 24k+1$$



۳۲- مجموع ارقام بزرگ‌ترین عدد صحیحی که باقی‌مانده تقسیم آن بر عدد ۴۲، همواره $\frac{6}{5}$ برابر خارج قسمت شود، کدام است؟

(۴) ۲۰

(۳) ۱۹

(۲) ۱۸

(۱) ۱۷



بررسی سریع:

$$\begin{cases} a = 42q + \frac{6}{5}q \\ \frac{6}{5}q < 42 \Rightarrow q < 35 \end{cases} \Rightarrow q_{\max} = 30$$

$$a = 42 \times 30 + \frac{6}{5} \times 30 = 1296 \Rightarrow 1 + 2 + 9 + 6 = 18$$

ترجمه سؤال

$$a = 42q + \frac{6}{5}q$$

باقی مانده تقسیم آن بر عدد ۴۲، همواره $\frac{6}{5}$ برابر خارج قسمت شود، یعنی:

با توجه به ترجمه سؤال و این که در تقسیم همیشه باقی مانده، کوچکتر از مقسوم علیه است داریم:

$$\begin{cases} a = 42q + \frac{6}{5}q \\ \frac{6}{5}q < 42 \Rightarrow q < 35 \end{cases} \xrightarrow{\text{بزرگترین مضرب ۵ که از ۳۵ کوچکتر است.}} q_{\max} = 30$$

توجه داریم که چون باقی مانده باید عددی حسابی باشد، پس $\frac{6}{5}q$ باید حسابی باشد که یعنی q باید مضرب ۵ باشد. پس عدد مورد نظر برابر است با:

$$a = 42 \times 30 + \frac{6}{5} \times 30 = 1296 \Rightarrow 1 + 2 + 9 + 6 = 18$$

قضیه تقسیم

اگر عدد صحیح a را بر عدد طبیعی b تقسیم کنیم، خارج قسمت q و باقی مانده r باشد، خواهیم داشت:

مقسوم
مقسوم علیه (عدد صحیح)
↑
 a
|
↓
:
|
↓
 b
|
↓
 q
|
↓
 r
↓
باقی مانده (عدد حسابی)

خارج قسمت (عدد صحیح)

$$a = b \times q + r \quad (0 \leq r < b)$$



۳۳- در همنهشتی به پیمانه m ، سه عدد a ، 123 و 58 در یک کلاس همنهشتی قرار دارند. اگر $(m, 5) = 1$ و $m \neq 1$ باشد، مجموع ارقام کوچکترین عدد چهار رقمی a کدام است؟

۱۳ (۴)

۱۱ (۳)

۸ (۲)

۹ (۱)



بررسی سریع:

$$m \mid 123 - 58 \Rightarrow m \mid 65 \Rightarrow m = 1, 5, 13, 65 \xrightarrow[(m,5)=1]{m \neq 1} m = 13$$

$$a \equiv 123 \equiv 6 \pmod{13} \Rightarrow a = 13k + 6 \xrightarrow{k=77} 1001 + 6 = 1007$$

$$\Rightarrow 1 + 0 + 0 + 7 = 8$$

چون a , ۱۲۳ و ۵۸ در یک کلاس همزهستی قرار دارند، پس به پیمانه m همزهستند:

$$a \equiv 123 \equiv 58 \pmod{m}$$

$$m \mid 123 - 58 \Rightarrow m \mid 65 \Rightarrow m = 1, 5, 13, 65 \xrightarrow[(m,5)=1]{m \neq 1} m = 13$$

اکنون که پیمانه مشخص شده است، برای یافتن کوچک‌ترین عدد چهاررقمی با مشخصات خواسته شده داریم:

$$a \equiv 123 \equiv 6 \pmod{13} \Rightarrow a = 13k + 6 \xrightarrow{k=77} 1001 + 6 = 1007$$

$$a = 8 = \text{مجموع ارقام}$$

مفهوم همزهستی!

اگر دو عدد a و b در تقسیم بر m که عددی طبیعی است باقی‌مانده یکسانی داشته باشند، می‌گوییم a و b با یکدیگر به پیمانه m همزهست هستند و می‌نویسیم:

$$\begin{matrix} m \\ a \equiv b \end{matrix}$$

رابطه همزهستی را به صورت زیر هم می‌توانیم بنویسیم:

$$a = mk + b \text{ یا } a \equiv b \Leftrightarrow m \mid a - b$$

ویژگی‌های همزهستی!

(۱) هر عدد با خودش همزهست است.

$$\begin{matrix} m \\ a \equiv a \end{matrix}$$

(۲) همزهستی دارای خاصیت تعدی است.

$$\begin{cases} m \\ a \equiv b \\ m \\ b \equiv c \end{cases} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$$



۳) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم با هر عددی جمع یا تفریق کنیم.

$$\begin{matrix} m & m \\ a \equiv b \Rightarrow a \pm c \equiv b \pm c \end{matrix}$$

۴) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم در هر عددی ضرب کنیم.

$$\begin{matrix} m & m \\ a \equiv b \Rightarrow ac \equiv bc \end{matrix}$$

۵) دو طرف هم‌نهشتی را می‌توانیم به توان عدد طبیعی n برسانیم.

$$\begin{matrix} m & m \\ a \equiv b \Rightarrow a^n \equiv b^n \end{matrix}$$

۶) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم مضارب مختلف پیمانه را به دو طرف اضافه و یا از آن‌ها کم کنیم. هدف از این کار بزرگ کردن و یا کوچک کردن اعداد دو طرف است.

$$\begin{matrix} m & m \\ a \equiv b \Rightarrow a \pm mq \equiv b \pm mk \end{matrix}$$

۷) طرفین دو هم‌نهشتی با پیمانه‌های یکسان را می‌توانیم با هم جمع و تفریق و یا در هم ضرب کنیم.

$$\left. \begin{matrix} m \\ a \equiv b \\ m \\ c \equiv d \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} m & m \\ a \pm c \equiv b \pm d \text{ یا } ac \equiv bd \end{matrix}$$

۸) در هر هم‌نهشتی می‌توانیم به جای پیمانه، یکی از مقسوم‌علیه‌های طبیعی آن را قرار دهیم.

$$\begin{matrix} m & n \\ a \equiv b \xrightarrow{n|m} a \equiv b \end{matrix}$$

۹) اگر دو طرف هم‌نهشتی بر a بخش‌پذیر باشند، دو طرف را می‌توانیم بر a تقسیم کنیم، با این شرط که پیمانه را نیز باید بر $d = (a, m)$ که همان ب.م.م a و m است تقسیم کنیم:

$$\begin{matrix} m & m \\ ax \equiv ay \xrightarrow[\substack{\div a \\ (a,m)=d}}{x \equiv y} \end{matrix}$$

۱۰) اگر دو هم‌نهشتی دارای طرفین یکسان و پیمانه‌های متفاوت باشند به صورت زیر می‌توانیم آن‌ها را به یک هم‌نهشتی تبدیل کنیم:

$$\left. \begin{matrix} m \\ a \equiv b \\ n \\ a \equiv b \end{matrix} \right\} \Rightarrow \begin{matrix} [m,n] \\ a \equiv b \end{matrix}$$



۳۴- معادلهٔ همنهشتی $(n^2 + 3n)x \equiv 13 \pmod{2n+1}$ در مجموعهٔ اعداد صحیح دارای جواب است. n چند عدد طبیعی دورقمی می‌تواند داشته باشد؟

۷۲ (۴)

۶۷ (۳)

۱۸ (۲)

۱۵ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - گسسته صفحه ۲۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

شرط وجود جواب برای معادلهٔ همنهشتی این است که:

$$(n^2 + 3n, 2n + 1) | 13$$

اگر $(n^2 + 3n, 2n + 1)$ را برابر با d فرض کنیم، با استفاده از خواص رابطهٔ عاد کردن داریم:

$$d | n^2 + 3n \xrightarrow{\times 2} 2n^2 + 6n$$

$$d | 2n + 1 \xrightarrow{\times n} 2n^2 + n$$

$$d | 5n$$

مجدداً با استفاده از رابطهٔ به‌دست آمده به همراه رابطهٔ $d | 2n + 1$ داریم:

$$d | 5n \xrightarrow{\times 2} 10n$$

$$d | 2n + 1 \xrightarrow{\times 5} 10n + 5$$

$$d | 5 \Rightarrow d = 1 \text{ یا } 5$$

حال چون $d | 13$ پس d نمی‌تواند ۵ باشد. پس تعداد نهایی که به‌ازای $d = 5$ به‌دست می‌آیند را محاسبه کرده و از تعداد کل کم می‌کنیم:

$$d = 5 \Rightarrow 2n + 1 \equiv 0 \pmod{5} \Rightarrow 2n \equiv -1 + 5 = 4 \pmod{5} \xrightarrow{\div 2} n \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow n = 5t + 2$$

$(2, 5) = 1$

$$10 \leq 5t + 2 \leq 99 \Rightarrow 8 \leq 5t \leq 97 \Rightarrow 2 \leq t \leq 19 \Rightarrow \text{تعداد} = 18$$

$$\Rightarrow 90 - 18 = 72$$

شرط وجود جواب برای معادلهٔ همنهشتی

شرط لازم و کافی برای این‌که معادلهٔ همنهشتی $ax \equiv b \pmod{c}$ جواب داشته باشد این است که:

$$(a, c) | b$$

یادآوری تعریف رابطهٔ عاد کردن

اگر a عددی صحیح و ناصفر و b عددی صحیح باشد، b بر a بخش‌پذیر است، اگر عددی صحیح مثل q وجود داشته باشد، که $b = aq$. در این صورت گوییم « a شمارندهٔ b است» یا « a ، b را عاد می‌کند» و می‌نویسیم:

$$a | b$$



ویژگی‌های رابطهٔ عاد کردن

فرض کنید a ، b و c هر سه عدد صحیح باشند:

(۱) اگر a ، b را عاد کند، آن‌گاه هر مضرب صحیح b را نیز عاد می‌کند:

$$a|b \Rightarrow a|mb$$

(۲) خاصیت تعدی

اگر a ، b را عاد کند و c ، b را عاد کند، آن‌گاه a نیز c را عاد می‌کند:

$$a|b \wedge b|c \Rightarrow a|c$$

(۳) اگر a ، اعداد b و c را عاد کند، آن‌گاه مجموع و تفاضلشان را نیز عاد می‌کند:

$$a|b \wedge a|c \Rightarrow a|b \pm c$$

(نتیجهٔ ۱ و ۳)

$$\begin{matrix} a|b \\ a|c \end{matrix} \Rightarrow a|mb \pm nc$$

(۴) اگر b بر a بخش‌پذیر و $b \neq 0$ باشد، آن‌گاه $|a| \leq |b|$ است.

$$a|b \xrightarrow{b \neq 0} |a| \leq |b|$$



۳۵- اگر معادله $\overline{aab\delta b} = 1089x + 693y$ در مجموعهٔ اعداد صحیح جواب داشته باشد، رقم یکان a^b کدام است؟

۱ (۱)
۲ (۲)
۳ (۳)
۴ (۴)

(سخت - ترکیبی - زمان‌بر) - گسسته صفحهٔ ۲۶ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینهٔ ۱

می‌دانیم معادلهٔ $ax + by = c$ در مجموعه اعداد صحیح، در صورتی دارای جواب است که $c|(a, b)$ ، در نتیجه:

$$\overline{aab\delta b} \mid (693, 1089)$$

$$2b + 2a + 5 \equiv 0 \Rightarrow 2a + 2b \equiv 4 \Rightarrow a + b \equiv 2 \Rightarrow \begin{cases} a + b = 2 \\ a + b = 11 \end{cases} \quad (1)$$

$$+b - 5 + b - a + a \equiv 0 \Rightarrow 2b \equiv 5 - 11 = -6 \xrightarrow{\div 2} b \equiv -3 \Rightarrow b = 8 \xrightarrow{(1)} \begin{cases} a = -6 \text{ غ ق ق} \\ a = 3 \checkmark \end{cases}$$

می‌دانیم که $3^4 \equiv 1$. حال توان (همان b^a) را به پیمانهٔ ۴ حساب می‌کنیم:

$$\Rightarrow 8^3 \equiv 0 \Rightarrow 8^3 = 4k$$

$$3 \cdot 8^3 \equiv ? \xrightarrow{8^3 = 4k} 3 \cdot 4k \equiv (3 \cdot 4)k \equiv 1$$

بنابراین:



شرط وجود جواب برای معادله سیاله خطی

شرط لازم و کافی برای آن که معادله سیاله $ax + by = c$ دارای جواب باشد آن است که:

$$(a, b) | c$$

استراتژی حل معادله سیاله خطی

۱) ابتدا معادله سیاله $ax + by = c$ را به یکی از دو صورت زیر به یک معادله هم‌نهشتی تبدیل می‌کنیم:

$$\frac{|a|}{by} \equiv c \quad \text{یا} \quad \frac{|b|}{ax} \equiv c$$

۲) با حل معادله هم‌نهشتی و به دست آوردن جواب‌های عمومی آن، جواب‌های عمومی یکی از متغیرها را به دست می‌آوریم.

۳) حال جواب عمومی به دست آمده را در معادله اولیه ($ax + by = c$) قرار می‌دهیم و جواب‌های عمومی متغیر دیگر را نیز به دست می‌آوریم.

۴) اگر شرطی روی x یا y داشتیم جواب‌های عمومی را در شرط قرار داده و از مقادیر قابل قبول برای هر یک، اشتراک می‌گیریم.

کلاس درس بخش‌پذیری‌ها

اگر $A = a_n a_{n-1} \dots a_0$ ، آن‌گاه:

۱) شرط بخش‌پذیری بر ۳: عددی بر ۳ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۳ بخش‌پذیر باشد:

$$A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 \pmod{3}$$

۲) شرط بخش‌پذیری بر ۴: عددی بر ۴ بخش‌پذیر است که دو رقم آخر سمت راست آن بر ۴ بخش‌پذیر باشد:

$$A \equiv a_1 a_0 \pmod{4}$$

۳) شرط بخش‌پذیری بر ۹: عددی بر ۹ بخش‌پذیر است که جمع ارقام آن بر ۹ بخش‌پذیر باشد:

$$A \equiv a_n + a_{n-1} + \dots + a_0 \pmod{9}$$

۴) شرط بخش‌پذیری بر ۱۱: عددی بر ۱۱ بخش‌پذیر است که اگر از راست به چپ، ارقام آن را یکی در میان مثبت و منفی (با شروع از مثبت)

جمع بزنیم، حاصلش بر ۱۱ بخش‌پذیر باشد:

$$A \equiv a_0 - a_1 + a_2 - \dots \pmod{11}$$

یافتن باقی‌مانده a^n بر m

برای پیدا کردن کوچک‌ترین توان a که باقی‌مانده آن بر m برابر با ۱ باشد، ابتدا کوچک‌ترین توان a را که در حوالی m باشد، پیدا می‌کنیم.

اگر باقی‌مانده «۱» شد که به نتیجه رسیده‌ایم. اگر «-۱» شد، طرفین را به توان ۲ می‌رسانیم و اگر عددی غیر از ۱ یا -۱ شد با ضرب طرفین

هم‌نهشتی در a یا توان‌های a ، سعی می‌کنیم طرف دوم را به m نزدیک و سپس ساده کنیم.

فرض کنید می‌خواهیم توانی از ۳ را پیدا کنیم که باقی‌مانده تقسیم آن بر ۱۱ برابر «۱» باشد.



$3^2 \equiv -2 \pmod{11}$	<p>۱) کوچک‌ترین توان ۳ را که در حوالی (کمی کمتر یا کمی بیشتر) ۱۱ است در پیمانه ۱۱ کوچک می‌کنیم.</p>
$3^2 \equiv -2 \pmod{11} \xrightarrow{\times 3} 3^3 \equiv -6 \equiv 5 \pmod{11}$	<p>۲) چون باقی‌مانده ۱ یا ۱- نشد، طرفین را در توانی از ۳ ضرب می‌کنیم تا طرف دوم به حوالی ۱۱ برسد.</p>
$3^3 \equiv 5 \pmod{11} \xrightarrow{\times 3} 3^4 \equiv 15 \equiv 4 \pmod{11} \xrightarrow{\times 3} 3^5 \equiv 12 \equiv 1 \pmod{11}$	<p>۳) مجدداً این کار را ادامه می‌دهیم تا اولین توان از ۳ که در پیمانه ۱۱ برابر ۱ شود، به دست آید.</p>

میانبر رقم یکان

برای تعیین رقم یکان یک عدد توان‌دار در حالت کلی، عدد را به پیمانه ۱۰ می‌بریم. به عبارتی از پایه، رقم یکان را نگه می‌داریم و البته توان را نیز به پیمانه ۴ می‌بریم و به جای توان، باقی‌مانده آن را بر عدد ۴ قرار می‌دهیم. اگر باقی‌مانده صفر شد، به جای توان عدد ۴ را می‌گذاریم.

رفع ابهام!

می‌دونی چرا برای پیدا کردن رقم یکان توان رو به پیمانه ۴ می‌بریم؟ چون هر کدوم از ارقام ۰, ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹ رو که به طور متوالی به توان برسونی و رقم یکان رو حساب کنی حداکثر با یک دوره ۴ تایی به توان رسوندن دوباره رقم یکانشون تکرار می‌شه. مثلاً:

$2^1 \equiv 2 \pmod{10}$	$2^5 \equiv 2 \pmod{10}$
$2^2 \equiv 4 \pmod{10}$	$2^6 \equiv 4 \pmod{10}$
$2^3 \equiv 8 \pmod{10}$	$2^7 \equiv 8 \pmod{10}$
$2^4 \equiv 6 \pmod{10}$	$2^8 \equiv 6 \pmod{10}$

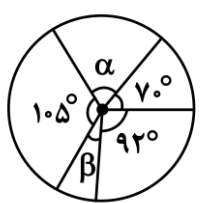
رقم یکان توان‌های ۲ با یک دوره ۴ تایی تکرار می‌شن. حالا خودت برای بقیه حساب کن و ببین که بقیه هم با دوره‌های ۴ تایی یا ۲ تایی تکرار می‌شن یا ثابت می‌مونن.

توجه!

اعدادی که یکان ۰, ۵, ۶, ۱ دارند، به هر توانی که برسند، رقم یکان آن‌ها ثابت می‌ماند.



۳۶- افراد یک جامعه بر اساس علاقه به تیم فوتبال به ۵ گروه متمایز تقسیم شده‌اند که نمودار مربوط به این آمارگیری در شکل زیر نمایش داده شده است. اگر تعداد افراد موجود در ناحیه متناظر به زاویه مرکزی α ، ۲۰ درصد از کل افراد آن جامعه باشند، آنگاه اندازه β کدام است؟



- ۱) 19°
- ۲) 29°
- ۳) 21°
- ۴) 31°

پاسخ: گزینه ۳ (آسان - ترکیبی - سریع) - آمار و احتمال صفحه ۷۲ - ۱۱۰۳

بررسی سریع:

$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{20}{100} \Rightarrow \alpha = 72^\circ$$

$$\alpha + \beta = 360^\circ - (70^\circ + 105^\circ + 92^\circ) \Rightarrow \beta = 21^\circ$$



از این که افراد متناظر با زاویه مرکزی α ، 20° درصد جامعه را تشکیل می دهند داریم:

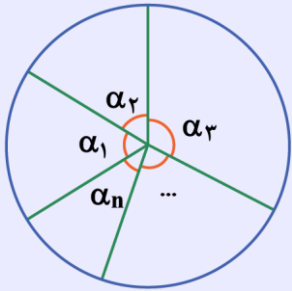
$$\frac{\alpha}{360^\circ} = \frac{20}{100} \Rightarrow \alpha = 72^\circ$$

حال چون دایره 360° است، داریم:

$$\alpha + \beta = 360^\circ - (70^\circ + 105^\circ + 92^\circ) \Rightarrow \beta = 21^\circ$$

نمودار دایره‌ای برای نمایش داده‌ها

برای نمایش داده‌ها با استفاده از نمودار دایره‌ای نسبت هر گروه از جامعه به کل جامعه را در نظر گرفته و آن را به منزله زاویه مرکزی نظیر این گروه در دایره قرار می‌دهیم. به عنوان مثال اگر جامعه n دسته داشته باشد برای هر $1 \leq i \leq n$ داریم:



$$\alpha_i = \frac{\text{تعداد اعضای گروه } i\text{-ام}}{\text{تعداد اعضای کل جامعه}} \times 360^\circ$$



۳۷- در داده‌های $23, a, 25, 27, 22, 24$ ، مد و میانگین دو عدد طبیعی متوالی هستند. a کدام ویژگی را دارد؟

- (۱) عددی اول است. (۲) مربع کامل است. (۳) مکعب کامل است. (۴) بخش پذیر بر ۳ است.

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۸۴ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

بررسی سریع:

$$S: 4, 2, 7, 5, a', 3$$

اگر a' با یکی از داده‌ها برابر نباشد، آن‌گاه آن جامعه مد ندارد، پس a' با یکی از داده‌ها برابر بوده و مد همان a' است، چون مد و میانگین اعدادی طبیعی و متوالی هستند و مجموع داده‌ها به غیر از a' برابر ۲۱ است، پس a' برابر ۳ شده و میانگین ۴ می‌شود، پس $a' = 3$ و $a = 23$ عددی اول است.

بدون آن که از کلیت مسئله کم شود از هر داده 20° واحد کم می‌کنیم:

$$S: 4, 2, 7, 5, a', 3$$

اگر a' با یکی از داده‌ها برابر نباشد، آن‌گاه جامعه مد ندارد، پس a' با یکی از داده‌ها برابر بوده و مد همان a' است، چون میانگین هم عددی

$$\frac{21 + a'}{6} = \bar{x}$$

طبیعی و تعداد داده‌ها ۶ تا است، پس باید مجموع داده‌ها مضرب ۶ باشد، یعنی:

از آن جایی که با بررسی مد متوجه می‌شویم که a' باید یکی از اعداد ۲، ۳، ۴، ۵، ۷ باشد، بررسی می‌کنیم که به‌ازای کدام مقادیر میانگین هم عددی طبیعی می‌شود:

$$a' = 2 \Rightarrow 21 + 2 = 23 \text{ غ ق ق}$$

$$a' = 3 \Rightarrow 21 + 3 = 24 \checkmark$$

$$a' = 4 \Rightarrow 21 + 4 = 25 \text{ غ ق ق}$$

$$a' = 5 \Rightarrow 21 + 5 = 26 \text{ غ ق ق}$$

$$a' = 7 \Rightarrow 21 + 7 = 28 \text{ غ ق ق}$$

پس a' برابر ۳ شده و میانگین ۴ می‌شود، پس:

$$a = a' + 20 = 23$$

و 23 عددی اول است.



معیارهای گرایش به مرکز



میانگین (\bar{x}): اگر مجموع تمام داده‌ها را به تعدادشان تقسیم کنیم، میانگین به دست می‌آید.

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

(به میانگین مرکز **ثقل** هم گفته می‌شود.)

میانه (Q_2): ابتدا تمام داده‌ها را به ترتیب صعودی یا نزولی مرتب می‌کنیم:

اگر تعداد داده‌ها **فرد** بود \leftarrow **دادهٔ وسط** = Q_2 = میانه
اگر تعداد داده‌ها **زوج** بود \leftarrow **میانگین دو دادهٔ وسط** = Q_2 = میانه

مد (نما): داده‌ای که بیش‌ترین فراوانی را در بین داده‌ها دارد، مد یا نمای داده‌ها نامیده می‌شود.

نکات مهم مد!

۱) اگر تمام داده‌ها با هم برابر باشند، مد ندارند.

۲) اگر دو داده بیش‌ترین فراوانی را داشته باشند، داده‌ها دو مد دارند.

قلقشو یاد بگیر!

الف) برای راحت‌تر شدن محاسبات میانگین، می‌توان عدد ثابت $k \in \mathbb{R}$ را به تمام داده‌ها اضافه کرد و بعد از محاسبهٔ میانگین k واحد از آن کم کرد. زیرا:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n}$$

$$\bar{x}_{\text{جدید}} = \frac{(x_1 + k) + (x_2 + k) + \dots + (x_n + k)}{n} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} + k = \bar{x} + k$$

$$\bar{x} = \bar{x}_{\text{جدید}} - k$$

ب) برای محاسبهٔ مد نیز می‌توان عمل بالا رو انجام داد زیرا بزرگ‌تر یا کوچک‌تر کردن داده‌ها تأثیری در فراوانی آن‌ها ندارد.



۳۸- می‌خواهیم به یکی از داده‌های زیر ۲ واحد اضافه کنیم تا دامنهٔ میان چارکی داده‌های جدید نسبت به داده‌های قبلی ۱ واحد افزایش

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

پیدا کند. دادهٔ تغییر یافته (قبل از تغییر) چند شمارندهٔ مثبت دارد؟

۴ (۴)

۳ (۳)

۲ (۲)

۱ (۱)

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحهٔ ۸۴ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینهٔ ۲

بررسی سریع:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

$$Q_1 = 2/5 \quad Q_2 \quad Q_3 = 7/5$$

با اضافه کردن ۲ واحد به هر یک از داده‌های ۱ تا ۶، مقدار Q_1 یا افزایش پیدا می‌کند و یا تغییر نمی‌کند و مقدار Q_3 برابر $7/5$ باقی می‌ماند و در این حالت دامنهٔ میان‌چارکی افزایش پیدا نمی‌کند.

اما با افزایش ۲ واحد به هر یک از اعداد ۷، ۸ و ۹ مقدار Q_3 به ترتیب تبدیل به $8/5$ ، $9/5$ و $10/5$ تبدیل شده و چون Q_1 تغییر نمی‌کند، دامنهٔ میان‌چارکی به ترتیب برابر ۶، $5/5$ و ۵ خواهد شد که افزایش ۲ واحدی ۷ حالت مطلوب می‌شود، عدد ۷ فقط دو شمارندهٔ مثبت دارد.



در داده‌های فعلی، Q_1 و Q_3 به ترتیب $2/5$ و $7/5$ شده و دامنه میان چارکی ۵ است:

۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, ۷, ۸, ۹

\downarrow \downarrow \downarrow
 Q_1 Q_2 Q_3

حالت اول

با اضافه کردن ۲ واحد به هر یک از داده‌های ۱, ۲, ۳, ۴, ۵, ۶, مقدار Q_1 یا افزایش پیدا می‌کند و یا تغییر نمی‌کند و این در حالی است که مقدار Q_3 برابر $7/5$ باقی می‌ماند و در این صورت دامنه میان چارکی (IQR) افزایش پیدا نمی‌کند.

حالت دوم

اما با افزایش ۲ واحد به هر یک از اعداد ۷, ۸, ۹ مقدار Q_3 به ترتیب تبدیل به $8/5$, ۸ و $7/5$ شده و چون Q_1 تغییر نمی‌کند، دامنه میان چارکی (IQR) به ترتیب برابر ۶, $5/5$ و ۵ خواهد شد که افزایش ۲ واحدی ۷ مطلوب می‌شود، عدد ۷ فقط دو شمارنده مثبت دارد.

کلاس درس چارک‌ها!

چارک‌ها (Q): چارک اول و دوم و سوم مقادیری هستند که داده‌های مرتب شده را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. چارک دوم همان میانه (Q_2) است.

روش محاسبه چارک اول (Q_1) و چارک سوم (Q_3):

۱) داده‌ها را از کوچک به بزرگ مرتب کرده و میانه را می‌یابیم.

۲) میانه داده‌های مرتب شده قبل از میانه را چارک اول (Q_1) می‌نامیم.

۳) میانه داده‌های مرتب شده بعد از میانه را چارک سوم (Q_3) می‌نامیم.



۳۹- از ۲۰ داده آماری با انحراف معیار ۴ به تعداد چهار داده با انحراف معیار ۶ حذف کرده‌ایم. اگر میانگین داده‌های حذف شده با میانگین کل داده‌های اولیه یکسان باشد، آنگاه واریانس شانزده داده باقی مانده کدام خواهد شد؟

۱۲ (۴) ۱۱ (۳) ۱۰ (۲) ۹ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر) - آمار و احتمال صفحه ۹۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۳

چون میانگین چهار داده حذف شده با میانگین کل داده‌ها یکسان بوده است، پس میانگین شانزده داده دیگر نیز با میانگین آن‌ها برابر است که آن را \bar{x} می‌نامیم:

انحراف معیار تمام داده‌ها، ۴ داده حذف شده و ۱۶ داده باقی مانده را به ترتیب σ_1 , σ_2 و σ_3 می‌نامیم:

$$\sigma_1 = 4 \Rightarrow \sigma_1^2 = 16 \Rightarrow \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{20} - \bar{x})^2}{20} = 16$$

$$\Rightarrow (x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_{20} - \bar{x})^2 = 320$$

$$\sigma_2 = 6 \Rightarrow \sigma_2^2 = 36 \Rightarrow \frac{(x_{17} - \bar{x})^2 + (x_{18} - \bar{x})^2 + (x_{19} - \bar{x})^2 + (x_{20} - \bar{x})^2}{4} = 36$$

$$\Rightarrow (x_{17} - \bar{x})^2 + (x_{18} - \bar{x})^2 + (x_{19} - \bar{x})^2 + (x_{20} - \bar{x})^2 = 144$$

$$\Rightarrow \sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2 = 320 - 144 = 176$$

$$\sigma_3^2 = \frac{\sum_{i=1}^{16} (x_i - \bar{x})^2}{16} = \frac{176}{16} = 11$$

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} \quad \text{یا} \quad \sigma^2 = \frac{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}{n} - \bar{x}^2$$

$$\sigma = \sqrt{\text{واریانس}}$$

$$CV = \frac{\sigma}{\bar{x}}$$

$$R = x_{\max} - x_{\min}$$



۴۰- ضریب تغییرات داده‌های زیر کدام است؟

۱۲، ۱۲، ۱۲، ۶۰

$$\frac{\sqrt{3}}{6} \quad (۴)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{4} \quad (۳)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{3} \quad (۲)$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \quad (۱)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - آمار و احتمال صفحه ۹۳ - ۱۱۰۳

پاسخ: گزینه ۱

داده‌ها را تقسیم بر ۱۲ می‌کنیم:

$$S: 1, 1, 1, 5 \Rightarrow \bar{x} = 2$$

$$\Rightarrow \sigma^2 = \frac{(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 + (3)^2}{4} = 3 \Rightarrow \sigma = \sqrt{3}$$

$$\Rightarrow \sigma_{\text{واقعی}} = 12\sqrt{3}, \quad \bar{x}_{\text{واقعی}} = 12 \times 2 = 24$$

$$\Rightarrow CV_{\text{واقعی}} = \frac{\sigma_{\text{واقعی}}}{\bar{x}_{\text{واقعی}}} = \frac{12\sqrt{3}}{24} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

کدام تغییرات روی داده‌ها واریانس و انحراف معیار را تغییر می‌دهد؟

(۱) اگر همه داده‌ها با مقداری ثابت جمع شوند واریانس تغییری نمی‌کند.

(۲) اگر داده‌ها k برابر شوند، واریانس k^2 برابر می‌شود.

(۳) اگر داده‌ها k برابر شوند، انحراف معیار k برابر می‌شود.

(۴) اگر داده‌ها با عددی جمع شوند یا عددی از آن‌ها کم شود، یا در عددی ضرب یا بر آن تقسیم شوند، روی میانگین هم اعمال می‌شود:

$$\forall 1 \leq i \leq n, k \in \mathbb{R}, b \in \mathbb{R}; \quad x'_i = kx_i + b \Rightarrow \bar{x}_{\text{جدید}} = k\bar{x} + b$$





برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QR Code بالا را اسکن یا روی آن کلیک کنید!

فیزیک ۱: ترمودینامیک - صفحه‌های ۱۲۷ تا ۱۴۹

فیزیک ۳: حرکت بر خط راست + دینامیک و حرکت دایره‌ای (تا قبل از نیروی گرانشی) - صفحه‌های ۱ تا ۵۳

بودجه‌بندی

این آزمون

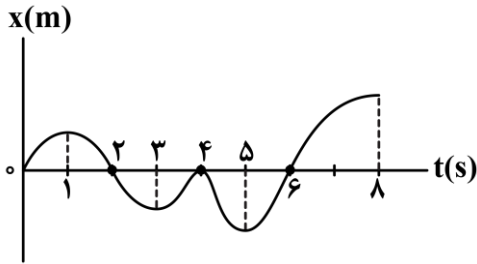
پایه دهم: در مجموع ۱ یا ۲ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

پایه دوازدهم: در مجموع ۷ تست از ۳۵ تست کنکور را پوشش داده است.

سهم در

کنکور

۴۱- با توجه به نمودار مکان - زمان زیر، مشخص کنید چه تعداد عبارتهای زیر صحیح است؟



الف - سرعت متوسط در کل بازه زمانی مثبت است.

ب - مجموعاً ۵s بردار مکان در جهت محور X است.

ج - مجموعاً ۵s بردار مکان و سرعت هم جهت هستند.

د - متحرک مجموعاً ۳s با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور می‌شود.

۲ (۲)

۱ (۱)

۴ (۴)

۳ (۳)

(آسان - نموداری - استاندارد) - صفحه ۱۰ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۳

بررسی موارد:



شیب خط واصل بین دو نقطه در نمودار $x-t$ ، برابر سرعت متوسط متحرک در آن بازه زمانی است. شیب خط واصل از لحظه $t=0$ به $t=8s$ ، دارای شیب مثبت است، پس $v_{av} > 0$ است. (✓)



در بازه‌های زمانی‌ای که نمودار $x-t$ بالای محور زمان است، بردار مکان متحرک مثبت است. در بازه‌های زمانی صفر تا ۲s و ۶s تا ۸s مجموعاً ۴ ثانیه بردار مکان مثبت است. (*)



در بازه‌های زمانی صفر تا ۱s و ۶s تا ۸s بردار مکان و سرعت مثبت‌اند، هم‌چنین در بازه‌های زمانی ۲s تا ۳s و ۴s تا ۵s بردار مکان و سرعت منفی‌اند. پس مجموعاً ۵ ثانیه بردار مکان و سرعت هم جهت هستند. (✓)



در بازه‌های زمانی صفر تا ۱s و ۶s تا ۸s مجموعاً ۳ ثانیه متحرک با سرعت مثبت از مبدأ مکان دور می‌شود. (✓)
۳ مورد درست است.



۴۲- متحرکی که با تندی ثابت بر مسیر مستقیم حرکت می‌کند، با شتاب ثابت ترمز می‌کند تا پس از ۱۰ ثانیه متوقف شود. بزرگی

جابه‌جایی متحرک در ۲/۵ ثانیه آخر حرکت، چند برابر بزرگی جابه‌جایی آن در ۴ ثانیه آخر حرکت است؟

$\frac{9}{16}$ (۴)

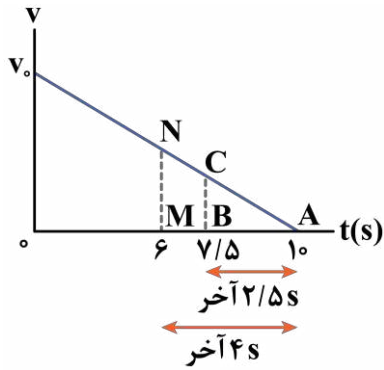
$\frac{3}{4}$ (۳)

$\frac{5}{8}$ (۲)

$\frac{25}{64}$ (۱)



روش اول



نمودار سرعت - زمان متحرکی که در مدت 10 s با شتاب ثابت متوقف می‌شود، مطابق شکل است. با توجه به تشابه مثلث‌های ABC و AMN داریم:

$$\frac{\Delta x_{\text{آخر } 2/5\text{ s}}}{\Delta x_{\text{آخر } 4\text{ s}}} = \frac{S_{ABC}}{S_{AMN}} = \left(\frac{AB}{AM}\right)^2 = \left(\frac{2/5}{4}\right)^2 = \left(\frac{5}{8}\right)^2 = \frac{25}{64}$$

روش دوم

با استفاده از معادله «جابه‌جایی - زمان» به کمک سرعت نهایی $(\Delta x = \frac{-1}{2}at^2 + vt)$ داریم:

$$\Delta x = \frac{-1}{2}at^2 + vt \xrightarrow{v=0 \text{ توقف}} \Delta x = -\frac{1}{2}at^2 \Rightarrow \frac{|\Delta x_{\text{آخر } 2/5\text{ s}}|}{|\Delta x_{\text{آخر } 4\text{ s}}|} = \frac{\frac{1}{2}a \times 2/5^2}{\frac{1}{2}a \times 4^2} = \frac{25}{64}$$



۴۳ - معادله سرعت - زمان متحرکی که بر روی خط راست حرکت می‌کند، در SI به صورت $v = 4t^2 - 7$ است. شتاب متوسط متحرک در ۳ ثانیه دوم حرکت آن چند متر بر مربع ثانیه است؟

۳۲ (۴)

۲۴ (۳)

۴۰ (۲)

۳۶ (۱)

۳ ثانیه دوم به معنی بازه $t_1 = 3\text{ s}$ تا $t_2 = 6\text{ s}$ است؛ بنابراین شتاب متوسط در این بازه برابر است با:

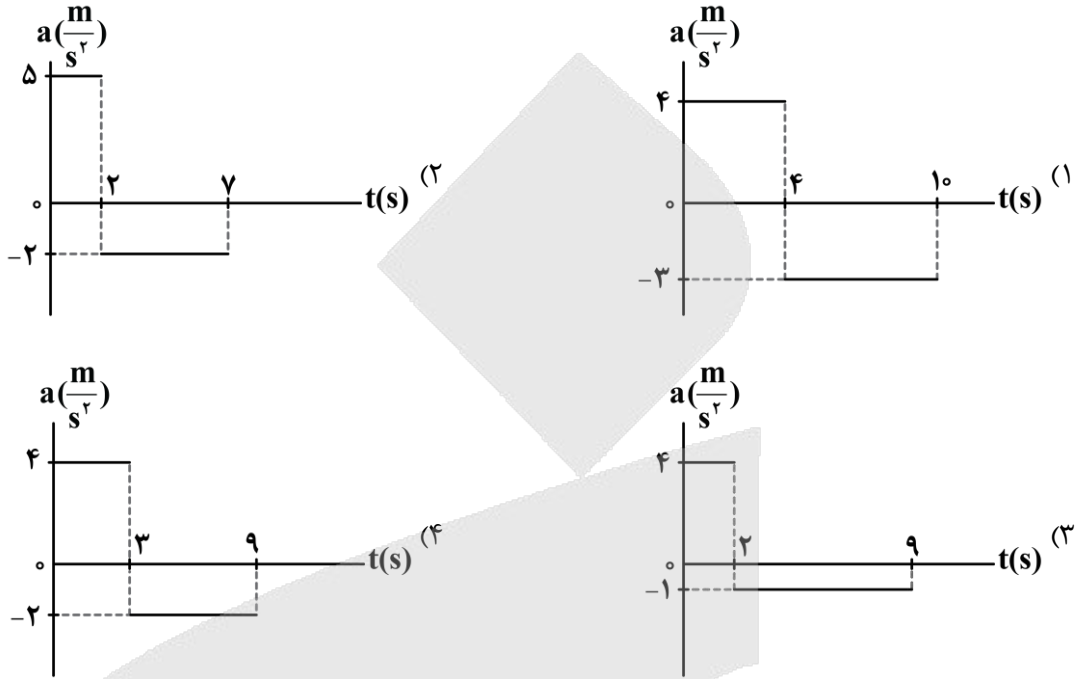
$$v = 4t^2 - 7 \Rightarrow \begin{cases} t_1 = 3\text{ s} \Rightarrow v_1 = 4 \times 3^2 - 7 = 29 \frac{\text{m}}{\text{s}} \\ t_2 = 6\text{ s} \Rightarrow v_2 = 4 \times 6^2 - 7 = 137 \frac{\text{m}}{\text{s}} \end{cases}$$

$$\Rightarrow a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{137 - 29}{3} = \frac{108}{3} = 36 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$





۴۴- متحرکی بر روی محور x حرکت خود را با سرعت $10 \frac{m}{s} (\vec{i})$ شروع می‌کند و در نهایت پس از طی مسافتی، حرکت خود را با همان سرعت به پایان می‌رساند. اگر این متحرک در مسیر خود تغییر جهت داده باشد، کدام نمودار شتاب - زمان زیر، می‌تواند مربوط به حرکت آن باشد؟

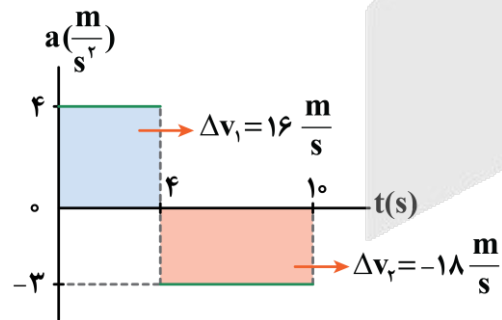


پاسخ: گزینه ۴

سخت - نموداری - زمان بر (- صفحه ۲۱ - ۱۲۰۱)

با توجه به این که سرعت اولیه با سرعت نهایی متحرک برابر است، پس تغییرات سرعت در کل حرکت برابر با صفر است. از آنجایی که مساحت محصور نمودار شتاب - زمان نسبت به محور t برابر با Δv است، در نتیجه نمودار مورد نظر باید به گونه‌ای باشد که در آن، مساحت بالای محور t با مساحت پایین محور t، هم‌اندازه باشد. پس از بررسی این شرط، به کمک علامت سرعت متحرک باید ببینیم که متحرک تغییر جهت داشته یا نه!

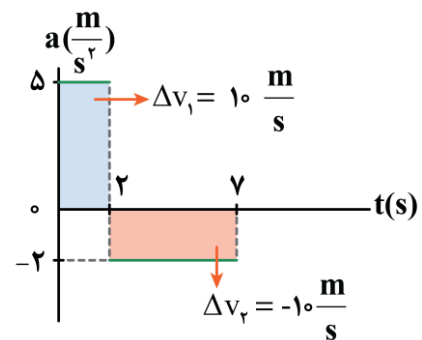
بررسی گزینه‌ها:



همان‌طور که می‌بینید، مساحت بالا و پایین نمودار، باهم برابر نیستند.

$$\Delta v_{\text{کل}} = 16 - 18 = -2 \neq 0 \quad (\times)$$

۲



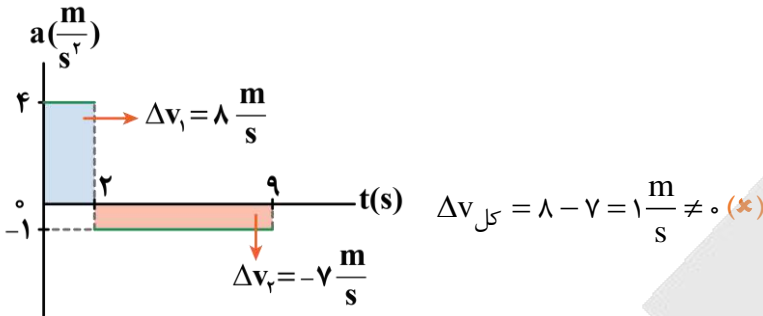
دقت شود که در این گزینه، مطابق شکل، $\Delta v_{\text{کل}} = 0$ است، اما علامت سرعت در طی حرکت تغییری نکرده و در نتیجه متحرک تغییر جهت حرکت نداده است.

$$\begin{cases} v_{2s} = v_0 + \Delta v_1 = (-10) + (10) = 0 \\ v_{7s} = v_2 + \Delta v_2 = (0) + (-10) = -10 \frac{m}{s} \end{cases}$$

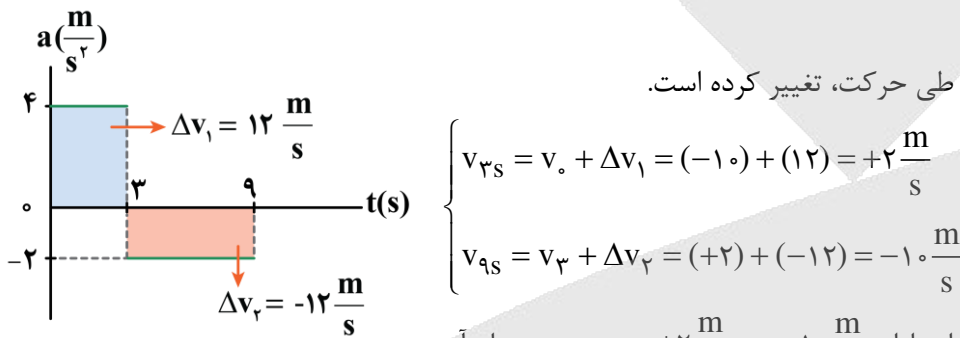


همان طور که مشخص است، سرعت متحرک ابتدا از $-10 \frac{m}{s}$ به صفر و سپس از صفر به $10 \frac{m}{s}$ می‌رسد. پس علامت سرعت تغییر نکرده

است. (*)



مطابق شکل، $\Delta v کل = 0$ و علامت سرعت نیز طی حرکت، تغییر کرده است.



همان طور که مشخص است، سرعت متحرک ابتدا از $-10 \frac{m}{s}$ به $+2 \frac{m}{s}$ رسیده و بعد از آن

سرعت از $+2 \frac{m}{s}$ به $-10 \frac{m}{s}$ رسیده است؛ یعنی در کل مسیر متحرک دو بار تغییر جهت داده است. (✓)



۴۵- جسمی به جرم 6 kg را به انتهای فنر سبکی با ثابت $3000 \frac{N}{m}$ آویزان می‌کنیم. طول فنر چگونه تغییر می‌کند؟ ($g = 10 \frac{m}{s^2}$)

- (۱) 2 cm افزایش می‌یابد. (۲) 2 cm کاهش می‌یابد. (۳) 0.5 cm افزایش می‌یابد. (۴) 0.5 cm کاهش می‌یابد.

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۴۳ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

نیروی فنر هم‌اندازه وزن جسم است.

$$F_e = mg \Rightarrow kx = mg \Rightarrow 3000 \cdot x = 6 \times 10$$

$$\Rightarrow x = 0.02 \text{ m} = 2 \text{ cm}$$

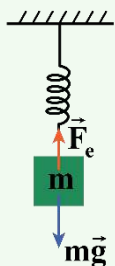
دقت کنید برای آن که فنر نیروی رو به بالا به جسم وارد کند، باید کشیده شود و طول آن افزایش یابد.

نیروی فنر

اگر فنری را از حالت آزاد خود خارج کنیم، اندازه نیروی کشش درون فنر از رابطه $F_e = kx$ به دست می‌آید. در این رابطه k ثابت فنر (برحسب $\frac{N}{m}$) و x اندازه تغییر طول فنر نسبت به حالت آزاد آن است که از رابطه $x = L - L_0$ به دست می‌آید.

نکته

اگر جسمی به جرم m را از فنر قائمی آویزان کنیم، پس از تعادل مجموعه داریم:

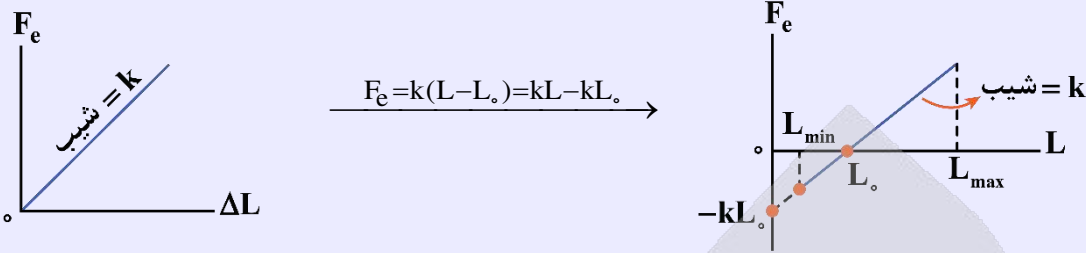


$$F_{net,y} = 0 \Rightarrow F_e = mg \Rightarrow kx = mg$$



نمودار تغییرات نیروی فنر برحسب تغییر طول آن

نمودار نیروی کشسانی برحسب تغییر طول یک خط گذرنده از مبدأ مختصات با شیبی معادل با k (ثابت فنر) می‌باشد.



اگر مانند شکل مقابل، فنری را با دو نیروی مساوی F از دو طرف بکشیم نیروی کشسانی درون فنر همان F خواهد شد.



۴۶- مطابق شکل، دو شخص به جرم‌های $m_1 = 75 \text{ kg}$ و $m_2 = 50 \text{ kg}$ با کفش‌های چرخ‌دار در یک سالن مسطح و صاف روبه‌روی هم ایستاده‌اند. شخص اول با نیروی 100 N شخص دوم را به طرف راست هل می‌دهد. اگر بردار شتاب این دو شخص به ترتیب \vec{a}_1 و \vec{a}_2 باشد، حاصل $\vec{a}_2 - \vec{a}_1$ در SI کدام است؟



$$\frac{-10}{3} \vec{i} \quad (2)$$

$$-\frac{2}{3} \vec{i} \quad (4)$$

$$\frac{10}{3} \vec{i} \quad (1)$$

$$\frac{2}{3} \vec{i} \quad (3)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۳۵ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

نیروی که شخص (۱) به شخص (۲) وارد می‌کند به سمت راست (در جهت محور x) است؛ بنابراین $\vec{F}_{12} = 100 \vec{i}$ است و داریم:

$$\vec{F}_{12} = m_2 \vec{a}_2 \Rightarrow 100 \vec{i} = 50 \vec{a}_2 \Rightarrow \vec{a}_2 = 2 \vec{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

گام دوم

با توجه به قانون سوم نیوتون، نیرویی که شخص (۲) به شخص (۱) وارد می‌کند برابر $\vec{F}_{21} = -100 \vec{i}$ است و داریم:

$$\vec{F}_{21} = m_1 \vec{a}_1 \Rightarrow -100 \vec{i} = 75 \vec{a}_1 \Rightarrow \vec{a}_1 = -\frac{4}{3} \vec{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$

گام آخر

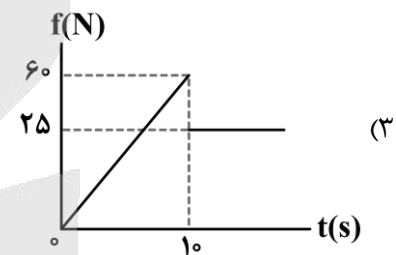
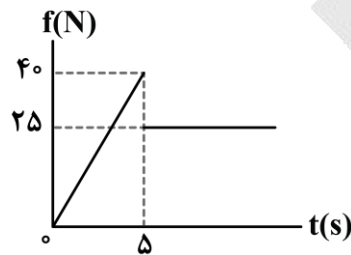
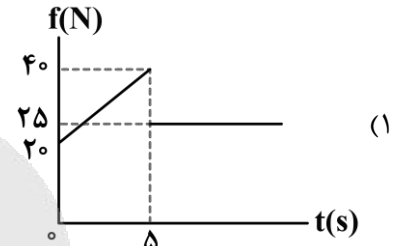
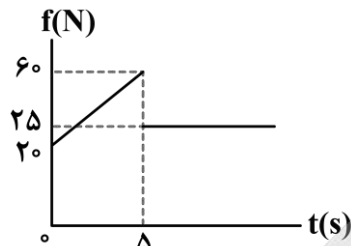
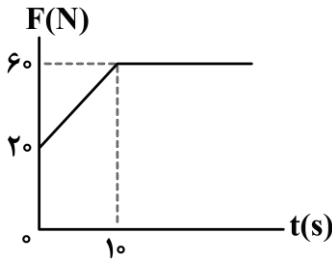
بنابراین خواسته سؤال برابر است با:

$$\vec{a}_2 - \vec{a}_1 = 2 \vec{i} - \left(-\frac{4}{3} \vec{i} \right) = \frac{10}{3} \vec{i} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right)$$





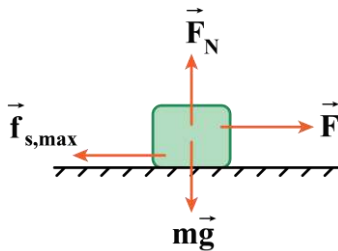
۴۷- جسمی به جرم 5 kg بر روی یک سطح افقی قرار دارد. ضریب اصطکاک جنبشی و ایستایی بین جسم و سطح به ترتیب برابر $0/5$ و $0/8$ است. یک نیروی افقی متغیر با زمان، مطابق نمودار زیر، به جسم وارد می‌شود. نمودار بزرگی نیروی اصطکاک بر حسب زمان کدام است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)



(سخت - نموداری - زمان بر - صفحه ۴۲ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول



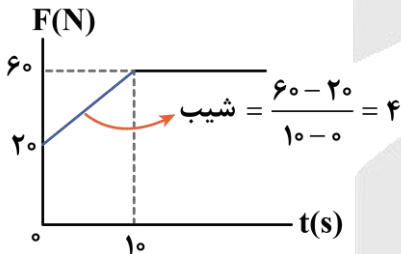
اول باید مقدار بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی را حساب کنیم:

$$F_{\text{net},y} = 0 \Rightarrow F_N = mg = 5 \times 10 = 50 \text{ N}$$

$$f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N = 0/8 \times 50 = 40 \text{ N}$$

گام دوم

حالا باید حساب کنیم که بزرگی نیروی متغیر با زمان در چه لحظه‌ای برابر با بزرگی بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی می‌شود. چرا؟ چون تا آن لحظه، نیروی اصطکاک ایستایی پایه‌پای نیروی متغیر، افزایش پیدا کرده تا جسم ساکن بماند!



$$\text{شیب} = \frac{60 - 20}{10 - 0} = 4 \Rightarrow 0 \leq t < 10 \text{ s} : F = 4t + 20 \xrightarrow{F=f_{s,\text{max}}}$$

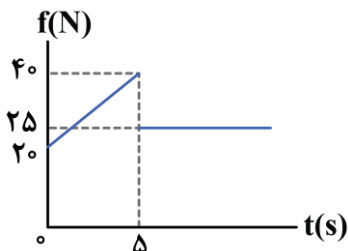
$$4t + 20 = 40 \Rightarrow 4t = 20 \Rightarrow t = 5 \text{ s}$$

پس در بازه زمانی صفر تا 5 s ، بزرگی نیروی اصطکاک برابر با $f_s = 4t + 20$ است.

گام سوم

از لحظه $t = 5 \text{ s}$ به بعد، جسم شروع به حرکت می‌کند و در حین حرکت، نیروی اصطکاک، ثابت و از نوع جنبشی است؛ در نتیجه داریم:

$$f_k = \mu_k F_N = 0/5 \times 50 = 25 \text{ N}$$



گام آخر

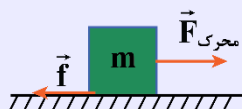
در نهایت نمودار بزرگی نیروی اصطکاک بر حسب زمان را رسم می‌کنیم:

راهنمای مسیرت

بچه‌ها توی حل این سؤال با توجه به گزینه‌ها، نیازی به محاسبه زمان (t) نبود و اگه صرفاً روی محاسبه نیروی اصطکاک تمرکز می‌کردید به پاسخ درست می‌رسیدید.

حرکت روی سطح دارای اصطکاک

اگر مانند شکل مقابل، نیروی خالص محرکی به جسم ساکن اعمال شود:



۱- ابتدا مقدار محرکی $F_{\text{محرکی}}$ را به دست می‌آوریم که مساوی با برابری نیروهای در راستای حرکت خود به جز اصطکاک می‌شود.

۲- سپس نیروی $f_{s,\text{max}}$ را از رابطه $f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N$ به دست می‌آوریم.

۳- مقادیر دو مرحله قبل را باهم مقایسه می‌کنیم و سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $F_{\text{محرکی}} < f_{s,\text{max}}$ جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین:

$$\text{نیروی اصطکاک: } f = f_s = F_{\text{محرکی}}$$

ب) اگر $F_{\text{محرکی}} = f_{s,\text{max}}$ جسم در آستانه حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

$$\text{نیروی اصطکاک: } f = f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N = F_{\text{محرکی}}$$

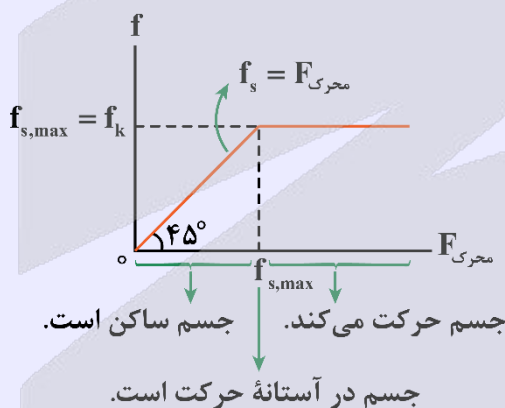
پ) اگر $F_{\text{محرکی}} > f_{s,\text{max}}$ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

$$\text{نیروی اصطکاک: } f = f_k = \mu_k F_N$$

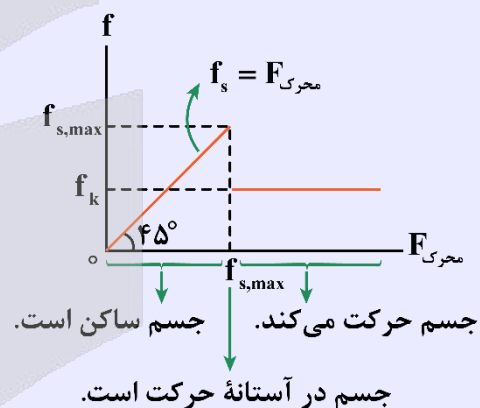
در روابط بالا μ_s و μ_k را به ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم که به ویژگی‌های سطح در تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره:

$$\mu_s \geq \mu_k \Rightarrow f_{s,\text{max}} \geq f_k$$

اگر $\mu_s = \mu_k$ باشد:



اگر $\mu_s > \mu_k$ باشد:



نکته

اگر بخواهیم جسم با حداقل نیروی محرک (با حداقل شتاب) شروع به حرکت کند، باید:

$$1- (F_{\text{محرکی}})_{\text{min}} = f_{s,\text{max}} = \mu_s F_N$$

$$2- f = f_k = \mu_k F_N$$

که در این حالت داریم:

$$a_{\text{min}} = \frac{(F_{\text{محرکی}})_{\text{min}} - f_k}{m} = (\mu_s - \mu_k) \frac{F_N}{m}$$

در مسائلی که $F_N = mg$ است، $a_{\text{min}} = (\mu_s - \mu_k)g$ است.

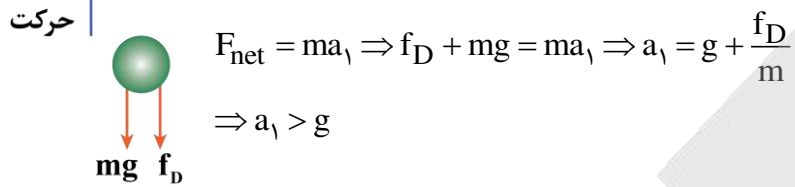


- ۴۸- گلوله‌ای را در راستای قائم در هوا به سمت بالا پرتاب می‌کنیم. اگر اندازه شتاب توپ را هنگام بالارفتن با « a_1 » و هنگام پایین آمدن با « a_2 » نشان دهیم و « g » اندازه شتاب گرانشی باشد، کدام مورد درست است؟
- (۱) $a_1 > g > a_2$ (۲) $a_1 > a_2 > g$ (۳) $a_2 > g > a_1$ (۴) $a_2 > a_1 > g$

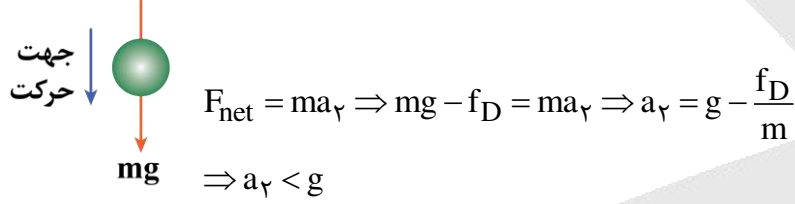
(آسان - مفهومی - سریع - صفحه ۳۴ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

هنگام بالارفتن، مقاومت هوا به سمت پایین به گلوله وارد می‌شود و اندازه شتاب آن را افزایش می‌دهد.



هنگام پایین آمدن، مقاومت هوا به سمت بالا وارد می‌شود و اندازه شتاب گلوله را کاهش می‌دهد.



- ۴۹- کارگری یک سطل محتوی مصالح به جرم 24kg را با طناب سبکی به طرف بالا می‌کشد. اگر بیشینه کشش قابل تحمل طناب 300N باشد، این کارگر این سطل را با حداکثر چه شتابی در SI می‌تواند بالا بکشد؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)

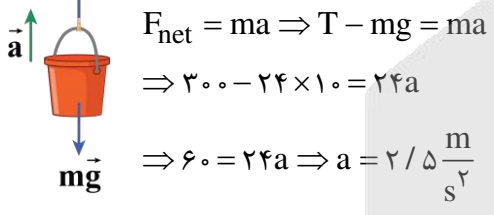


- (۱) $2/5$ (۲) 2 (۳) $1/5$ (۴) 1

(آسان - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۴۵ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

اگر جهت بالا را مثبت در نظر بگیریم، با استفاده از قانون دوم نیوتون برای جسم داریم:

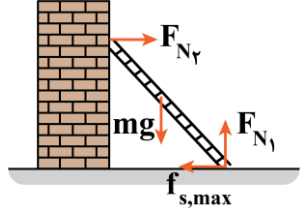


- ۵۰- نردبانی به جرم 25kg ، به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه دارد و پایه آن روی سطح افقی، در آستانه سر خوردن است. اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند، $50\sqrt{29}\text{N}$ باشد، نیرویی که دیوار به نردبان وارد می‌کند، چند نیوتون است؟ ($g = 10 \frac{\text{N}}{\text{kg}}$)
- (۱) 100 (۲) 250 (۳) 200 (۴) 270

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۴۵ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

نیروهای وارد به نردبان را رسم می‌کنیم:



نردبان در حالت سکون قرار دارد، با استفاده از قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net},y} = 0 = F_{N_1} - mg \Rightarrow F_{N_1} = mg = 250 \text{ N}$$

$$F_{\text{net},x} = 0 = F_{N_2} - f_{s,\text{max}} \Rightarrow F_{N_2} = f_{s,\text{max}}$$

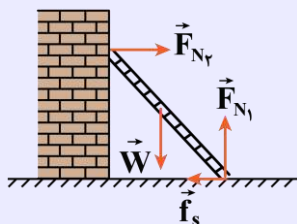
همچنین می‌دانیم نیروی سطح از رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$R = \sqrt{F_{N_1}^2 + f_{s,\text{max}}^2} \Rightarrow 50\sqrt{29} = \sqrt{250^2 + f_{s,\text{max}}^2}$$

$$\Rightarrow f_{s,\text{max}} = 100 \text{ N} = F_{N_2}$$

تعادل نردبان

۱- مطابق شکل زیر هرگاه نردبانی به زمین و یک دیوار بدون اصطکاک تکیه داده شده باشد، از طرف هر یک از پایه‌های نردبان بر سطح تماس متناظرش نیرو وارد می‌شود؛ در این وضعیت چنانچه نردبان بدون حرکت باقی بماند، برآیند نیروهای افقی و همچنین برآیند نیروهای عمودی‌اش برابر صفر می‌باشد:



$$F_{N_1} = mg \quad (\text{راستای عمودی})$$

$$F_{N_2} = f_s \quad (\text{راستای افقی})$$

۲- اگر نردبان در آستانه سُرخوردن باشد، اصطکاک ایستایی بیشینه می‌شود و داریم:

$$F_{N_1} = mg$$

$$F_{N_2} = f_{s,\text{max}} = \mu_s F_{N_1} \Rightarrow F_{N_2} = \mu_s mg$$

بنابراین اگر نردبان در آستانه سُرخوردن باشد، نسبت بزرگی نیرویی که دیوار قائم بر آن وارد می‌کند به وزن آن برابر ضریب اصطکاک ایستایی (μ_s) است. دقت کنید که اگر نردبان در آستانه سُرخوردن نباشد، این نسبت کوچک‌تر از ضریب اصطکاک ایستایی خواهد بود.

۳- اگر نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند را بخواهیم، باید از نیروهای f_s و F_{N_1} برآیند بگیریم:

$$R = \sqrt{F_{N_1}^2 + f_s^2} = \sqrt{(mg)^2 + f_s^2}$$

$$\text{اگر نردبان در آستانه سُرخوردن باشد.} \rightarrow R_1 = \sqrt{(mg)^2 + (\mu_s mg)^2} = mg\sqrt{1 + \mu_s^2}$$

نیرویی که سطح افقی به نردبان وارد می‌کند برابر برآیند f_s و F_{N_1} است، درحالی‌که نیرویی که دیوار قائم به نردبان وارد می‌کند هم‌اندازه f_s است؛ بنابراین حتماً نیروی سطح افقی بزرگ‌تر از نیروی دیوار قائم است.



۵۱- متحرکی به جرم 6 kg با شتاب ثابت روی خط راست در حال حرکت است. اگر در لحظه $t=0$ تکانه آن برابر با $210 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ باشد

و پس از 10 ثانیه به $450 \frac{\text{kgm}}{\text{s}}$ برسد، شتاب حرکت جسم چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱۲ (۴)

۶ (۳)

۱۱ (۲)

۴ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۴۸ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

روش اول

گام اول

از رابطه تکانه و نیروی متوسط داریم:

$$\Delta p = \bar{F}\Delta t \Rightarrow 450 - 210 = \bar{F}(10) \Rightarrow \bar{F} = 24 \text{ N}$$



گام آخر

حالا طبق قانون دوم نیوتون می توان نوشت:

$$\bar{F} = F_{\text{net}} = ma \Rightarrow 24 = 6a \Rightarrow a = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

روش دوم

گام اول

با استفاده از رابطه $\Delta p = m\Delta v$ داریم:

$$\Delta p = m\Delta v \Rightarrow 450 - 210 = 6\Delta v \Rightarrow \Delta v = \frac{240}{6} = 40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

گام آخر

حالا از تعریف شتاب متوسط استفاده می کنیم:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow a = \frac{40}{10} = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$$

تکانه

۱- حاصل ضرب جرم در سرعت یک جسم را تکانه می نامند. تکانه یک کمیت برداری و هم جهت با سرعت است.

$$\vec{p} = m\vec{v}$$

$$\Delta \vec{p} = m\Delta \vec{v} \quad \text{تغییرات تکانه}$$

۲- قانون دوم نیوتون با استفاده از تغییرات تکانه به صورت زیر نوشته می شود:

$$\vec{F}_{\text{net}} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

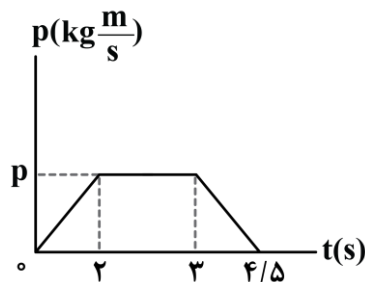
متوسط نیروی وارد بر جسم برابر آهنگ تغییرات تکانه است.

۳- انرژی جنبشی یک جسم را می توان بر حسب تکانه نیز نوشت:

$$\text{انرژی جنبشی: } K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2} \frac{(mv)^2}{m} = \frac{1}{2} \frac{p^2}{m} \Rightarrow K = \frac{p^2}{2m}$$



۵۲- شخصی به جرم 60 kg در یک آسانسور که رو به بالا شروع به حرکت می کند، روی یک ترازو ایستاده و نمودار تکانه - زمان او مطابق شکل است. اگر بیشترین عددی که ترازو نشان می دهد ۳ برابر کمترین عددی باشد که ترازو نشان می دهد، بیشترین

تندی آسانسور چند متر بر ثانیه است؟ ($g = 10 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$)

۸ (۱)

۴ (۲)

۲/۵ (۳)

۵ (۴)

(سخت - نموداری - زمان بر - صفحه ۴۶ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

ترازو نیروی عمودی سطح را نشان می دهد و آسانسور به طرف بالا در حرکت است. طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{\text{net}} = ma \Rightarrow F_N - mg = ma \Rightarrow F_N = m(g + a) \quad (*)$$



کلم دوم

اگر حرکت آسانسور به صورت تندشونده باشد، ترازو بیشترین عدد و اگر به صورت کندشونده باشد، ترازو کمترین عدد را نشان می‌دهد. طبق نمودار تکانه - زمان، حرکت آسانسور در بازه زمانی صفر تا ۲s تندشونده و در بازه زمانی ۳s تا ۴/۵s کندشونده است، پس می‌توان نوشت:

$$a = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow \begin{cases} (0 - 2)s : a_1 = \frac{v - 0}{2 - 0} = \frac{v}{2} \\ (3 - 4/5)s : a_2 = \frac{0 - v}{4/5 - 3} = -\frac{2}{3}v \end{cases}$$

کلم آخر

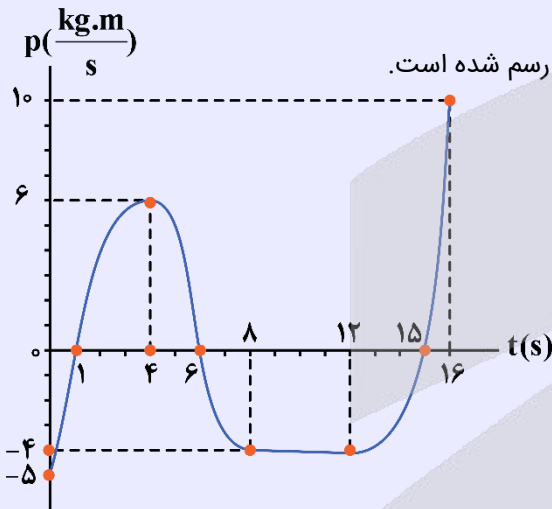
نسبت بیشترین عدد ترازو به کمترین عددی که نشان می‌دهد، برابر ۳ است، پس داریم:

$$\frac{F_{N_{\max}}}{F_{N_{\min}}} = 3 \xrightarrow{(*)} \frac{m(g + \frac{v}{2})}{m(g - \frac{2}{3}v)} = 3 \Rightarrow \frac{10 + \frac{v}{2}}{10 - \frac{2}{3}v} = 3 \Rightarrow 10 + \frac{v}{2} = 30 - 2v \Rightarrow \frac{5}{2}v = 20 \Rightarrow v = 8 \frac{m}{s}$$

نمودار تکانه - زمان

می‌خواهیم ببینیم که از روی نمودار تکانه - زمان می‌توان چه نتایج به دست آورد.

نمودار تکانه - زمان مقابل را به عنوان مثال در نظر بگیرید که برای جسمی به جرم ۲kg رسم شده است.



۱- تکانه در زمان‌های مختلف:

ساده‌ترین چیزی که از نمودار تکانه - زمان می‌فهمیم، تکانه جسم در لحظات مختلف است. مثلاً در نمودار داده شده، تکانه در لحظه $t = 1s$

برابر صفر و در لحظه $t = 4s$ برابر $\frac{6 \text{ kg.m}}{s}$ است.

۲- سرعت در لحظات مختلف:

اگر جرم جسم را داشته باشیم، به راحتی با استفاده از رابطه $p = mv$ ، سرعت آن را به دست می‌آوریم.

$$t = 1s : p = 0 \Rightarrow v = 0$$

$$t = 4s : p = 6 \frac{\text{kg.m}}{s} \Rightarrow v = \frac{p}{m} = \frac{6}{2} = 3 \frac{m}{s}$$

دقت کنید هرگاه سرعت یا تکانه، مثبت باشد، متحرک در جهت محور X حرکت می‌کند و هرگاه سرعت یا تکانه، منفی باشد، متحرک در خلاف جهت محور X حرکت می‌کند.



۳- نیروی خالص متوسط وارد بر جسم:

نیروی خالص متوسط وارد بر جسم از رابطه $F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t}$ به دست می‌آید که در واقع برابر شیب خط واصل دو نقطه از نمودار تکانه - زمان است. به عنوان مثال در بازه زمانی $1s \leq t \leq 4s$ داریم:

$$\begin{cases} t = 1s: p = 0 \\ t = 4s: p = 6 \frac{kg \cdot m}{s} \end{cases} \Rightarrow F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{6 - 0}{4 - 1} = 2N$$

۴- نیروی خالص وارد بر جسم در هر لحظه:

شیب خط مماس بر نمودار تکانه - زمان در هر لحظه برابر نیروی خالص وارد بر جسم در آن لحظه است. مثلاً در نمودار داده شده، نیروی خالص وارد بر جسم در بازه‌های زمانی $0 < t < 4s$ و $12s < t < 16s$ مثبت است (در جهت محور X است) و در بازه $4s < t < 8s$ منفی است (در خلاف جهت محور X است) و در بازه $8s < t < 12s$ صفر است. دقت کنید که در لحظه $t = 4s$ ، علامت شیب نمودار، تغییر کرده است، یعنی جهت نیروی خالص وارد بر جسم عوض شده است.

۵- اگر جرم جسم را داشته باشیم، علاوه بر محاسبه نیرو از نکات قبل، می‌توانیم با کمک قانون دوم نیوتون، شتاب را هم محاسبه کنیم.

۶- تندشونده و کندشونده بودن حرکت:

هرگاه نمودار از محور افقی، دور شود، حرکت، تندشونده و هرگاه به محور افقی، نزدیک شود، حرکت، کندشونده است. مثلاً در نمودار داده شده، در بازه‌های زمانی $0 < t < 1s$ ، $4s < t < 6s$ و $12s < t < 15s$ حرکت، کندشونده و در بازه‌های $1s < t < 4s$ ، $8s < t < 12s$ و $16s < t < 18s$ حرکت با سرعت ثابت انجام شده است.

۷- به طور کلی به یاد داشته باشید که اگر جرم جسم را بدانیم، می‌توانیم با تقسیم محور عمودی بر جرم، نمودار تکانه - زمان را به نمودار سرعت - زمان تبدیل کنیم و در نتیجه همه نکاتی که از نمودار سرعت - زمان قابل استنباط است را می‌توانیم بفهمیم.

۸- دقت کنید که اگر به جای نمودار تکانه - زمان، معادله تکانه - زمان را هم به ما بدهند، به طور مشابه می‌توانیم همه موارد بالا را به دست آوریم. گاهی هم می‌توانیم معادله داده شده را رسم کنیم و با کمک نمودار به دست آمده به سؤالات پاسخ دهیم.



۵۳- اگر با ثابت ماندن جرم یک گلوله، انرژی جنبشی آن ۱۹ درصد کاهش یابد، اندازه تکانه آن چند درصد کاهش می‌یابد؟

۱۱ (۴)

۱۹ (۳)

 $\sqrt{19}$ (۲)

۱۰ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۴۵ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

گام اول

اگر انرژی جنبشی ۱۹ درصد کاهش یابد، داریم:

$$K_2 = K_1 - 19\% \cdot K_1 = 81\% \cdot K_1 \Rightarrow \frac{K_2}{K_1} = \frac{81}{100}$$

گام دوم

به کمک رابطه انرژی جنبشی و تکانه داریم:

$$K = \frac{p^2}{2m} \xrightarrow{m: \text{ثابت}} \frac{K_2}{K_1} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{81}{100} = \left(\frac{p_2}{p_1}\right)^2 \Rightarrow \frac{p_2}{p_1} = \frac{9}{10}$$



کلام آخر

حالا درصد تغییرات تکانه را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات} = \frac{p_2 - p_1}{p_1} \times 100 = \frac{p_1 \left(\frac{9}{10} - 1 \right)}{p_1} \times 100 = -10\%$$

در نتیجه تکانه ۱۰ درصد کاهش می‌یابد.



۵۴- پره‌های یک بالگرد با آهنگ 1500 rpm می‌چرخند. طول نوک پره‌ها تا محور چرخش آن‌ها را 2 m فرض کنید. دوره تناوب پره‌ها و تندی در نوک پره‌ها به ترتیب از راست به چپ در SI کدام است؟

- (۱) 100π ، $0/04$ (۲) 200π ، $0/04$ (۳) 100π ، $0/06$ (۴) 200π ، $0/06$

(آسان - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۵۰ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

کلام اول

آهنگ چرخش پره‌ها 1500 rpm است، یعنی در هر دقیقه 1500 دور کامل می‌چرخند و دوره تناوب آن‌ها برابر است با:

$$T = \frac{t}{n} = \frac{60}{1500} = 0/04 \text{ s}$$

کلام آخر

تندی در نوک پره‌ها برابر است با:

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 2}{0/04} = 100\pi \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

آزمون سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۱

۵۷- جسمی به جرم 5 kg در حرکت دایره‌ای یکنواخت در هر دقیقه 30 دور می‌چرخد. اگر شعاع مسیر 2 متر باشد، انرژی جنبشی جسم، چند ژول است؟

- (۱) $10\pi^2$ (۲) $20\pi^2$ (۳) 80 (۴) 40

پاسخ تشریحی:

ابتدا دوره تناوب را محاسبه می‌کنیم و سپس با کمک آن سرعت و انرژی جنبشی را به دست می‌آوریم:

$$n = \frac{t}{T} \Rightarrow 30 = \frac{60}{T} \Rightarrow T = 2 \text{ s}$$

$$v = \frac{2\pi r}{T} = \frac{2\pi \times 2}{2} = 2\pi \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)$$

$$K = \frac{1}{2} mv^2 = \frac{1}{2} \times 5 \times (2\pi)^2 = 2/5 \times 4\pi^2 = 10\pi^2 \text{ (J)}$$

پاسخ: گزینه ۱





۵۵- خودرویی به جرم 1500 kg روی سطح افقی با تندی ثابت، یک مسیر دایره‌ای به شعاع $37/5 \text{ m}$ را دور می‌زند. اگر بیشینه نیروی اصطکاک ایستایی برابر با 9000 N باشد، کدام یک از موارد زیر صحیح است؟

الف - اگر خودرو با تندی $14 \frac{\text{m}}{\text{s}}$ حرکت کند، نمی‌لغزد.

ب - نیروی مرکزگری وارد بر خودرو در این مسیر می‌تواند 8000 N باشد.

ج - بیشینه شتاب مرکزگری خودرو $6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2}$ است.

(۱) «الف» و «ب» (۲) «الف» و «ج» (۳) «ب» و «ج» (۴) «الف»، «ب» و «ج»

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) (صفحه ۵۳ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

بررسی موارد:

الف و ب در این سؤال نیروی مرکزگرا، نیروی اصطکاک ایستایی است؛ بنابراین بیشینه نیروی مرکزگرا، همان نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه است و داریم:

$$F_{\text{net max}} = f_{s, \text{max}} = 9000 \text{ N} \quad (\checkmark)$$

بیشینه تندی خودرو بدون لغزیدن را به دست می‌آوریم:

$$F_{\text{net max}} = \frac{mv_{\text{max}}^2}{r} \Rightarrow 9000 = \frac{1500 \times v_{\text{max}}^2}{37/5} \Rightarrow v_{\text{max}} = 15 \frac{\text{m}}{\text{s}} \quad (\checkmark)$$

در نتیجه هر دو عبارت درست هستند.

ج - بیشینه شتاب مرکزگرا را به دست می‌آوریم:

$$a_{C \text{ max}} = \frac{F_{\text{net max}}}{m} \Rightarrow a_{C \text{ max}} = \frac{9000}{1500} = 6 \frac{\text{m}}{\text{s}^2} \quad (\checkmark)$$

آزمون سراسری ریاضی ۱۴۰۲

۵۲- خودرویی به جرم 2 ton روی سطح افقی با تندی ثابت $18 \frac{\text{km}}{\text{h}}$ مسیر دایره‌ای به شعاع 20 m را دور می‌زند. نیروی مرکزگری خودرو

چند نیوتون است و کدام نیرو آن را تأمین می‌کند؟

(۱) 2500 N - نیروی اصطکاک جنبشی (۲) 2500 N - نیروی اصطکاک ایستایی

(۳) 1250 N - نیروی اصطکاک جنبشی (۴) 1250 N - نیروی اصطکاک ایستایی

پاسخ تشریحی:

در حرکت دایره‌ای خودرو در پیچ، نیروی اصطکاک ایستایی در نقش نیروی مرکزگراست و اندازه آن برابر است با:

$$v = 18 \frac{\text{km}}{\text{h}} = 5 \frac{\text{m}}{\text{s}}$$

$$m = 2 \text{ ton} = 2000 \text{ kg}$$

$$F_c = m \frac{v^2}{R} = 2000 \times \frac{5^2}{20} = 2500 \text{ N}$$

پاسخ: گزینه ۲



۵۶- یک لیتر از گاز A در دمای -23°C و دو لیتر از گاز B در دمای 27°C ، هر دو با فشار یکسان ۳ اتمسفر، درون دو ظرف قرار دارند. نسبت تعداد ذرات گاز A به تعداد ذرات گاز B در این دو ظرف چقدر است؟

(۴) $\frac{5}{12}$

(۳) $\frac{3}{5}$

(۲) $\frac{23}{54}$

(۱) ۲



پاسخ: گزینه ۳

متوسط - محاسباتی - استاندارد (صفحه ۱۲۸ - ۱۰۰۵)

برای به دست آوردن هریک از کمیت‌های مربوط به گاز کامل باید از رابطه $\frac{PV}{nT} = R$ استفاده کنیم؛ بنابراین برای دو گاز داریم:

$$\frac{PV}{nT} = R \xrightarrow[\text{یکسان } P]{\text{ثابت } R} \frac{V_A}{n_A T_A} = \frac{V_B}{n_B T_B}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{n_A (-23 + 273)} = \frac{2}{n_B (27 + 273)}$$

$$\Rightarrow \frac{n_A}{n_B} = \frac{300}{2 \times 250} = \frac{300}{500} = \frac{3}{5}$$



۵۷- گاز ایده‌آلی درون یک سیلندر قرار دارد و با افزودن تدریجی گرما، پیستونی با سطح مقطع 2 m^2 را به حرکت درمی‌آورد. اگر گاز در این فرایند 200 J کار روی محیط انجام دهد و فشار گاز درون سیلندر به صورت ثابت برابر با $1.25 \times 10^5 \text{ Pa}$ باقی بماند، جابه‌جایی پیستون چند سانتی‌متر خواهد بود؟

۱۲۵ (۴)

۸۰ (۳)

۸ (۲)

۱۲/۵ (۱)

متوسط - محاسباتی - استاندارد (صفحه ۱۳۴ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

کار انجام‌شده توسط محیط روی گاز، برابر با $W = -P\Delta V$ است؛ بنابراین داریم:

$$|W| = P|\Delta V| = PA|\Delta h| \Rightarrow 200 = 1.25 \times 10^5 \times 0.2 \times |\Delta h| \Rightarrow |\Delta h| = 0.08 \text{ m} = 8 \text{ cm}$$

محاسبه کار در فرایند هم‌فشار

کار محیط روی دستگاه در فرایند هم‌فشار از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$W = -P\Delta V$$

طبق رابطه فوق:

۱- اگر گاز منبسط شود $\Delta V > 0$ علامت W (کار محیط روی دستگاه) منفی است و کار دستگاه روی محیط مثبت است.

۲- اگر گاز متراکم شود $\Delta V < 0$ علامت W (کار محیط روی دستگاه) مثبت است و کار دستگاه روی محیط منفی است.

کنکور سراسری ریاضی ۱۳۹۳

دمای 2 mol گاز کامل، در فشار ثابت از 30°C به 80°C افزایش می‌یابد. کار انجام‌شده روی گاز در این فرایند چند ژول است؟

$$\left(R = 8/3 \frac{\text{J}}{\text{mol.k}} \right)$$

-۸۳۰ (۴)

۸۳۰ (۳)

-۴/۵ (۲)

۴/۵ (۱)

پاسخ تشریحی:

$$W = -P\Delta V \xrightarrow{P(\Delta V) = nR\Delta T} W = -nR\Delta T = -2 \times 8/3 \times (80 - 30) = -830 \text{ J}$$

پاسخ: گزینه ۴



۵۸- اگر بخواهیم بدون گرمادادن به گاز کاملی، دمای آن را افزایش دهیم، از چه فرایندی باید استفاده کنیم؟

(۴) تراکم هم‌فشار

(۳) انبساط هم‌فشار

(۲) تراکم بی‌دررو

(۱) انبساط بی‌دررو

آسان - مفهومی - سریع (صفحه ۱۳۸ - ۱۰۰۵)

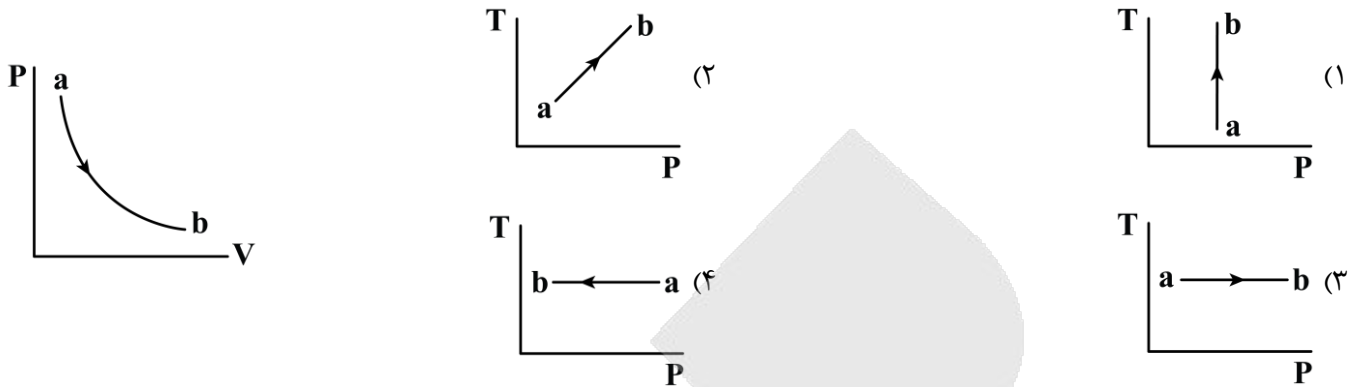
پاسخ: گزینه ۲

تنها در فرایند بی‌دررو است که بدون تبادل گرما، دمای گاز تغییر می‌کند. در انبساط بی‌دررو، دمای گاز کاهش می‌یابد و در تراکم بی‌دررو، دمای گاز افزایش می‌یابد.





۵۹- نمودار $P-V$ زیر را که فرایندی را برای گاز کامل نشان می‌دهد در نظر بگیرید. کدام یک از نمودارهای زیر می‌تواند نمودار $T-P$ این فرایند را به درستی نشان دهد؟



(آسان - نموداری - سریع - صفحه ۱۳۸ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

در نمودار واضح است که فشار طی فرایند، تغییر می‌کند؛ بنابراین گزینه (۱) نمی‌تواند صحیح باشد. در گزینه (۲) هم از نقطه a به نقطه b فشار در حال افزایش است؛ در صورتی که در نمودار $P-V$ فشار از نقطه a به نقطه b کاهش یافته است. نمودارهای گزینه‌های (۳) و (۴) هر دو هم‌دما هستند و با نمودار سؤال همخوانی دارند؛ اما در نمودار $P-V$ فشار از نقطه a به نقطه b در حال کاهش است؛ بنابراین از بین این دو گزینه تنها گزینه (۴) می‌تواند صحیح باشد.



۶۰- اگر حجم یک گاز کامل محبوس در داخل یک پیستون، در دمای ثابت ۱۰ درصد کاهش یابد، فشار گاز تقریباً چند درصد و چگونه تغییر می‌کند؟

(۱) ۵ درصد افزایش (۲) ۵ درصد کاهش (۳) ۱۱ درصد کاهش (۴) ۱۱ درصد افزایش

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۲۸ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۴

گام اول

۱۰ درصد کاهش در حجم V معادل این است که حجم ثانویه برابر با $0.9V$ باشد. در نتیجه با استفاده از معادله حالت گاز کامل داریم:

$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \Rightarrow \frac{P_1 V}{T} = \frac{P_2 \times 0.9V}{T} \Rightarrow P_2 = \frac{1.1}{1} P_1$$

گام آخر

درصد تغییرات فشار را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد تغییرات } P = \frac{P_2 - P_1}{P_1} \times 100 = \left(\frac{1.1}{1} - 1\right) \times 100 \approx 11\%$$

بنابراین فشار حدود ۱۱ درصد افزایش پیدا می‌کند.

آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت ماه ۱۴۰۴

۷۴- اگر دمای هوای اتاقی را از 24°C به 25°C برسانیم، چه کسری از مولکول‌های هوا خارج شود تا فشار هوای اتاق تغییر نکند؟

(۱) $\frac{1}{298}$ (۲) $\frac{1}{273}$ (۳) $\frac{1}{297}$ (۴) $\frac{1}{274}$



پاسخ تشریحی:

با توجه به قانون گازهای کامل می‌توان نوشت:

$$\frac{P_1 V_1}{n_1 T_1} = \frac{P_2 V_2}{n_2 T_2} \Rightarrow n_1 T_1 = n_2 T_2$$

$$\Rightarrow n_1 \times 297 = n_2 \times 298$$

$$\Rightarrow n_2 = \frac{297}{298} n_1$$

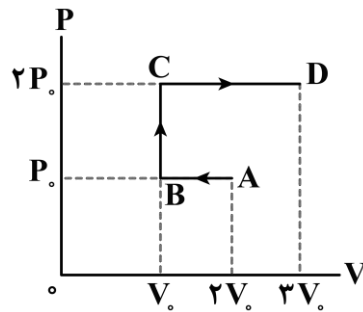
پس $\frac{1}{298}$ از مولکول‌های هوا باید خارج شود.

پاسخ: گزینه ۱



۶۱- در شکل زیر، نمودار $P-V$ برای یک گاز ایده‌آل رسم شده است. اگر حجم اولیه گاز در نقطه A برابر ۲ لیتر و فشار گاز در آن

10^5 پاسکال باشد، کار انجام شده روی گاز در طی فرایند A تا D چند ژول است؟



(۱) $+100\text{ J}$

(۲) -100 J

(۳) $+300\text{ J}$

(۴) -300 J

(متوسط - نموداری - استاندارد) - صفحه ۱۳۵ - ۱۰۰۵

پاسخ: گزینه ۴

حجم گاز در نقطه A برابر ۲ لیتر و با توجه به نمودار $2V_0$ است. در نتیجه $V_0 = 1L = 1 \times 10^{-3} m^3$ است. برای محاسبه کار کل انجام شده روی گاز، کافی است برای هر مرحله جداگانه کار را حساب کرده و در انتها باهم جمع کنیم. برای مسیر AB داریم:

$$W_{AB} = -P\Delta V = -P_0(V_0 - 2V_0) = P_0 V_0 = 10^5 \times 10^{-3} = 100\text{ J}$$

در مسیر BC تغییر حجم نداریم؛ بنابراین $W_{BC} = -P\Delta V = 0$ است.

برای مسیر CD داریم:

$$W_{CD} = -P\Delta V = -2P_0(3V_0 - V_0) = -4P_0 V_0 = -4 \times 10^5 \times 10^{-3} = -400\text{ J}$$

بنابراین کار کل انجام شده توسط محیط بر روی گاز برابر است با:

$$W_{\text{کل}} = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} = 100 + 0 + (-400) = -300\text{ J}$$

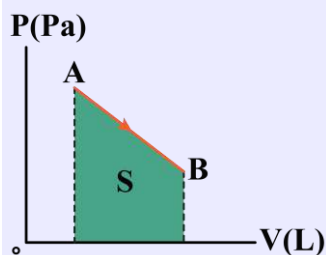
بررسی نمودار P-V

سطح زیر نمودار $P-V$ برابر اندازه کار انجام شده است.

مثلاً در فرایند مقابل، چون فرایند انبساطی است، کار محیط W و دستگاه W' به صورت زیر می‌باشند:

$$W = -|S|$$

$$W' = +|S|$$

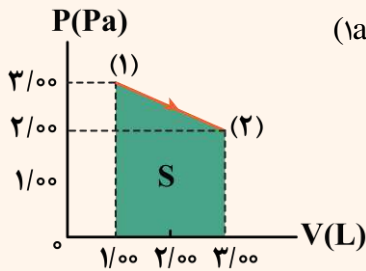


$W < 0$, $W' > 0$ \Rightarrow فرایند انبساطی است.



یه نمونه باحال

نمودار $P-V$ گاز رقیقی مطابق شکل زیر است. در این فرایند با فرض این که انرژی درونی در نقطه (۱) برابر ۴۵۶ ژول و در نقطه (۲) برابر ۹۱۲ ژول باشد چند ژول گرما مبادله شده است؟ آیا گاز گرما گرفته یا از دست داده است؟ ($1 \text{ atm} = 10^5 \text{ Pa}$)



پاسخ تشریحی:

مساحت محصور برابر با اندازه کار است.

$$S = |W| = \frac{(3+2) \times 10^5}{2} \times 2 \times 10^{-3} = 500 \text{ J}$$

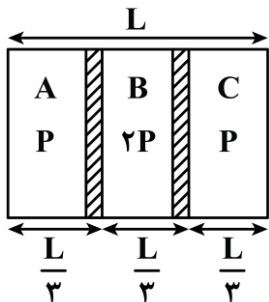
$$\text{فرایند انبساطی} \Rightarrow W < 0 \Rightarrow W = -500 \text{ J}$$

$$\Delta U = Q + W \Rightarrow 912 - 456 = Q - 500 \Rightarrow 456 = Q - 500 \Rightarrow Q = 956 \text{ J}$$

در نتیجه گاز گرما گرفته است.



۶۲- مطابق شکل، دو پیستون، یک ظرف عایق را به سه بخش مساوی تقسیم کرده‌اند. در بخش‌های A، B و C به ترتیب، گاز ایده‌آل با فشار اولیه P ، $2P$ و P قرار دارد. دمای گازها در هر سه بخش در ابتدا یکسان است. اگر پیستون‌ها رها شوند، پس از گذشت زمان طولانی و رسیدن به تعادل نهایی، طول نهایی بخش A چقدر خواهد بود؟



$$L \quad (1)$$

$$\frac{L}{4} \quad (2)$$

$$\frac{L}{3} \quad (3)$$

$$\frac{L}{6} \quad (4)$$

(سخت - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۲۸ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۲

روش اول

دمای اولیه گازها در ابتدا یکسان است. دمای اولیه گازها را با T نشان می‌دهیم. پس از تعادل نیز دمای سه گاز یکسان است. این دمای ثانویه را با T' نمایش می‌دهیم. همچنین پس از تعادل، فشار درون هر سه بخش یکسان و برابر P' است.

اکنون معادله تغییر حالت یعنی $\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2}$ را برای هر قسمت می‌نویسیم:

$$\text{برای گاز A: } \frac{P(\frac{L}{3})}{T} = \frac{P' L_A}{T'}$$

$$\text{برای گاز B: } \frac{2P(\frac{L}{3})}{T} = \frac{P' L_B}{T'}$$

$$\text{برای گاز C: } \frac{P(\frac{L}{3})}{T} = \frac{P' L_C}{T'}$$

$$\text{دو طرف رابطه‌ها را برهم تقسیم می‌کنیم.} \rightarrow 2 = \frac{L_B}{L_A}, \quad 2 = \frac{L_B}{L_C}, \quad 1 = \frac{L_C}{L_A}$$



با توجه به این که $L_A + L_B + L_C = L$ و با استفاده از روابط بالا $L_A = \frac{L}{4}$ به دست می آید.

روش دوم

چون فشار گاز قسمت وسط دو برابر قسمت های دیگر است؛ بنابراین در نهایت هم پیستون ها طوری حرکت می کنند که فضای گاز B دو برابر دو قسمت دیگر باشد؛ بنابراین با توجه به این که $L_A + L_B + L_C = L$ مقدار $L_A = L_C = \frac{L_B}{2} = \frac{L}{4}$ به دست می آید.



۶۳- ابتدا در یک فرایند بی دررو، فشار یک گاز کامل دو برابر می شود و سپس در فرایندی هم فشار، حجم گاز دو برابر می شود. در کل این فرایند، حجم گاز n برابر و دمای مطلق آن m برابر می شود. m و n کدام است؟

$$m = 2, n = 1 \quad (2)$$

$$2 < m < 4, 1 < n < 2 \quad (1)$$

$$m = 4, n = 2 \quad (4)$$

$$1 < m < 2, 2 < n < 4 \quad (3)$$

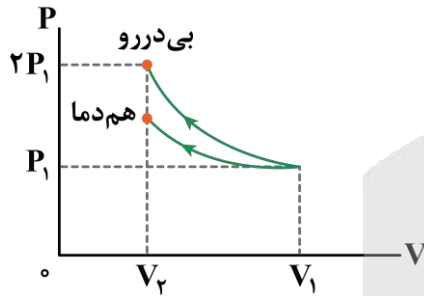
(سخت - مفهومی/محاسباتی - زمان بر - صفحه ۱۳۸ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

فرض کنید در یک تراکم بی دررو، فشار گازی ۲ برابر شود. با مقایسه این فرایند با یک تراکم هم دما، می توان نتایج زیر را گرفت:



در فرایند هم دما، فشار کمتر از ۲ برابر شده است؛ بنابراین:



$$\frac{P_1 V_1}{T_1} = \frac{P_2 V_2}{T_2} \xrightarrow{\text{ثابت } T} \frac{P_2}{P_1} = \frac{V_1}{V_2}$$

$$\frac{2 > \frac{P_2}{P_1} > 1}{\rightarrow 2 > \frac{V_1}{V_2} > 1 \Rightarrow \frac{1}{2} < \frac{V_2}{V_1} < 1}$$

بنابراین اگر در یک فرایند بی دررو، فشار ۲ برابر شود، حجم بین $\frac{1}{2}$ تا ۱ برابر می شود.

با توجه به این که در پایان تراکم، نمودار بی دررو بالاتر از نمودار هم دما است، می فهمیم دمای گاز افزایش یافته است. به عبارت دقیق تر دمای گاز بین ۱ تا ۲ برابر شده است.

در ادامه و پس از فرایند بی دررو، در یک فرایند هم فشار، حجم گاز ۲ برابر می شود و دمای آن نیز ۲ برابر می شود؛ بنابراین داریم:

$$\frac{1}{2} < \frac{V_2}{V_1} < 1 \xrightarrow{V_3 = 2V_2} 1 < \frac{V_3}{V_1} < 2 \Rightarrow 1 < n < 2$$

$$1 < \frac{T_2}{T_1} < 2 \xrightarrow{T_3 = 2T_2} 2 < \frac{T_3}{T_1} < 4 \Rightarrow 2 < m < 4$$



۶۴- در کدام مرحله از موتور درون سوز، پیستون پایین می رود و فشار و دمای مخلوط کاهش می یابد؟

(۴) تخلیه

(۳) آتش گرفتن

(۲) ضربه تراکم

(۱) ضربه قدرت

(آسان - حفظی - سریع - صفحه ۱۴۳ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۱

در مرحله ضربه قدرت، دایره فشار زیاد، مخلوط منبسط می شود و حجم آن از V_1 به V_2 می رسد. این انبساط به سرعت رخ می دهد؛ بنابراین می توان آن را بی دررو در نظر گرفت. در نتیجه در این انبساط، فشار و دمای مخلوط کاهش می یابد. در این مرحله، مخلوط پیستون را به شدت به پایین می راند و روی آن کار انجام می دهد. این کار توسط میل لنگ به اجزای دیگر ماشین منتقل می شود.



آزمون سراسری ریاضی اردیبهشت ماه ۱۴۰۳

۴۲- در مرحله «ضربه تراکم» سوپاپ ورودی و سوپاپ خروجی به ترتیب در چه وضعیتی هستند؟

- (۱) هر دو باز
(۲) هر دو بسته
(۳) ورودی بسته، خروجی باز
(۴) ورودی باز، خروجی بسته

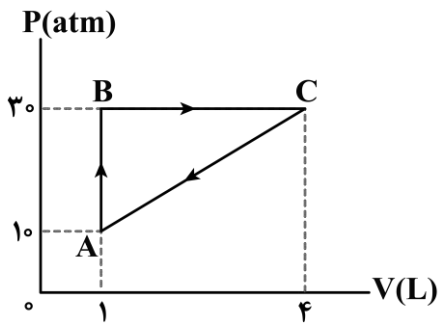
پاسخ تشریحی:

در مرحله ضربه تراکم، یک فرایند بی دررو انجام می شود که در این مرحله سوپاپ های ورودی و خروجی بسته هستند.

پاسخ: گزینه ۲



۶۵- در یک ماشین گرمایی، گاز داخل یک استوانه، در هر دقیقه ۹۰۰ چرخه را مطابق شکل زیر می پیماید. توان خروجی ماشین چند کیلووات است؟



- (۱) ۰/۷۵
(۲) ۹۰
(۳) ۴۵
(۴) ۱/۵

(متوسط - نموداری - استاندارد - صفحه ۱۴۰ - ۱۰۰۵)

پاسخ: گزینه ۳

گام اول

کار انجام شده در هر چرخه برابر مساحت داخل نمودار $P-V$ چرخه است. پس کار انجام شده در هر چرخه برابر است با:

$$W = S = \frac{20 \times 10^5 \times 3 \times 10^{-3}}{2} = 3000 \text{ J}$$

بنابراین کار انجام شده در هر دقیقه (۹۰۰ چرخه) برابر است با:

$$W_{\text{کل}} = 900 \cdot W = 900 \times 3000 = 27 \times 10^5 \text{ J}$$

گام آخر

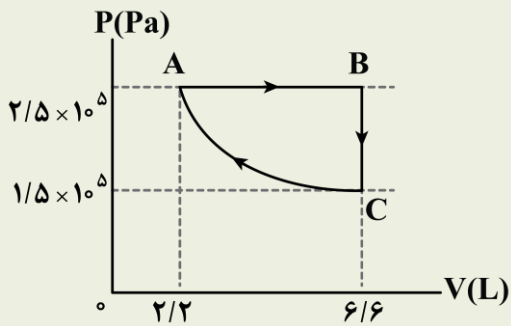
توان خروجی ماشین برابر است با:

$$P = \frac{W_{\text{کل}}}{\Delta t} = \frac{27 \times 10^5}{60} = 45000 \text{ W} = 45 \text{ kW}$$



آزمون سراسری ریاضی دی‌ماه ۱۴۰۱

۷۵- نمودار $P-V$ ی مقدار گاز آرمانی، مطابق شکل زیر است. کدام مورد در مقایسه انرژی درونی نقطه‌های A ، B و C درست است؟



$$U_A = U_C = 3U_B \quad (1)$$

$$U_B = 3U_A = 3U_C \quad (2)$$

$$U_B = 3U_A = \frac{10}{3}U_C \quad (3)$$

$$U_B = 3U_A = \frac{5}{3}U_C \quad (4)$$

پاسخ تشریحی:

انرژی درونی گاز کامل متناسب با دمای مطلق آن است و چون طبق رابطه $PV = nRT$ ، دمای مطلق گاز متناسب با PV است، می‌توان نتیجه گرفت انرژی درونی گاز نیز متناسب با PV است و برای مقایسه انرژی درونی در نقاط مختلف، کافی است حاصل PV را در این نقاط مقایسه کنیم.

$$U \propto PV$$

$$P_B V_B = 3P_A V_A \Rightarrow U_B = 3U_A$$

$$P_B V_B = \frac{5}{3}P_C V_C \Rightarrow U_B = \frac{5}{3}U_C$$

پاسخ: گزینه ۴





مولکول‌ها در خدمت تندرستی: کل فصل / آسایش و رفاه در سایه شیمی: از ابتدای فصل تا سرسلول سوختی (صفحه‌های ۱ تا ۵۰)

بودجه‌بندی

این آزمون

آب، آهنگ زندگی (صفحه‌های ۹۸ تا ۱۲۲)

سهم در

کنکور

مباحث این آزمون در مجموع ۷ تست از ۳۰ تست کنکور را پوشش داده است.

۶۶- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- الف - مخلوط آب و روغن، ناپایدار بوده و با قرار دادن آن در یک محیط ثابت، آب بر روی روغن قرار می‌گیرد.
 ب - در رسوب ایجاد شده روی لباس هنگام شستن آن‌ها با آب سخت و صابون، شمار کاتیون‌ها نصف آنیون‌ها است.
 ج - دو مورد از اتم‌های کربن موجود در حلقه بنزنی از پاک‌کننده‌های غیر صابونی، فقط به اتم‌های کربن متصل شده‌اند.
 د - اوره، همانند اتیلن گلیکول، گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر داشته و با ذرات خود پیوند هیدروژنی تشکیل می‌دهد.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

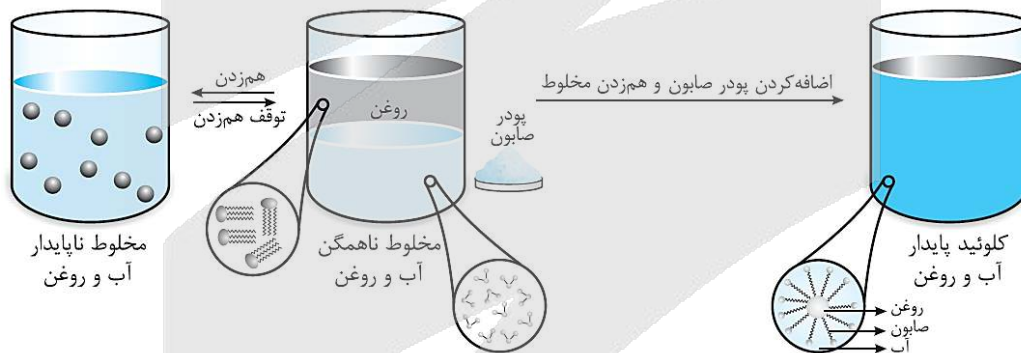
پاسخ: گزینه ۴

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد ۶ - صفحه ۱۱ - ۱۲۰۱)

عبارتهای (ب) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) مخلوط آب و روغن، در نبود صابون ناپایدار بوده و اگر این مخلوط را برای مدتی در یک مکان ثابت قرار بدهیم، آب و روغن موجود در آن از یکدیگر جدا شده و دو لایه مجزا تشکیل می‌شود. در چنین شرایطی، چون آب چگالی بیشتری دارد، این ماده در ته ظرف قرار گرفته و روغن روی آن را می‌پوشاند. تصویر زیر، مخلوطی از آب و روغن را نشان می‌دهد:



انحلال مواد

در هر ماده خالص، بین ذرات نیروی بین مولکولی برقرار شده است. در این حالت، ذرات سازنده آن ماده در کنار هم قرار گرفته‌اند. با مخلوط کردن دو ماده، آن دو ماده به شرطی در یکدیگر حل می‌شوند که بین ذرات آن‌ها نیروی بین مولکولی مناسب برقرار شود. در غیر این صورت، دو ماده جدا از هم باقی می‌مانند. مراحل حل شدن دو ماده در یکدیگر را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

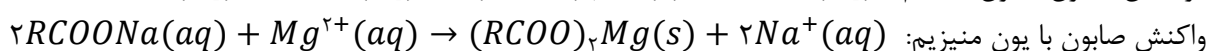
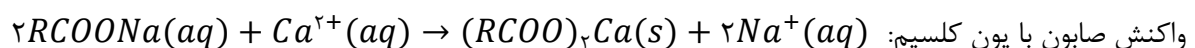
۱- شکستن پیوندهای موجود بین ذرات حل‌شونده

۲- شکستن پیوندهای موجود بین ذرات حلال

۳- پخش شدن ذرات حل‌شونده بین حلال و برقراری جاذبه مناسب بین ذرات

آزمایش‌ها نشان می‌دهند که فرایند انحلال هنگامی منجر به تشکیل محلول می‌شود که قدرت جاذبه‌های برقرار شده میان ذرات حل‌شونده با حلال در محلول، بیشتر از میانگین جاذبه‌ها در حلال خالص و حل‌شونده خالص باشد.

پ) مولکول‌های صابون، براساس معادله‌های زیر با کاتیون‌های موجود در آب‌های سخت واکنش می‌دهند:



رسوب‌های تولید شده در این واکنش‌ها، سفید رنگ بوده و رد آن‌ها بر روی لباس‌ها باقی می‌ماند. همان‌طور که مشخص است، نسبت شمار آنیون‌ها به شمار کاتیون‌ها در این رسوب‌ها برابر با ۲ خواهد بود.

قدرت پاک‌کنندگی

عوامل مؤثر بر قدرت پاک‌کنندگی صابون، به شرح زیر هستند:

- ۱- **میزان سختی آب:** صابون‌ها در مجاورت با آب سخت، با دو یون کلسیم و منیزیم موجود در این نمونه از آب رسوب سفیدرنگی ایجاد می‌کنند که بر روی لباس دیده می‌شود. در این حالت، قدرت پاک‌کنندگی صابون به شدت کاهش می‌یابد.
- ۲- **جنس پارچه:** چسبندگی لکه‌های چربی بر روی لباس‌های نخی (یا همان پنبه‌ای) کمتر از پارچه‌های پلی‌استری است. بر این اساس، می‌توان گفت صابون بر روی لکه‌های ایجاد شده بر سطح پارچه‌های نخی اثر بیشتری دارد.
- ۳- **آنزیم:** آنزیم نوعی کاتالیزگر است که فرایندهای تجزیه مواد موجود در لکه‌ها را تسریع می‌بخشد و این مواد را به مواد ساده‌تر تبدیل می‌کند. اضافه کردن آنزیم به صابون، قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.
- ۴- **دما:** علاوه بر این که در دماهای بالاتر، ساختار چربی‌های موجود بر روی سطح لباس سست می‌شود، افزایش دما سرعت انجام هر فرآیندی را نیز افزایش می‌دهد. همچنین افزایش دما موجب تأمین شدن گرمای واکنش‌های انجام گرفته بر لکه می‌شود، پس افزایش دما نیز قدرت پاک‌کنندگی صابون را افزایش می‌دهد.
- ۵- **افزودنی‌های شیمیایی:** اضافه کردن جوش شیرین به صابون، موجب ایجاد خاصیت بازی و افزایش قدرت پاک‌کنندگی آن می‌شود. افزودن نمک‌های فسفات به صابون نیز قدرت پاک‌کنندگی آن را در مواجهه با آب سخت افزایش می‌دهد.

ساختار کلی پاک‌کننده‌های غیر صابونی به صورت زیر است:

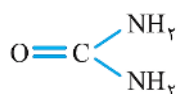


اتم‌های کربنی از بخش آنیونی این پاک‌کننده‌ها (۲ اتم کربن) که با ستاره مشخص شده‌اند، به هیچ اتم هیدروژنی متصل نیستند. اتم کربن سمت راست، به ۲ اتم کربن و یک اتم گوگرد متصل بوده و اتم کربن سمت چپ، فقط به ۳ اتم کربن متصل شده است.

پاک‌کننده‌های غیر صابونی

شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که علاوه بر قدرت پاک‌کنندگی بالا، بتوان آن‌ها را به میزان انبوه و با قیمت مناسب تولید کرد. با توجه به رابطه میان ساختار و رفتار یک ماده، شیمی‌دان‌ها به دنبال موادی بودند که همانند صابون‌ها، ساختاری دوگانه‌دوست (هم چربی‌دوست و هم آب‌دوست) داشته باشند. سرانجام آن‌ها توانستند با استفاده از بنزن و دیگر مواد اولیه موجود در صنایع پتروشیمی، پاک‌کننده‌های جدیدی را تولید کنند. این مواد، به پاک‌کننده‌های غیر صابونی معروف بوده و فرمول همگانی آن‌ها به صورت $RC_6H_4SO_3Na$ است. همان‌طور که مشخص است، پاک‌کننده‌های غیر صابونی نیز همانند پاک‌کننده‌های صابونی از یک بخش آب‌دوست و یک بخش چربی‌دوست (حلقه بنزنی و زنجیر هیدروکربنی) تشکیل شده‌اند. در هنگام استفاده از این پاک‌کننده‌ها، مولکول‌های چربی به زنجیره هیدروکربنی پاک‌کننده می‌چسبند و بخش آب‌دوست مولکول‌های پاک‌کننده نیز باعث پخش شدن چربی‌ها در آب می‌شود. پاک‌کننده‌های غیر صابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، طی واکنش‌های پیچیده و از مواد پتروشیمیایی تولید می‌شوند. این پاک‌کننده‌ها، همانند بنزن، نفتالن، بنزوئیک اسید، بنزالدهید و ... دارای یک حلقه کربنی آروماتیک (حلقه بنزنی) در ساختار خود هستند. پاک‌کننده‌های غیر صابونی، قدرت پاک‌کنندگی بیشتری نسبت به پاک‌کننده‌های صابونی دارند.

دو ترکیب اوره و اتیلن گلیکول، قطبی بوده و در نتیجه گشتاور دوقطبی بزرگ‌تر از صفر دارند. به علاوه به علت حضور پیوند اشتراکی $N - H$ در ساختار اوره و پیوند اشتراکی $O - H$ در ساختار اتیلن گلیکول، این دو ترکیب توانایی تشکیل پیوند هیدروژنی با مولکول‌های خود و همچنین با مولکول‌های آب را دارند. ساختار اوره به صورت زیر است:





۶۷- برای تهیه نوعی صابون مایع، ۳۴۰/۸ گرم از اسید چرب سیر شده با فرمول $CH_3(CH_2)_{16}COOH$ را در شرایط مناسب در مجاورت با محلول پتاسیم هیدروکسید قرار می‌دهند. در این واکنش، به تقریب چند درصد جرمی از فراورده‌های تولید شده را صابون تشکیل می‌دهد؟ ($K = 39, O = 16, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)

۹۶ (۴)

۹۴/۷ (۳)

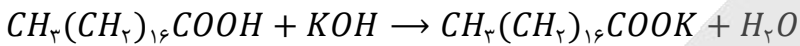
۹۲/۲ (۲)

۹۰/۴ (۱)

(آسان - محاسباتی - سریع - صفحه ۶ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۳

اسیدهای چرب، در شرایط مناسب با محلول‌های بازی واکنش داده و اتم هیدروژن موجود در گروه کربوکسیل آن‌ها با یک کاتیون جایگزین می‌شود. در این حالت، نوعی ترکیب با خاصیت صابونی به دست می‌آید. ابتدا معادله واکنش انجام شده را می‌نویسیم:



جرم مولی آب برابر $18 g.mol^{-1}$ است و جرم مولی صابون مایع حاصل از این واکنش نیز برابر است با:

$$\text{جرم مولی صابون} = (18 \times 12) + (35 \times 1) + (2 \times 16) + 39 = 322 g.mol^{-1}$$

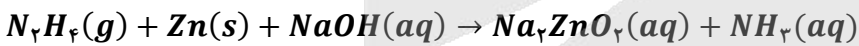
طی این فرایند، به ازای مصرف هر مول اسید چرب، یک مول صابون (۳۲۲ گرم صابون) و یک مول آب (۱۸ گرم آب) به دست می‌آید. در نهایت درصد جرمی صابون را در فراورده‌ها حساب می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی صابون در فراورده‌ها} = \frac{\text{جرم مولی صابون}}{\text{مجموع جرم مولی کل فراورده‌ها}} \times 100 = \frac{322}{322 + 18} \times 100 = \frac{32200}{340} \approx 94.7\%$$

توجه داریم که جرم اسید چرب مصرف شده در این سؤال، اصلاً اهمیتی ندارد و با استفاده از معادله موازنه شده واکنش به تنهایی، می‌توانیم درصد جرمی صابون را محاسبه کنیم.



۶۸- محلول ۵ لیتری از سود با $pH = 13/5$ با ۱۲۸ گرم از اسید چرب با فرمول شیمیایی $C_{16}H_{33}O_2$ واکنش می‌دهد. باز باقیمانده در این محلول، با چند گرم هیدرازین بر اساس معادله زیر و در حضور مقدار کافی فلز روی واکنش داده و طی این فرایند، چند گرم آمونیاک تولید می‌شود؟ (معادله واکنش موازنه شود. $O = 16, N = 14, C = 12, H = 1 : g.mol^{-1}$)



۳۴ - ۱۶ (۴)

۳۴ - ۸ (۳)

۱۷ - ۱۶ (۲)

۱۷ - ۸ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان‌بر - صفحه ۶ - ۱۲۰۱)

پاسخ: گزینه ۲

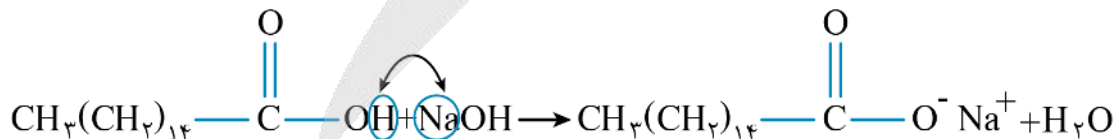
طی این فرایند، محلول ۵ لیتری از سود با $pH = 13/5$ مصرف شده است. بر این اساس، غلظت سدیم هیدروکسید موجود در این محلول را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$[OH^-] = 10^{pH-14} \Rightarrow [OH^-] = 10^{13/5-14} = 10^{-0.5} = 10^{0.5} \times 10^{-1} = 0.3 mol.L^{-1}$$

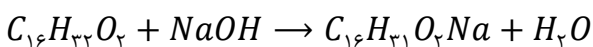
سدیم هیدروکسید یک باز قوی است، پس غلظت اولیه باز با غلظت یون هیدروکسید برابر است

$$[NaOH] = [OH^-] = 0.3 mol.L^{-1}$$

محلول مورد نظر، ۵ لیتر حجم داشته و غلظت سود در آن برابر با ۰/۳ مول بر لیتر است، پس در کل این محلول ۱/۵ مول سدیم هیدروکسید وجود دارد. معادله واکنش تولید صابون‌ها با استفاده از اسیدهای چرب به صورت زیر است:



ابتدا معادله واکنش انجام شده بین محلول سود و اسید چرب را می‌نویسیم:

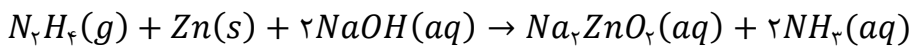


طی این فرایند، نوعی صابون با فرمول شیمیایی $C_{16}H_{31}O_2Na$ تولید شده است. با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سؤال، مقداری از محلول سود صرف واکنش با اسید چرب شده است. با توجه به جرم اسید چرب، مقدار سود مصرف شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? mol NaOH = 128 g C_{16}H_{33}O_2 \times \frac{1 mol C_{16}H_{33}O_2}{256 g C_{16}H_{33}O_2} \times \frac{1 mol NaOH}{1 mol C_{16}H_{33}O_2} = 0.5 mol$$



در محلول اولیه، ۱/۵ مول سدیم هیدروکسید وجود داشته و ۰/۵ مول از این ماده در واکنش با اسید چرب مصرف شده است. بر این اساس، می‌توان گفت ۱ مول سدیم هیدروکسید در محلول باقی مانده است. معادله واکنش دوم انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش، جرم هیدرازین مصرف شده و جرم آمونیاک تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

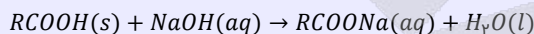
$$? g N_2H_4 = 1 \text{ mol NaOH} \times \frac{1 \text{ mol } N_2H_4}{2 \text{ mol NaOH}} \times \frac{32 \text{ g } N_2H_4}{1 \text{ mol } N_2H_4} = 16 \text{ g}$$

$$? g NH_3 = 1 \text{ mol NaOH} \times \frac{2 \text{ mol } NH_3}{2 \text{ mol NaOH}} \times \frac{17 \text{ g } NH_3}{1 \text{ mol } NH_3} = 17 \text{ g}$$

انواع پاک‌کننده‌های خورنده

پاک‌کننده‌های خورنده، موادی با خاصیت اسیدی یا بازی قوی هستند. در رابطه با این نوع از پاک‌کننده‌ها داریم:

۱- **شوینده‌های خورنده بازی:** از این شوینده‌ها برای پاک کردن رسوب‌ها و آلودگی‌هایی با خاصیت اسیدی استفاده می‌شود. به عنوان مثال، اگر مسیر لوله‌ای با مخلوط اسیدهای چرب (نوعی ماده اسیدی) مسدود شده باشد، برای باز کردن راه آن می‌توان از محلول سدیم هیدروکسید استفاده کرد. بر این اساس، محلول غلیظ سدیم هیدروکسید، به عنوان لوله‌بازکن کاربرد دارد. محلول سدیم هیدروکسید براساس معادله زیر با این آلودگی‌ها واکنش می‌دهد:



یکی از فرآورده‌های این واکنش، صابون است. صابون حاصل از این واکنش، در آب حل شده و می‌تواند چربی‌های اضافی را بزداید.

۲- **شوینده‌های خورنده اسیدی:** از این پاک‌کننده‌ها برای زدودن آلودگی‌هایی با خاصیت بازی استفاده می‌شود. به عنوان مثال، اگر مسیر لوله‌ای با رسوب کلسیم کربنات بسته شده باشد، برای باز کردن راه آن می‌توان از محلول هیدروکلریک اسید (HCl) استفاده کرد.



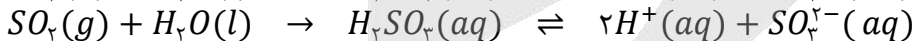
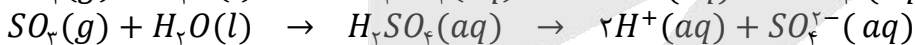
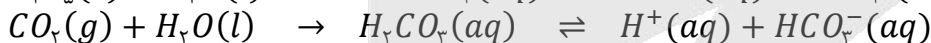
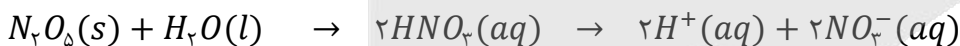
۶۹- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- ۱) برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون در زمان استفاده از آب سخت، به برخی از صابون‌ها نمک‌های فسفات اضافه می‌کنند.
- ۲) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.
- ۳) پاک‌کننده ساخته شده از مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم، در هنگام واکنش با آب گرما آزاد می‌کند.
- ۴) از واکنش میان پودر جامد دی‌نیتروژن پنتاکسید با آب، نوعی پاک‌کننده خورنده با خاصیت بازی ایجاد می‌شود.

آسان - مفهومی و حفظی - سریع (صفحه ۱۳ - ۱۲۰)

پاسخ: گزینه ۴

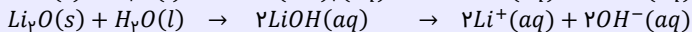
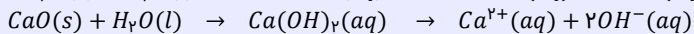
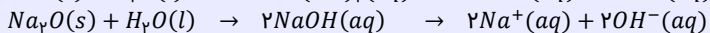
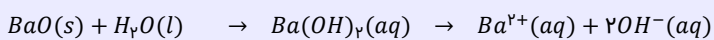
اکسیدهای حاصل از برخی عناصر، با مولکول‌های آب وارد واکنش شده و pH آب را تغییر می‌دهند. دی‌نیتروژن پنتاکسید، کربن دی‌اکسید، گوگرد دی‌اکسید و گوگرد تری‌اکسید، در دسته اکسیدهای اسیدی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:



در واکنش دی‌نیتروژن پنتاکسید با آب، نیتریک اسید تولید می‌شود. این ماده، یک اسید قوی است و در شرایط مناسب، به عنوان نوعی پاک‌کننده خورنده اسیدی برای پاک کردن آلودگی‌هایی با خاصیت بازی کاربرد دارد.

اکسیدهای بازی

به طور کلی، اکسیدهای فلزی (مثل سدیم اکسید) را اکسیدهای بازی می‌نامند. این مواد طی واکنش با آب، سبب افزایش غلظت یون هیدروکسید شده و pH محلول را افزایش می‌دهند. باریم اکسید، لیتیم اکسید، سدیم اکسید و کلسیم اکسید (آهک)، در دسته اکسیدهای بازی قرار دارند و براساس معادله‌های زیر با آب واکنش می‌دهند:



توجه داریم که اکسیدهای حاصل از فلزهای واسطه مثل اکسیدهای آهن، اکسیدهای مس و ... و آلومینیم اکسید، اصلاً با آب واکنش نداده و خاصیت بازی ندارند.

بررسی گزینه‌ها:

۱) نمک‌های فسفات برای جلوگیری از تشکیل رسوب صابون با یون‌های کلسیم و منیزیم موجود در آب سخت، به صابون اضافه می‌شوند. در این حالت، به جای صابون، این نمک‌های فسفات هستند که با یون‌های کلسیم و منیزیم واکنش می‌دهند و به صورت رسوب درمی‌آیند.

۲) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند؛ در حالی که صابون‌ها فقط به کمک برهم‌کنش‌های بین مولکولی موجب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند.

۳) واکنش انجام شده بین پاک‌کننده‌های ساخته شده از مخلوط سدیم هیدروکسید و پودر آلومینیم با آب به صورت زیر است:
 فرآورده‌های دیگر + گرما + گاز هیدروژن → آب + مخلوط سدیم هیدروکسید و آلومینیم

این پاک‌کننده‌ها به شکل پودر عرضه می‌شوند. همان‌طور که مشخص است، واکنش میان این پاک‌کننده‌ها و آب گرماده بوده و با آزاد شدن گرما همراه است. گرمای حاصل از این واکنش موجب سست شدن آلودگی‌ها شده و قدرت نفوذ پاک‌کننده به درون آلودگی‌ها را افزایش می‌دهد و در نتیجه آن، قدرت پاک‌کنندگی این نوع پاک‌کننده افزایش می‌یابد.



۷۰- با اضافه کردن چند میلی‌لیتر آب مقطر به ۴۰ mL محلول HCl با $pH = 1/3$ ، می‌توان محلولی ساخت که pH آن با pH محلول ۲ مول بر لیتر اسید HX با $K_a = 5 \times 10^{-5}$ برابر شود؟

۱۶۰ (۴)

۱۲۰ (۳)

۸۰ (۲)

۴۰ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۲۵ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

مراحل حل این سؤال، به صورت خلاصه به شرح زیر هستند:

گام اول: محاسبه pH محلول اسید HX

گام دوم: محاسبه میزان تغییر pH محلول هیدروکلریک اسید

گام سوم: به دست آوردن مقدار آب مقطر لازم برای تغییر pH محلول

ابتدا مقدار pH محلول اسید HX را محاسبه می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

$$K_a = M\alpha^2 \implies 5 \times 10^{-5} = 2 \times \alpha^2 \implies \alpha^2 = 2/5 \times 10^{-5} = 25 \times 10^{-6} \implies \alpha = 5 \times 10^{-3}$$

$$[H^+] = M \times \alpha \times n = 2 \times 5 \times 10^{-3} \times 1 = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(10^{-2}) = 2$$

برای محاسبه غلظت یون هیدروژن در محلول اسید ضعیف HX، از رابطه زیر هم می‌توانستیم استفاده کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} = \sqrt{5 \times 10^{-5} \times 2} = \sqrt{10^{-4}} = 10^{-2} \text{ mol. L}^{-1}$$

$$pH = -\log[H^+] = -\log(10^{-2}) = 2$$

طبق فرض سؤال، می‌خواهیم مقدار pH محلول هیدروکلریک اسید را از ۱/۳ به ۲ برسانیم. اگر محلول یک اسید قوی مثل هیدروکلریک اسید و یا یک باز قوی مثل سدیم هیدروکسید را n مرتبه رقیق کنیم (حجم محلول را با اضافه کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، مقدار pH این محلول به اندازه $\log(n)$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) نزدیک‌تر می‌شود. طی این فرایند، pH محلول به اندازه ۰/۷ واحد تغییر کرده است، پس داریم:

$$\log n = 0.7 \implies n = 10^{0.7} = 5$$

با توجه به محاسبات بالا، حجم محلول مورد نظر با استفاده از آب خالص ۵ برابر شده و از ۴۰ میلی‌لیتر به ۲۰۰ میلی‌لیتر رسیده است، پس حجم آب مورد نیاز برای انجام این فرایند برابر با ۱۶۰ میلی‌لیتر خواهد بود.



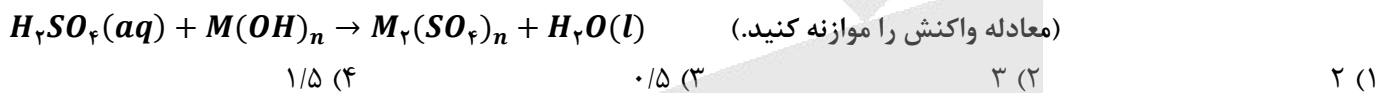
تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی

در رابطه با تغییر غلظت محلول‌های اسیدی و بازی، به نکات زیر توجه کنید:

- ✿ اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم (حجم محلول را با اضافه کردن آب خالص به آن، n برابر کنیم)، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) نزدیک‌تر می‌شود.
- ✿ اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه غلیظ کنیم (با افزایش مقدار اسید و یا کاهش مقدار آب موجود در محلول)، pH این محلول به اندازه $\log n$ واحد از pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) دورتر می‌شود.
- ✿ اگر محلول یک اسید ضعیف (مثل هیدروفلوئوریک اسید و یا هیدروسیانیک اسید) و یا یک باز ضعیف (مثل آمونیاک) را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه کمتر از $\log n$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) نزدیک‌تر می‌شود.
- ✿ اگر محلول یک اسید ضعیف و یا یک باز ضعیف را به اندازه n مرتبه غلیظ کنیم، pH این محلول به اندازه کمتر از $\log n$ واحد از مقدار pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) دورتر می‌شود.



۷۱- مقدار $2/4$ گرم از یک اکسید گوگرد را در آب حل می‌کنیم تا 200 میلی‌لیتر محلول سولفوریک اسید تولید شود. اگر این محلول اسیدی با 0.02 مول هیدروکسید فلز M به‌طور کامل خنثی شود، نسبت شمار آنیون به کاتیون در نمک حاصل از این واکنش کدام است؟ ($S = 32, O = 16 : g.mol^{-1}$)



(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۳۰ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

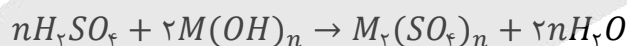
گوگرد تری‌اکسید، از جمله اکسیدهای اسیدی نافلز بوده و در هنگام انحلال در آب، با تولید سولفوریک اسید در محلول، غلظت یون هیدروژن موجود در محلول مورد نظر را افزایش می‌دهد. این ماده، از مولکول‌های ناقطبی تشکیل شده است. معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:



ابتدا تعداد مول H_2SO_4 تولید شده در این واکنش را حساب می‌کنیم:

$$? \text{ mol } H_2SO_4 = 2/4 \text{ g } SO_3 \times \frac{1 \text{ mol } SO_3}{80 \text{ g } SO_3} \times \frac{1 \text{ mol } H_2SO_4}{1 \text{ mol } SO_3} = 0.03 \text{ mol}$$

سولفوریک اسید، بر اساس معادله زیر با یک هیدروکسید فلزی واکنش داده است:



در ادامه، تعداد مول $M(OH)_n$ مصرف شده در واکنش دوم را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol } M(OH)_n = 0.03 \text{ mol } H_2SO_4 \times \frac{2 \text{ mol } M(OH)_n}{n \text{ mol } H_2SO_4} = 0.02 \text{ mol } M(OH)_n \Rightarrow n = \frac{0.03 \times 2}{0.02} = 3$$

بنابراین نسبت شمار آنیون به کاتیون در نمک حاصل یعنی $M_2(SO_4)_3$ برابر $1/5$ است.



۷۲- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- الف - اگر در دمای ثابت غلظت یون هیدروکسید در یک محلول اسیدی ۲ برابر شود، pH این محلول یک واحد افزایش پیدا می‌کند.
- ب - در شرایط یکسان، مقداری محلول شیشه‌پاک‌کن جریان الکتریسیته را کمتر از محلول لوله‌بازکن عبور می‌دهد.
- ج - منیزیم هیدروکسید، از مواد موجود در ضد اسیدها بوده و هر مول از آن، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.
- د - دیواره داخلی معده انسان، به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در معده را جذب می‌کند.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۳۲ - ۱۲۰۱

پاسخ: گزینه ۴

عبارتهای (ب) و (د) درست هستند.

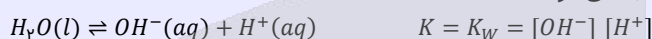


غلظت یون هیدروکسید در محلول اسیدی ۲ برابر شده است. با توجه به ثابت بودن حاصل ضرب غلظت یون‌های هیدروژن و هیدروکسید ($[H^+][OH^-]$) در دمای ثابت در یک محلول، می‌توان گفت غلظت یون هیدروژن (H^+) در این محلول ۰/۵ برابر شده است. اگر غلظت اسید یا باز موجود در یک محلول را افزایش دهیم، pH محلول مورد نظر از عدد ۷ دورتر می‌شود و اگر غلظت اسید یا باز موجود در یک محلول را کاهش دهیم، pH محلول مورد نظر به عدد ۷ نزدیکتر می‌شود. چون غلظت یون هیدروژن در این محلول اسیدی کاهش یافته است، پس می‌توان گفت طی این فرایند pH محلول مورد نظر به ۷ نزدیکتر شده و افزایش یافته است. به‌طور کلی، اگر محلول یک اسید قوی و یا یک باز قوی را n مرتبه رقیق کنیم، pH این محلول به اندازه $|\log(n)|$ واحد به pH ناحیه خنثی ($pH = 7$) نزدیکتر می‌شود. غلظت اسید مورد نظر ۰/۵ برابر شده پس pH این اسید به اندازه $|\log(0.5)| = 0.3$ واحد افزایش یافته است.

خودیونش آب



بر اساس مشاهدات تجربی، نمونه‌ای از آب خالص، رسانایی الکتریکی ناچیزی دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن (یا همان هیدرونیوم) در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های مورد نظر، براساس واکنش $H_2O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$ در آب تولید می‌شوند. ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

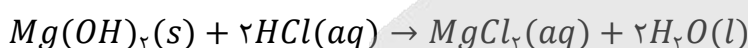


آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_W در دمای اتاق (۲۵ درجه سانتی‌گراد)، برابر با $10^{-14} \text{ mol}^2 \cdot L^{-2}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است. از آن‌جا که در آب خالص، همواره غلظت یون‌های هیدروژن و هیدروکسید با هم برابر هستند، خواهیم داشت:

$$K_W = [H^+][OH^-] = 10^{-14} \xrightarrow{[H^+] = [OH^-]} 10^{-14} = [H^+]^2 \Rightarrow [H^+] = 10^{-7} \text{ mol} \cdot L^{-1}$$

در شیشه‌پاک‌کن از محلول آمونیاک و در لوله بازکن از محلول سود استفاده می‌شود. چون محلول سود ثابت یونش بازی بالاتر و غلظت یون‌های محلول بیشتری دارد، پس می‌توان گفت در شرایط یکسان، یک نمونه از محلول شیشه‌پاک‌کن جریان الکتریسیته را کمتر از محلول لوله‌بازکن عبور می‌دهد.

منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضد اسیدها است. هر مول از این ماده با ۲ مول اسید معده (هیدروکلریک اسید) واکنش داده و آن را خنثی می‌کند. واکنش انجام شده طی این فرایند به‌صورت زیر است:



ضد اسیدهای معده



برای مقابله با مقدار اضافی از اسید موجود در معده افرادی که به بیماری‌های معده‌ای دچار هستند، از داروهایی به نام ضد اسید استفاده می‌کنند. این داروها خاصیت بازی داشته و با ورود به معده، سبب خنثی کردن اسید معده و افزایش pH محتویات معده می‌شوند. مواد مؤثر موجود در ضد اسیدهای مختلف، شامل منیزیم هیدروکسید، آلومینیم هیدروکسید و سدیم هیدروژن کربنات (جوش شیرین) می‌شوند. برای مثال، شیر منیزی یکی از رایج‌ترین ضد اسیدهای مورد استفاده به شمار می‌رود که ماده مؤثر موجود در آن، منیزیم هیدروکسید است. از آن‌جا که ماده موجود در این دارو انحلال‌پذیری بسیار کمی در آب دارد، شیر منیزی را می‌توان یک مخلوط ناهمگن و متعلق به دسته سوسپانسیون‌ها به حساب آورد.

درون معده، یک محیط بسیار اسیدی است که حتی می‌تواند فلز روی را در خود حل کند! دیواره داخلی معده به‌طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم را دوباره جذب می‌کند. این جذب سبب نابودی سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. حال اگر مقدار اسید معده به هر دلیل بیش از اندازه باشد، شمار یون‌های جذب شده افزایش یافته و سبب درد، التهاب و گاهی خونریزی معده می‌شود.



۷۳- کدام یک از مطالب زیر نادرست است؟

- ۱) پرکاربردترین شکل انرژی در استفاده از فناوری‌هایی مثل فناوری مربوط به گرمایش آسان‌تر، انرژی الکتریکی است.
- ۲) اکسیژن یکی از نافلزهای فعال است که به‌عنوان عامل اکسنده تمایل دارد با اغلب عناصر فلزی واکنش دهد.
- ۳) گونه اکسنده مصرف شده در واکنش فلز کلسیم و گاز O_2 ، دارای ۸ الکترون با $n = 3$ در اتم خود است.
- ۴) با قرار دادن قطعه آهن در محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان رنگ محلول مورد نظر تغییر می‌کند.

معادله واکنش انجام شده به صورت $2Ca(s) + O_2(g) \rightarrow 2CaO(s)$ است. گونه کاهنده (گونه‌ای که اکسید شده و یک ماده دیگر را می‌کاهد) مصرف شده در این واکنش، معادل با فلز کلسیم است. فلز کلسیم دارای ۸ الکترون با $n = 3$ در هر اتم خود است. توجه داریم که در این واکنش، اکسیژن معادل با گونه اکسندۀ بوده و در لایه الکترونی سوم آن، هیچ الکترونی وجود ندارد.

اکسایش و کاهش

الکترون، یکی از ذرات زیراتمی است. این ذره، بار الکتریکی نسبی ۱- داشته و در اطراف هسته اتم در حال گردش است. این ذره زیراتمی، علم شیمی و الکترونیته را به یکدیگر پیوند داده است. در واقع، واکنش‌های الکتروشیمیایی نوعی از واکنش‌ها هستند که در آن‌ها الکترون از یک گونه به گونه دیگر منتقل می‌شود. در واکنش‌های الکتروشیمیایی، اکسایش (اکسید شدن) به معنای از دست دادن الکترون توسط یک گونه و کاهش (کاهش یافتن) به معنای گرفتن الکترون توسط یک گونه است. در یک واکنش الکتروشیمیایی (یا همان واکنش اکسایش-کاهش)، یک گونه اکسید شده و الکترون‌های خود را به گونه دیگر می‌دهد تا آن گونه کاهش پیدا کند. بدیهی است که در این فرایندها، گونه اکسید شده و کاهش یافته باید به صورت هم‌زمان وجود داشته باشند.

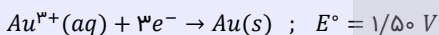
بررسی گزینه‌ها:

۱) انرژی الکتریکی، پرکاربردترین شکل انرژی مورد نیاز برای استفاده از فناوری‌های مختلف بوده و الکتروشیمی شاخه‌ای از علم شیمی است که در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.

۲) اغلب فلزها، در واکنش با نافلزها تمایل دارند یک یا چند الکترون از دست داده و اکسید شوند. اکسیژن یکی از نافلزهای فعال است که به‌عنوان اکسندۀ با اغلب فلزها واکنش می‌دهد. توجه داریم که اکسیژن با برخی فلزها که واکنش‌پذیری پایینی دارند، مانند طلا و پلاتین، واکنش نمی‌دهد.

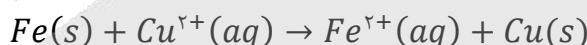
طلا

طلا، یکی از فلزهای نجیب است که معادله نیم‌واکنش کاهشی آن به صورت زیر است:



از آن‌جا که E° این نیم‌واکنش بزرگ‌تر از E° نیم‌واکنش کاهش اکسیژن است، مولکول‌های اکسیژن نمی‌توانند اتم‌های طلا را اکسید کنند و به همین علت، با گذشت زمان فلز طلا در هوای مرطوب و حتی در اعماق دریاها همچنان درخشان باقی می‌ماند و زنگ نمی‌زند. فلز پلاتین نیز همانند طلا در دسته فلزهای نجیب قرار دارد و حتی در محیط‌های اسیدی نیز دچار خوردگی نمی‌شود.

۴) با قرار دادن یک قطعه آهن در محلول مس (II) سولفات، با گذشت زمان واکنش زیر انجام می‌شود:



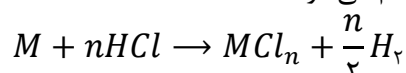
با انجام شدن این واکنش، یون‌های آبی‌رنگ مس به صورت رسوب درآمده و از محلول خارج می‌شوند، اما یون‌های سبزرنگ آهن (II) تولید شده و وارد محلول می‌شوند، پس می‌توان گفت طی این فرایند، یک محلول سبزرنگ ایجاد می‌شود. توجه داریم که یون‌های آهن (II) آهن (III)، در محلول‌های آبی به ترتیب رنگ‌های سبز و زرد را ایجاد می‌کنند.



۷۴- کدام یک از مطالب زیر درست است؟

- ۱) در واکنش هیدروکلریک اسید با فلزها، یون کلرید نقشی در فرایند اکسایش-کاهش ندارد.
- ۲) فلز آهن، در مقایسه با فلز آلومینیم، دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار بیشتری افزایش می‌دهد.
- ۳) در سلول روی-مس، آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول مس مهاجرت می‌کنند.
- ۴) ضریب الکترون در نیم‌واکنش تبدیل یون Sn^{4+} به Sn^{2+} ، دو برابر ضریب الکترون در نیم‌واکنش اکسایش یون F^- است.

واکنش فلزها با هیدروکلریک اسید به صورت زیر انجام می‌شود:

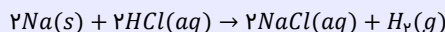


در این واکنش، فلزهایی که چند ظرفیت مختلف دارند، با کمترین ظرفیت خود در واکنش شرکت می‌کنند. برای مثال، آهن دارای ظرفیت‌های ۲+ و ۳+ است، پس در واکنش با اسیدها با ظرفیت ۲+ خود وارد محلول می‌شود. در این واکنش، یون H^+ کاهش یافته و فلز اکسایش می‌یابد؛ بنابراین در این فرایند یون کلرید اکسایش یا کاهش نمی‌یابد و در واکنش شرکت نمی‌کند. می‌توان این واکنش را به صورت زیر نوشت:



واکنش فلزها با اسیدها

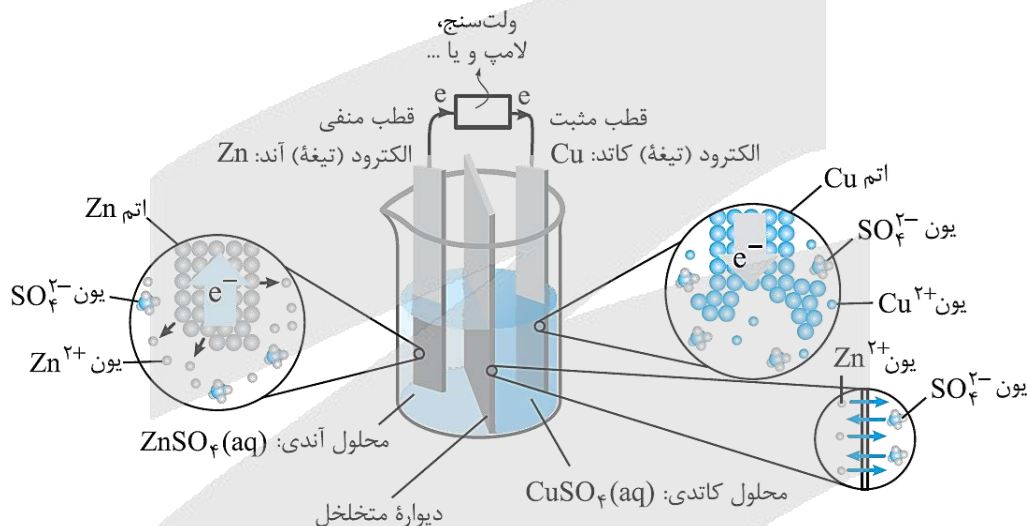
به جز عناصر طلا، پلاتین، جیوه، نقره و مس، سایر فلزها با یون هیدروژن موجود در محلول‌های اسیدی واکنش داده و گاز H_2 آزاد می‌کنند. طی این فرایند، اتم‌های فلزی الکترون از دست داده و به صورت کاتیون‌ها وارد محلول می‌شوند. به عنوان مثال، سدیم طبق معادله زیر با هیدروکلریک اسید واکنش می‌دهد:



توجه داریم که فلزهای موجود در گروه اول (لیتیم، سدیم، پتاسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار +1 وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه دوم (منیزیم، کلسیم، استرانسیم و ...)، در قالب کاتیون‌هایی با بار +2 وارد محلول می‌شوند. فلزهای موجود در گروه ۱۳ (آلومینیم و گالیم) نیز در قالب کاتیون‌هایی با بار +3 وارد محلول می‌شوند. با افزایش واکنش‌پذیری فلز، افزایش غلظت حل‌شونده در محلول اسیدی و یا افزایش قدرت اسید (K_a) موجود در محلول، سرعت واکنش میان فلز با اسید افزایش یافته و گاز هیدروژن با سرعت بیشتری تولید خواهد شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

فلز آهن، در مقایسه با یک قطعه فلز آلومینیم، قدرت کاهندگی (تمایل به اکسید شدن) کمتری داشته و با شدت کمتری در واکنش‌های شیمیایی شرکت می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت فلز آلومینیم دمای محلول مس (II) سولفات را به مقدار بیشتری افزایش می‌دهد. در سلول روی-مس، نیم‌سلول روی در نقش آند بوده و می‌دانیم که در سلول‌های گالوانی و الکترولیتی، آنیون‌ها به سمت تیغه آندی حرکت می‌کنند. بر این اساس، می‌توان گفت در سلول مورد نظر آنیون‌های موجود در الکترولیت از خلال دیواره متخلخل به سمت نیم‌سلول روی مهاجرت می‌کنند. تصویر زیر، نمایی از سلول گالوانی روی-مس را نشان می‌دهد:



واکنش انجام‌شده در سلول گالوانی روی-مس، مشابه همان واکنشی است که با وارد کردن تیغه‌ای از جنس فلز روی به محلول دارای یون‌های مس (II) انجام می‌شود. تنها تفاوت فرایندهای انجام‌شده در آن است که به کمک سلول گالوانی، واکنش مورد نظر در یک شرایط کنترل شده انجام می‌شود و از جریان الکتریکی ایجادشده در آن می‌توانیم به عنوان منبع تولید الکتریسیته استفاده کنیم.

دیواره متخلخل

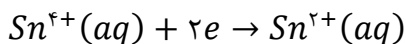
در یک سلول گالوانی، کاتیون‌ها در سمت آند تولید شده و به مرور زمان در الکترولیت آندی تجمع پیدا می‌کنند و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. تجمع بار مثبت در این نیم‌سلول، الکترون‌ها را به سمت خود جذب کرده و از حرکت آن‌ها در مدار خارجی جلوگیری می‌کند. در نیم‌سلول کاتدی نیز به مرور زمان غلظت کاتیون‌ها کاهش پیدا کرده و از تعداد آن‌ها کاسته می‌شود. با ادامه این فرایند، تعداد آنیون‌های موجود در محلول کاتدی بیشتر از تعداد کاتیون‌ها شده و این محلول بار منفی پیدا می‌کند. تجمع بار منفی در نیم‌سلول کاتدی، از تمایل این نیم‌سلول به جذب الکترون کاسته و از حرکت آن‌ها در مدار جلوگیری می‌کند. در این موقعیت، دیواره متخلخل وارد میدان شده و مانع قطع شدن جریان الکتریکی می‌شود. وظایف دیواره متخلخل عبارت هستند از:

۱- جلوگیری از مخلوط شدن سریع و مستقیم الکترولیت‌ها

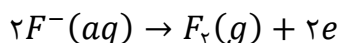
۲- ایجاد توازن بار الکتریکی بین نیم‌سلول‌ها

دیواره متخلخل به کاتیون‌های موجود در الکترولیت آندی اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت کاتدی مهاجرت کنند و به آنیون‌های موجود در الکترولیت کاتدی نیز اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت آندی مهاجرت کنند. به این ترتیب، دیواره متخلخل با به جریان انداختن گونه‌های باردار میان محلول‌های موجود در هر نیم‌سلول، سبب خنثی‌کردن بار الکتریکی آن‌ها می‌شود.

نیم‌واکنش تبدیل یون Sn^{4+} به یون Sn^{2+} به صورت مقابل است:



نیم‌واکنش اکسایش یون F^{-} که منجر به تولید گاز فلوئور می‌شود نیز به صورت مقابل است:



همان‌طور که مشخص است، ضریب الکترون در این نیم‌واکنش‌ها برابر با یکدیگر بوده و معادل ۲ است.



۷۵- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- الف - نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره است.
 ب - اندازه‌گیری پتانسیل هر نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نبوده و این کمیت، باید به‌طور نسبی اندازه‌گیری شود.
 ج - هر مول از گاز هیدروژن وارد شده به نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، بیشتر از ۲۲/۴ لیتر حجم را اشغال می‌کند.
 د - علامت E° فلزهایی که کاهنده‌تر از H_2 هستند، در سری الکتروشیمیایی با نماد مثبت مشخص می‌شود.
- (۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

پاسخ: گزینه ۳ (سخت - مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۴۷ - ۱۲۰۲)

عبارتهای (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

نیروی الکتروموتوری (emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با نماد E° نیز نشان می‌دهند. برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

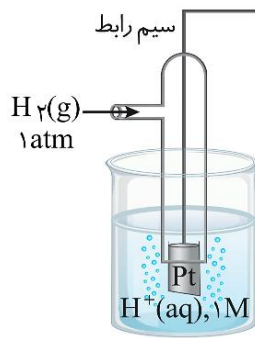
- ✓ نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم.
- ✓ ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند را از E° کاتد کم می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا، اگر کاتد دو سلول گالوانی یکسان باشد، سلولی که E° آند آن کوچک‌تر است، نیروی الکتروموتوری بیشتری نیز خواهد داشت. چون آهن در مقایسه با هیدروژن پتانسیل کاهشی کوچک‌تری دارد، پس می‌توان گفت نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره است.

نیروی الکتروموتوری

سلول‌های گالوانی، مثل باتری عمل کرده و هر سلول، با توجه به ساختار خود دارای یک ولتاژ خروجی معین است که به آن، نیروی الکتروموتوری گفته می‌شود. توجه داریم که مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنانچه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول به‌طور جداگانه ممکن نبوده و باید این کمیت به‌طور نسبی اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، نیم سلول استاندارد هیدروژن (SHE) را به‌عنوان مبنا انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با صفر ولت در نظر گرفتند. تصویر زیر، نمایی از این نیم‌سلول را نشان می‌دهد:





نیم سلول استاندارد هیدروژن

در نیم سلول استاندارد هیدروژن، محلولی با $pH = 0$ (محلولی که غلظت مولی یون هیدروژن در آن برابر با ۱ مول بر لیتر است) قرار داشته و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر بر روی این محلول دمیده می شود. شیمی دان ها با تشکیل سلول گالوانی از هر نیم سلول با نیم سلول استاندارد هیدروژن، توانستند پتانسیل الکتریکی بسیاری از نیم سلول ها را اندازه گیری کرده و در جدولی به نام سری الکتروشیمیایی ثبت کنند.

حجم مواد گازی با دمای آن ها رابطه مستقیم دارد. با افزایش دما، حجم نمونه های گازی افزایش پیدا می کند. پتانسیل الکتریکی نیم سلول استاندارد هیدروژن در دمای 25°C و فشار ۱ اتمسفر اندازه گیری می شود. در شرایط STP (دمای 0°C و فشار ۱ اتمسفر) حجم هر مول از گازها برابر $22/4$ لیتر می شود؛ پس می توان گفت در دمای 25°C و فشار ۱ اتمسفر، حجم هر مول از مواد گازی بیشتر از $22/4$ لیتر می شود.

هر فلزی که کاهنده تر از هیدروژن باشد (در مقایسه با هیدروژن تمایل بیشتری به اکسید شدن (از دست دادن الکترون) داشته باشد)، در سری الکتروشیمیایی در موقعیت پایین تری در مقایسه با هیدروژن قرار می گیرد.

سری الکتروشیمیایی

پتانسیل کاهش استاندارد فلزهایی که در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت پایین تری قرار دارند، منفی است. در نقطه ی مقابل، فلزهایی که در مقایسه با هیدروژن قدرت کاهندگی کمتری دارند (طلا، پلاتین، نقره و مس)، در سری الکتروشیمیایی در مقایسه با هیدروژن در موقعیت بالاتری قرار داشته و پتانسیل کاهش آن ها نیز بزرگ تر از صفر است. توجه داریم که در سری الکتروشیمیایی، نیم واکنش ها به شکل کاهش نوشته شده اند و این پیشنهاد آیوپاک، برای هماهنگی در همه منابع علمی معتبر به کار گرفته می شود. در هر نیم واکنش، گونه کاهنده (گونه ای که الکترون داده و اکسید می شود) در سمت راست و گونه اکسند در سمت چپ نوشته می شود.

۷۶- درصد جرمی مس در آلیاژی از منگنز و مس، برابر ۶۰٪ است. اگر بر اثر واکنش کامل این قطعه با محلول هیدروبرمیک اسید، $8/96L$ گاز در شرایط استاندارد تولید شود، جرم این قطعه برابر با چند گرم است؟ ($Cu = 64, Mn = 55 : g \cdot mol^{-1}$)

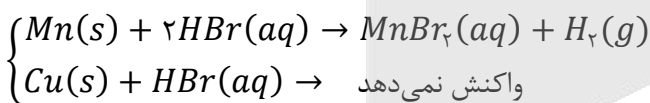
$$E^{\circ}(Cu^{2+}/Cu) = +0/34V \quad E^{\circ}(Mn^{2+}/Mn) = -1/18V$$

۵۵ (۴) ۷۷ (۳) ۲۷/۵ (۲) ۳۸/۵ (۱)

(آسان - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۴۲ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

از آنجا که E° فلزهای منگنز (Mn) و مس (Cu) به ترتیب منفی و مثبت است، بنابراین تنها فلز منگنز (Mn) با اسید واکنش می دهد و فلز مس بدون تغییر باقی می ماند. معادله این واکنش به صورت زیر است:



با استفاده از حجم گاز H_2 آزاد شده، جرم Mn مصرف شده را محاسبه می کنیم:

$$\text{جرم مصرف شده } Mn = 8/96L H_2 \times \frac{1 \text{ mol } H_2}{22/4L H_2} \times \frac{1 \text{ mol } Mn}{1 \text{ mol } H_2} \times \frac{55 \text{ g } Mn}{1 \text{ mol } Mn} = 22 \text{ g}$$

طبق فرض سؤال، درصد جرمی مس در آلیاژ داده شده برابر با ۶۰٪ است. بر این اساس، می توان گفت درصد جرمی منگنز در آلیاژ برابر با $100 - 60 = 40$ درصد است، بنابراین داریم:

$$\text{درصد جرمی منگنز} = \frac{\text{جرم منگنز}}{\text{جرم آلیاژ}} \times 100 \implies \text{جرم آلیاژ} = \frac{\text{جرم منگنز}}{\text{درصد جرمی منگنز}} \times 100 = \frac{22}{40} \times 100 = 55 \text{ g}$$

تصویر زیر، بخشی از سری الکتروشیمیایی که در آن تعدادی از فلزهای کاهنده‌تر از هیدروژن مشخص شده‌اند را نشان می‌دهد:

نیم‌واکنش کاهش			$E^\circ(V)$	
گونه اکسند	الکترون	گونه کاهنده	ولتاژ	
↑ اکسند قوی‌تر	$2H^+(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$H_2(g)$	۰/۰۰
	$Fe^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Fe(s)$	-۰/۴۴
	$Zn^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Zn(s)$	-۰/۷۶
	$Mn^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Mn(s)$	-۱/۱۸
	$Al^{3+}(aq)$	$+3e^- \rightarrow$	$Al(s)$	-۱/۶۶
	$Mg^{2+}(aq)$	$+2e^- \rightarrow$	$Mg(s)$	-۲/۳۷
				↓ کاهنده قوی‌تر

۷۷- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟ ($Zn = ۶۵, Ag = ۱۰۸ : g.mol^{-1}$)

- با قرار گرفتن یک تیغه از جنس روی در محلولی از نقره نیترات، جرم این تیغه فلزی کاهش پیدا می‌کند.
- با کاهش قدرت کاهندگی فلز به کار رفته در آند یک سلول گالوانی، مقدار emf سلول کاهش پیدا می‌کند.
- دیواره متخلخل سلول‌های گالوانی، کمک می‌کند تا محلول‌های آندی و کاتدی از نظر بار الکتریکی خنثی بمانند.
- مقایسه قدرت اکسندگی یون‌های لیتیم، روی، مس و هیدروژن به صورت $Li^+ < Zn^{2+} < H^+ < Cu^{2+}$ است.

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۴۷ - ۱۲۰۲

پاسخ: گزینه ۱

چون فلز روی در مقایسه با نقره کاهنده‌تر بوده و تمایل بیشتری به از دست دادن الکترون دارد، با قرار گرفتن یک تیغه از جنس روی در محلول نقره نیترات، واکنش زیر در محلول انجام می‌شود:



با توجه به معادله این واکنش، به ازای مصرف شدن ۱ مول از اتم‌های روی موجود بر روی تیغه (معادل با ۶۵ گرم روی)، ۲ مول الکترون در سطح تیغه مبادله شده و ۲ مول اتم نقره (معادل با ۲۱۶ گرم نقره) نیز بر روی سطح تیغه رسوب می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت به ازای مبادله هر ۲ مول الکترون در این واکنش، جرم تیغه فلزی به اندازه $۱۵۱ = ۲۱۶ - ۶۵$ گرم افزایش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

نیروی الکتروموتوری در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. برای افزایش مقدار emf یک سلول گالوانی، باید از الکترودهایی استفاده کنیم که مقدار E° آن‌ها بیشترین مقدار تفاوت ممکن را با یکدیگر داشته باشد. در واقع هر چه قدر که E° کاتد سازنده یک سلول گالوانی بیشتر و E° آند سازنده آن کم‌تر باشد، مقدار emf آن سلول بیشتر می‌شود. با کاهش قدرت کاهندگی (افزایش مقدار E°) نیم‌سلول آندی در یک سلول، مقدار emf آن سلول کاهش پیدا می‌کند.

مقدار emf سلول گالوانی

برای پیدا کردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

۱- نیم‌سلول‌های سازنده سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولتسنج اندازه‌گیری می‌کنیم. مقدار emf به دست آمده از این روش، مقدار عملی emf سلول را نشان می‌دهد. در این رابطه داریم:

بازده درصدی سلول \times نظری emf = عملی emf

۲- ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی موردنظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند (الکترودی که E° کوچک‌تری دارد) را از E° کاتد (الکترودی که E° بزرگ‌تری دارد) کم می‌کنیم. بر این اساس، داریم:

$$emf = E^\circ(\text{کاتد}) - E^\circ(\text{آند})$$

توجه داریم که مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است.



۳ در یک سلول گالوانی، به مرور زمان کاتیون‌ها در الکترولیت آندی تجمع پیدا کرده و این محلول بار مثبت پیدا می‌کند. با انجام شدن نیم‌واکنش کاهش در سمت کاتد، تعداد آنیون‌های موجود در محلول کاتدی نیز بیشتر از تعداد کاتیون‌های موجود در آن شده و این محلول بار منفی پیدا می‌کند. دیواره متخلخل به کاتیون‌های موجود در الکترولیت آندی اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت کاتدی مهاجرت کنند و به آنیون‌های موجود در الکترولیت کاتدی نیز اجازه می‌دهد به سمت الکترولیت آندی مهاجرت کنند. به این ترتیب، دیواره متخلخل سبب خنثی کردن بار الکتریکی آن‌ها شده و از تجمع بار الکتریکی در این نیم‌سلول‌ها جلوگیری می‌کند.

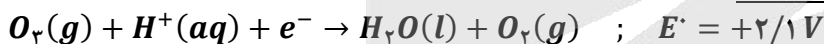
۴ پتانسیل کاهش یون مس بیشتر از هیدروژن و پتانسیل کاهش یون‌های روی و لیتیم کمتر از هیدروژن است. برای مقایسه میان یون‌های لیتیم و روی نیز می‌دانیم که خاصیت فلزی لیتیم از سایر فلزات بیشتر بوده (پتانسیل کاهش لیتیم از سایر فلزات کمتر است) و این عنصر، پتانسیل کاهش کوچک‌تری نسبت به سایر عناصر فلزی دارد. بر این اساس، مقایسه قدرت اکسندگی یون‌های لیتیم، روی، مس و هیدروژن به صورت $Li^+ < Zn^{2+} < H^+ < Cu^{2+}$ است.

لیتیم

لیتیم یک فلز اصلی از دسته s جدول تناوبی بوده و مقدار پتانسیل کاهش استاندارد آن در مقایسه با سایر عناصر فلزی کمتر است. علاوه بر این، چگالی لیتیم نیز نسبت به سایر عناصر فلزی کمتر است. با توجه به ویژگی‌های گفته شده، از فلز لیتیم برای ساخت باتری‌های سبک‌تر، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی استفاده می‌شود. باتری‌های لیتیومی می‌توانند به شکل دگمه‌ای باشند که در شکل‌ها و اندازه‌های گوناگون به کار می‌روند. با افزایش تقاضا برای باتری‌های لیتیومی، این فلز جایگاه ممتازی را در تأمین انرژی جهان پیدا کرده است، به طوری که سالانه از میلیاردها باتری لیتیومی برای ساختن دستگاه‌های الکترونیکی استفاده می‌شود. این دستگاه‌ها سرانجام به همراه باتری‌های به کاررفته در ساختار آن‌ها دور ریخته می‌شوند و به این ترتیب، حجم بزرگی از پسماندهای الکترونیکی تولید می‌شود. این پسماندها به دلیل داشتن مواد شیمیایی گوناگون، سمی بوده و رها کردن آن‌ها در طبیعت موجب آلودگی محیط زیست می‌شود. از طرف دیگر، در برخی از این پسماندها مقدار قابل توجهی از مواد و فلزهای ارزشمند و گران‌قیمت وجود دارد که آن‌ها را به منبع مناسبی برای بازیافت تبدیل می‌کند.



۷۸- در یک سمت از سلول گالوانی مقابل، نیم‌واکنش موازنه نشده زیر انجام می‌شود:



اگر تیغه دیگر این سلول از جنس فلز روی باشد، به ازای مصرف ۶/۵ گرم از این فلز، چند الکترون در مدار خارجی سلول جاری شده و تفاوت جرم گاز تولید و مصرف شده در سمت کاتد برابر با چند

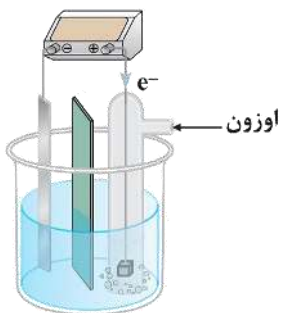
گرم می‌شود؟ ($Zn = 65, O = 16 ; g.mol^{-1}$)

(۱) $1/6 - 1/20.4 \times 10^{23}$

(۲) $3/2 - 1/20.4 \times 10^{23}$

(۳) $1/6 - 2/40.8 \times 10^{23}$

(۴) $3/2 - 2/40.8 \times 10^{23}$



(سخت - محاسباتی - زمان بر ۲۰ - صفحه ۴۵ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۱

مراحل حل این سؤال، به صورت خلاصه به شرح زیر هستند:

محاسبه تعداد الکترون تولید شده در نیم‌واکنش آندی بر اثر اکسایش فلز روی

گام اول

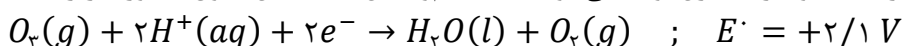
محاسبه جرم گاز اوزون مصرف شده و جرم گاز اکسیژن تولید شده

گام دوم

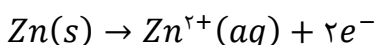
به دست آوردن تفاوت جرم گازها در نیم‌واکنش کاتدی

گام سوم

چون پتانسیل کاهش روی کمتر از اوزون است، پس می‌توان گفت گاز اوزون در سمت کاتد مصرف شده و فلز روی، در سمت آند مصرف می‌شود. طبق فرض سؤال، در سمت کاتد این سلول گاز اوزون مصرف شده و گاز اکسیژن تولید می‌شود. معادله نیم‌واکنش کاتدی این سلول به صورت زیر است:



در سمت آند این سلول، فلز روی اکسایش پیدا کرده و الکترون تولید می‌کند. معادله نیم‌واکنش آندی انجام شده در این سلول به صورت زیر است:





طبق فرض سؤال، در سمت آند این سلول ۶/۵ گرم فلز روی مصرف شده است. بر این اساس، مقدار الکترون تولید شده در سمت آند این سلول که وارد مدار خارجی شده است را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{شمار } e^- = 6/5 \text{ g Zn} \times \frac{1 \text{ mol Zn}}{65 \text{ g Zn}} \times \frac{2 \text{ mol } e^-}{1 \text{ mol Zn}} \times \frac{6/0.2 \times 10^{23} e^-}{1 \text{ mol } e^-} = 1/2.04 \times 10^{23} e^-$$

با توجه به معادله نیم‌واکنش کاتدی این سلول، به ازای هر ۲ مول الکترون مصرف شده، یک مول اوزون مصرف شده و یک مول گاز اکسیژن تولید می‌شود. بر این اساس، جرم اوزون مصرف شده و جرم اکسیژن تولید شده را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g } O_3 = 1/2.04 \times 10^{23} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6/0.2 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol } O_3}{2 \text{ mol } e^-} \times \frac{48 \text{ g } O_3}{1 \text{ mol } O_3} = 4/8 \text{ g}$$

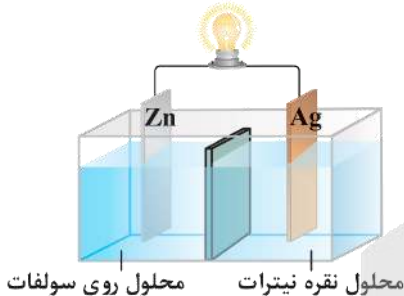
$$? \text{ g } O_2 = 1/2.04 \times 10^{23} e^- \times \frac{1 \text{ mol } e^-}{6/0.2 \times 10^{23} e^-} \times \frac{1 \text{ mol } O_2}{2 \text{ mol } e^-} \times \frac{32 \text{ g } O_2}{1 \text{ mol } O_2} = 3/2 \text{ g}$$

با توجه به محاسبات فوق، تفاوت جرم گاز اوزون مصرف شده و جرم گاز اکسیژن تولید شده برابر با ۱/۶ گرم است.



۷۹- در سلول مقابل، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه جابه‌جا شده و اگر نیم‌سلول نقره را با نیم‌سلولی از

جنس جایگزین کنیم، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی برعکس می‌شود.



(۱) نقره - آهن

(۲) روی - آهن

(۳) نقره - منیزیم

(۴) روی - منیزیم

(آسان - مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۴۶ - ۱۲۰۲)

پاسخ: گزینه ۴

در یک سلول گالوانی، آنیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه آندی و کاتیون‌های موجود در محلول الکترولیت به سمت تیغه کاتدی حرکت می‌کنند. چون پتانسیل کاهش استاندارد فلز نقره بیشتر از روی است، پس تیغه نقره در نقش کاتد (قطب مثبت) و تیغه روی در نقش آند (قطب منفی) است و آنیون‌های موجود در محلول نیز به سمت تیغه روی حرکت می‌کنند. مقایسه مقدار پتانسیل کاهش استاندارد فلزهای داده شده در سؤال، به صورت زیر است:

$$Ag > Fe > Zn > Mg$$

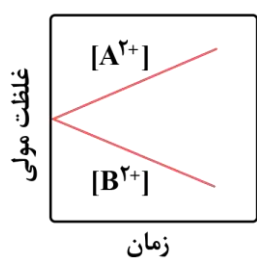
با توجه به مقایسه بالا، اگر بجای نیم‌سلول نقره، نیم‌سلول منیزیم را قرار بدهیم، جای آند و کاتد این سلول برعکس شده و تیغه روی در نقش کاتد قرار می‌گیرد. با انجام این کار، جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی برعکس می‌شود.

نیم‌سلول

برای اینکه بتوانیم نیم‌واکنش‌های کاهش و یا اکسایش مربوط به یک عنصر را در یک محیط مستقل انجام بدهیم، باید یک نیم‌سلول را ایجاد کنیم. با قراردادن یک تیغه فلزی در محلولی که حاوی کاتیون‌های آب‌پوشیده آن فلز باشد، یک نیم‌سلول ایجاد می‌شود. به عنوان مثال، اگر یک تیغه مس را در محلول مس(II) سولفات قرار بدهیم، نیم‌سلولی از مس ایجاد می‌شود.



۸۰- با توجه به نمودار مقابل که تغییر غلظت یون‌ها در یک سلول گالوانی را نشان می‌دهد، کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟



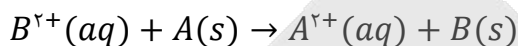
(۱) در این سلول، الکترودهای A و B می‌توانند به ترتیب روی و مس باشند.

(۲) جهت حرکت آنیون‌ها در این سلول، از سمت نیم‌سلول B به سمت نیم‌سلول A است.

(۳) در این سلول با گذشت زمان، مجموع شمار کاتیون‌ها در محلول‌ها افزایش پیدا می‌کند.

(۴) قدرت اکسندگی کاتیون‌های A^{2+} کمتر از قدرت اکسندگی کاتیون‌های B^{2+} است.

در سمت آند سلول گالوانی، نیم‌واکنش اکسایش انجام شده و غلظت کاتیون در محلول موجود در نیم‌سلول آندی به تدریج افزایش پیدا می‌کند. در نقطه مقابل، در سمت کاتد این سلول‌ها نیم‌واکنش کاهش انجام شده و غلظت کاتیون در محلول کاتدی به تدریج کاهش پیدا می‌کند. با توجه به نمودار داده شده، کاتیون حاصل از فلز A در حال تولید شدن بوده و کاتیون حاصل از فلز B نیز در حال مصرف شدن است. بر این اساس، می‌توان گفت یون‌های B^{2+} و A^{2+} به ترتیب در سمت چپ و راست واکنش کلی سلول قرار دارند و ضرایب استوکیومتری آن‌ها نیز یکسان است. با توجه به توضیحات داده شده، واکنش کلی سلول به صورت زیر می‌شود:



فرض کنید که غلظت اولیه کاتیون‌های A^{2+} و B^{2+} به ترتیب n و m باشد. بر این اساس، داریم:

واکنش کلی سلول گالوانی	$B^{2+}(aq)$	+	$A(s)$	\rightarrow	$B(s)$	+	$A^{2+}(aq)$
مقدار مول اولیه یون‌ها	m		-		-		n
مقدار مول یون‌ها پس از انجام واکنش	$m - x$		-		-		$n + x$

بنابراین مجموع مقدار مول کاتیون‌ها در ابتدا و انتهای واکنش سلول ثابت و برابر با $m + n$ است.

بررسی سایر گزینه‌ها:

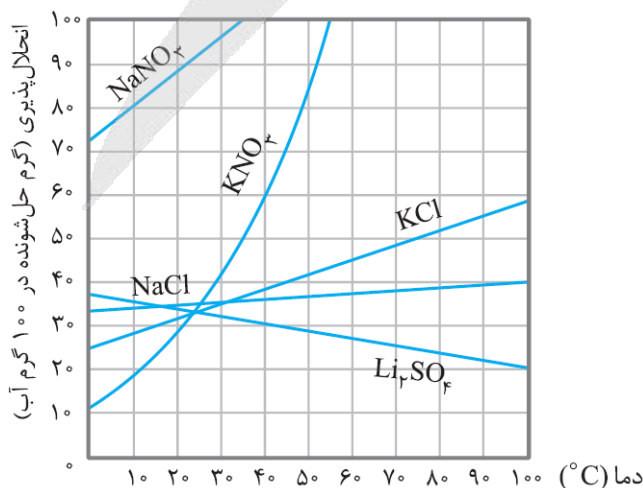
- ۱) در این سلول، تیغه فلزی A آند و تیغه فلزی B کاتد است و بار کاتیون‌های آن‌ها $+2$ است. در سلول روی-مس نیز فلز روی در نقش آند و فلز مس در نقش کاتد است و بار کاتیون‌های آن‌ها به ترتیب برابر با $+2$ و $+2$ است.
- ۲) جهت حرکت آنیون‌ها از سمت نیم‌سلول کاتدی (نیم‌سلول B) به سمت نیم‌سلول آندی (نیم‌سلول A) است.
- ۳) در واکنش کلی سلول، یون B^{2+} کاهش یافته و اتم A اکسایش می‌یابد؛ بنابراین قدرت اکسندگی کاتیون‌های A^{2+} کمتر از قدرت اکسندگی کاتیون‌های B^{2+} است.



۸۱ - کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- ۱) خون، محلولی با $pH > 7$ بوده و هنگام بیماری، توازن غلظت برخی از گونه‌های موجود در آن به هم می‌خورد.
- ۲) با افزایش دمای یک نمونه از آب، انحلال‌پذیری پتاسیم نیترات در این ماده به صورت خطی افزایش پیدا می‌کند.
- ۳) در فرایند انجماد، حجم آب افزایش پیدا کرده و شمار پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌های آب افزایش می‌یابد.
- ۴) نیاز روزانه بدن هر فرد بالغ به یون سدیم، نزدیک به نصف نیاز آن به کاتیون حاصل از سومین فلز قلیایی است.

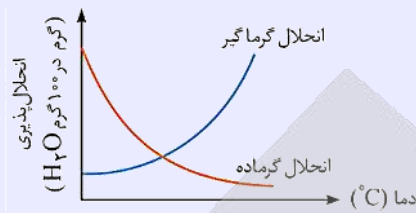
با افزایش دمای آب، انحلال‌پذیری اغلب نمک‌ها در آب مثل پتاسیم نیترات افزایش پیدا می‌کند. توجه داریم که انحلال‌پذیری این ماده در آب به صورت غیرخطی (نمودار منحنی با شیب متغیر) افزایش پیدا می‌کند. نمودار انحلال‌پذیری این نمک در آب به صورت زیر است:





نمودار انحلال پذیری

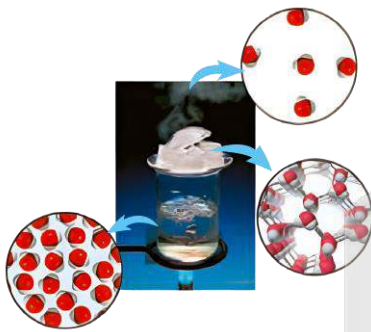
تغییر دما، از عوامل مؤثر بر تغییر مقدار انحلال پذیری مواد است. افزایش دما، می‌تواند موجب افزایش مقدار انحلال پذیری برخی از مواد شده و در نقطه مقابل، می‌تواند موجب کاهش مقدار انحلال پذیری مواد دیگر شود. با توجه به نمودار انحلال پذیری مواد، می‌توان در رابطه با مبادله گرما طی فرایند انحلال نمک و نوع محلول مورد نظر را از نظر سیرشدگی اطلاعاتی را به دست آورد. در این رابطه، داریم:



با توجه به نمودار بالا، موادی که انحلال گرماگیر دارند، با افزایش دمای محلول به مقدار بیشتری در آب حل خواهند شد.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) خون، محلولی با خاصیت بازی بوده و مقدار pH یک نمونه از آن از عدد ۷ بزرگ‌تر است. در هنگام بیماری، توازن غلظت برخی از گونه‌های موجود در خون به هم می‌خورد. از این رو، انجام آزمایش‌های پزشکی و تعیین غلظت گونه‌های موجود در خون و دیگر محلول‌های بدن از ضروری‌ترین کارها در مراکز درمانی برای رسیدگی به یک بیمار است.



۳) در فرایند انجماد، آرایش و چینش مولکول‌ها به صورت منظم درآمده و به خاطر فضای خالی ایجاد شده بین مولکول‌های آب، حجم افزایش پیدا می‌کند. طی این فرایند، شمار پیوندهای هیدروژنی بین مولکول‌ها نیز افزایش یافته و به ۴ عدد به ازای هر مولکول آب می‌رسد. در واقع در حالت گاز، بین مولکول‌های آب تقریباً هیچ پیوند هیدروژنی وجود ندارد؛ اما در حالت مایع، به‌طور میانگین هر مولکول تقریباً توسط ۲ پیوند هیدروژنی و در حالت جامد نیز هر مولکول توسط ۴ پیوند هیدروژنی به سایر مولکول‌های آب موجود در اطراف خود متصل است. تصویر مقابل، نشان‌دهنده وضعیت مولکول‌های آب در سه حالت فیزیکی مختلف است.

۴) یکی از مهم‌ترین یون‌ها در الکترولیت‌های بدن، یون پتاسیم (کاتیون حاصل از سومین فلز قلیایی) است. در واقع، نیاز روزانه بدن هر فرد بالغ به یون پتاسیم دو برابر یون سدیم است. از آنجا که بیشتر مواد غذایی حاوی یون پتاسیم هستند، کمبود این یون به‌ندرت احساس می‌شود.

یون پتاسیم

یکی از مهم‌ترین یون‌های موجود در الکترولیت‌های بدن، یون پتاسیم (K^+) است. نیاز روزانه بدن ما به یون پتاسیم، دو برابر یون سدیم است. از آنجا که بیشتر مواد غذایی حاوی یون پتاسیم هستند، کمبود این یون به‌ندرت در بدن احساس می‌شود. وجود یون پتاسیم برای تنظیم و عملکرد مناسب دستگاه عصبی بسیار ضروری است؛ به‌طوری‌که انتقال پیام‌های عصبی بدون وجود این یون، امکان‌پذیر نیست. در واقع، اختلال در حرکت این یون از خلال غشای سلول‌های عصبی، مانع از انتقال پیام‌های عصبی و گاهی در موارد شدید منجر به مرگ می‌شود.



۸۲- اگر سدیم نیترات و نقره نیترات را در شرایط خاصی به‌صورت هم‌زمان در آب حل کنیم، انحلال‌پذیری آن‌ها به‌ترتیب برابر با ۱۰۲ و ۳۰۶ گرم در ۱۰۰ گرم آب می‌شود. در محلول سیرشده حاصل از این فرایند، درصد جرمی نقره نیترات چند برابر سدیم نیترات شده

و غلظت مولی یون نیترات چند برابر یون سدیم می‌شود؟ ($g \cdot mol^{-1}$: $N = 14$, $O = 16$, $Na = 23$, $Ag = 108$)

۲/۵ - ۳ (۴)

۵ - ۳ (۳)

۲/۵ - ۲ (۲)

۵ - ۲ (۱)

(متوسط - محاسباتی - استاندارد - صفحه ۱۰۱ - ۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

طبق فرض سؤال، در شرایط داده شده انحلال‌پذیری سدیم نیترات و نقره نیترات به‌ترتیب برابر با ۱۰۲ و ۳۰۶ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. فرض می‌کنیم که ۱۰۰ گرم آب در اختیار داریم. در این حالت، ۱۰۲ گرم سدیم نیترات و ۳۰۶ گرم نقره نیترات در آب حل شده و یک محلول سیرشده از دو نمک به دست می‌آید. در رابطه با این محلول، داریم:

$$\text{جرم محلول} = \text{جرم آب} + \text{جرم سدیم نیترات} + \text{جرم نقره نیترات} = 100 + 102 + 306 = 508 \text{ g}$$



با توجه به جرم محلول و جرم هریک از نمک‌های حل شده در آن، درصد جرمی این دو نمک را با یکدیگر مقایسه می‌کنیم:

$$\frac{\text{جرم نقره نیترات}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{30.6}{50.8} \times 100 = 60.2\%$$

$$\frac{\text{جرم سدیم نیترات}}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{10.2}{50.8} \times 100 = 20.1\%$$

برابر ۳ = $\frac{30.6}{50.8} \times 100 = \frac{10.2}{50.8} \times 100$

در قدم بعد، مقدار مول سدیم نیترات (NaNO_3) و نقره نیترات (AgNO_3) وارد شده به محلول مورد نظر را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ mol NaNO}_3 = 10.2 \text{ g NaNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol NaNO}_3}{85 \text{ g NaNO}_3} = 1/8 \text{ mol}$$

$$? \text{ mol AgNO}_3 = 30.6 \text{ g AgNO}_3 \times \frac{1 \text{ mol AgNO}_3}{170 \text{ g AgNO}_3} = 1/8 \text{ mol}$$

طی این فرایند، ۱/۲ مول سدیم نیترات و ۱/۸ مول نقره نیترات وارد محلول شده است. کاتیون موجود در این دو نمک، متفاوت بوده و هر مول از این نمک‌ها، یک مول کاتیون وارد محلول می‌کنند. بر این اساس، ۱/۲ مول یون سدیم و ۱/۸ مول یون نقره وارد محلول شده است. این در حالی است که آنیون موجود در این دو نمک، مشترک بوده و مجموعاً $1/2 + 1/8 = 3/8$ مول از آن وارد محلول شده است. چون مقدار مول یون نیترات وارد شده به محلول ۲/۵ برابر مقدار مول یون سدیم است، پس می‌توان گفت غلظت این یون در محلول نیز ۲/۵ برابر غلظت یون سدیم است.



۸۲- اگر معادله انحلال‌پذیری (S) یک نمک بر حسب دما (θ) به صورت $S = -0.2\theta + 44$ باشد، بر اثر گرم کردن 420 g محلول سیرشده این نمک از دمای 20°C تا دمای 50°C ، چند گرم رسوب تشکیل شده و درصد جرمی محلول نهایی ایجاد شده طی این فرایند تقریباً چقدر است؟

$$28/5 - 18 \quad (4)$$

$$28/5 - 12 \quad (3)$$

$$25/3 - 18 \quad (2)$$

$$25/3 - 12 \quad (1)$$

(متوسط - محاسباتی - استاندارد) - صفحه ۱۰۳ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

ابتدا با استفاده از رابطه داده شده در صورت سؤال، انحلال‌پذیری نمک مورد نظر را در دماهای 20°C و 50°C به دست می‌آوریم:

$$20^\circ\text{C} \text{ دمای } S = -0.2(20) + 44 = 40$$

$$50^\circ\text{C} \text{ دمای } S = -0.2(50) + 44 = 34$$

معادله انحلال‌پذیری

از معادله انحلال‌پذیری می‌توان برای نشان دادن روند تغییر مقدار انحلال‌پذیری بر حسب تغییر دما استفاده کرد. برای موادی که نمودار انحلال‌پذیری - دما برای آن‌ها خطی است، می‌توان معادله انحلال‌پذیری را به صورت زیر نوشت:

$$S = a\theta + b$$

در این معادله θ و S به ترتیب بیانگر دما و انحلال‌پذیری هستند و مؤلفه‌های a و b نیز به ترتیب شیب خط و عرض از مبدأ آن را نشان می‌دهند. برای محاسبه مقدار شیب خط در معادله مورد نظر، داریم:

$$a = \frac{S_2 - S_1}{\theta_2 - \theta_1}$$

هرچه مقدار قدر مطلق a بزرگ‌تر باشد، تأثیر دما بر مقدار انحلال‌پذیری نمک مورد نظر بیشتر می‌شود. اگر در معادله انحلال‌پذیری شیب خط (a) مثبت باشد، انحلال نمک مورد نظر در آب گرماگیر بوده و اگر شیب خط منفی باشد، انحلال نمک مورد نظر در آب گرماده است.

بنابراین اگر دمای $140 = 40 + 100$ گرم محلول را از 20°C به 50°C برسانیم، مقدار $6 = 40 - 34$ گرم رسوب تشکیل می‌شود. حالا حساب می‌کنیم بر اثر گرم کردن 420 g محلول، چند گرم رسوب تشکیل می‌شود:

$$\text{رسوب } 6 \text{ g} \times \frac{420 \text{ g محلول}}{140 \text{ g محلول}} = 18 \text{ g رسوب}$$



مقدار انحلال پذیری نمک در حالت نهایی، برابر با ۳۴ گرم در ۱۰۰ گرم آب است. بر این اساس، می توان گفت اگر ۳۴ گرم نمک را در ۱۰۰ گرم آب حل کنیم، ۱۳۴ گرم محلول سیر شده به دست می آید؛ پس داریم:

$$\text{مقدار انحلال پذیری} = \frac{\text{مقدار انحلال پذیری}}{\text{مقدار انحلال پذیری} + ۱۰۰} \times ۱۰۰ = \frac{۳۴}{۱۰۰ + ۳۴} \times ۱۰۰ \approx ۲۵/۳$$



۸۴- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

- الف - یک نمونه از گاز فلوئور، در مقایسه با نمونه ای از گاز هیدروژن کلرید، در دمای بالاتری به حالت مایع درمی آید.
 ب - ید، برخلاف گوگرد دی اکسید، از مولکولهای ناقطبی تشکیل شده و در دمای اتاق، به حالت جامد یافت می شود.
 ج - هگزان یک مایع بی رنگ بوده و در صورت افزودن مقداری از آن به آب، نمونه هگزان روی سطح آب قرار می گیرد.
 د - مولکول کربن دی اکسید، همانند ذرات آب و H_2S ، قطبی بوده و در حضور میدان الکتریکی جهت گیری پیدا می کند.
- (۱) «الف» و «ب» (۲) «ب» و «ج» (۳) «ج» و «د» (۴) «الف» و «د»

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۹ - ۱۰۳

پاسخ: گزینه ۲

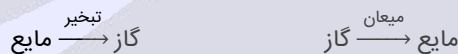
عبارتهای (ب) و (ج) درست هستند.

بررسی موارد:

الف) جرم مولی گازهای فلوئور و هیدروژن کلرید تقریباً با هم برابر است؛ اما چون گاز هیدروژن کلرید در مقایسه با گاز فلوئور گشتاور دوقطبی بیشتری دارد، دمای جوش این گاز بیشتر از دمای جوش فلوئور بوده و بر این اساس، یک نمونه از گاز فلوئور، در مقایسه با نمونه ای از گاز هیدروژن کلرید، در دمای پایین تری از حالت گاز میعان یافته و به حالت مایع درمی آید.

ب) دمای جوش

تبخیر، معادل با تغییر حالت یک ماده از مایع به گاز بوده و میعان، معادل با تغییر حالت یک ماده از گاز به مایع است. در این رابطه داریم:



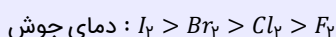
دمایی که در آن یک ماده بین حالت های گاز و مایع تغییر حالت می دهد را دمای جوش آن ماده می گویند. برای مثال، دمای جوش آب، معادل با 100°C است. برای اینکه یک ماده مولکولی مثل آب از حالت مایع به حالت گاز در بیاید، باید نیروهای بین مولکولی در آن شکسته شود تا ذرات آن ماده بتوانند به آسانی در محیط جابه جا شوند. بر این اساس، می توان گفت با افزایش قدرت نیروهای بین مولکولی، انرژی لازم برای شکستن این نیروها بیشتر شده و دمای جوش آن ماده افزایش پیدا می کند.

پ)

ید، برخلاف گوگرد دی اکسید، از مولکولهای ناقطبی تشکیل شده است و در دمای اتاق، به حالت جامد (S) یافت می شود. در واقع چون جرم مولی ید خیلی زیاد است، قدرت نیروهای وان دروالسی بین مولکولهای این ماده به حدی زیاد می شود که ماده مورد نظر در دمای اتاق، به حالت جامد وجود دارد.

هالوژن ها

هالوژن ها (عناصر موجود در گروه ۱۷ جدول دوره ای)، از مولکولهای دواتمی ساخته شده و ذرات سازنده آنها ناقطبی است. با افزایش جرم مولی هالوژن ها، قدرت نیروهای وان دروالسی افزایش یافته و بر این اساس، دمای جوش آنها بیشتر می شود. مقایسه دمای جوش این مواد به صورت زیر است:



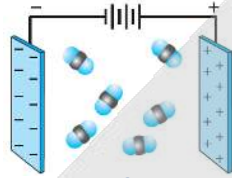
یک نمونه از ید در دمای اتاق به حالت جامد، یک نمونه از برم در دمای اتاق به حالت مایع و یک نمونه از کلر و فلوئور نیز در دمای اتاق به حالت گاز هستند. توجه داریم که برم (Br_2)، تنها نافلز است که در دمای اتاق حالت مایع دارد.

ج)

هگزان با فرمول شیمیایی C_6H_{14} ، یک مایع بی رنگ بوده و به خاطر ناقطبی بودن، به عنوان حلال مواد ناقطبی و رقیق کننده رنگ کاربرد دارد. چون هگزان در مقایسه با آب چگالی کمتری دارد، در صورت افزودن مقداری از آن به آب، نمونه هگزان روی سطح آب قرار می گیرد. توجه داریم که علاوه بر هگزان، گشتاور دو قطبی اغلب هیدروکربن ها ناچیز و در حدود صفر است.



در مولکول‌های کربن دی‌اکسید، هیچ الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی وجود نداشته و اتم‌های قرار گرفته در کنار اتم مرکزی نیز یکسان هستند؛ پس مولکول‌های این ماده متقارن بوده و گشتاور دوقطبی آن‌ها برابر با صفر است. بر این اساس، مولکول‌های کربن دی‌اکسید، برخلاف مولکول‌های آب و H_2S ، ناقطبی بوده و در حضور میدان الکتریکی جهت‌گیری پیدا نمی‌کنند. تصویر زیر، نمایی از مولکول‌های کربن دی‌اکسید در یک میدان الکتریکی را نشان می‌دهد:



••• i/o •••

۸۵- کدام یک از مطالب داده شده درست است؟

- (۱) تفاوت انحلال‌پذیری لیتیم سولفات و سدیم نیترات در آب در دمای $20^{\circ}C$ ، کمتر از این مقدار در دمای $40^{\circ}C$ است.
- (۲) سدیم کلرید، فقط با روش شیمیایی از آب دریا جدا شده و از آن در تولید گاز هیدروژن و کلر می‌توان استفاده کرد.
- (۳) برای تبدیل محلول سیرنشده‌ای از لیتیم سولفات به یک محلول سیرشده، می‌توان دمای این محلول را کاهش داد.
- (۴) ترکیب حاصل از فراوان‌ترین یون چند اتمی آب دریا با یون باریم، بیش از $0/01$ گرم در 100 گرم آب حل می‌شود.

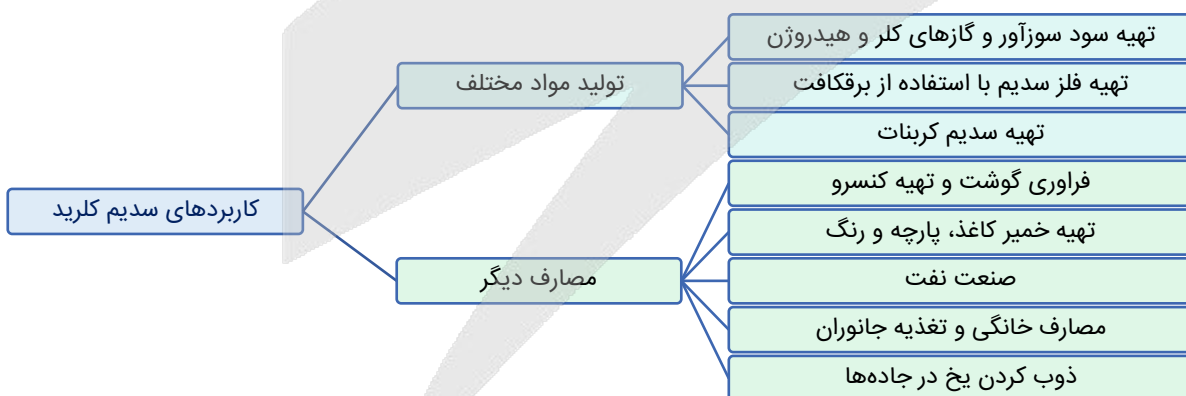
(متوسط - مفهومی و حفظی - استاندارد) - صفحه ۱۰۲ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۱

در دمای $0^{\circ}C$ ، انحلال‌پذیری سدیم نیترات بیشتر از لیتیم سولفات است. با افزایش دمای محلول، انحلال‌پذیری لیتیم سولفات کاهش یافته و انحلال‌پذیری سدیم نیترات افزایش پیدا می‌کند. بر این اساس، می‌توان گفت با افزایش دمای محلول مورد نظر، تفاوت مقدار انحلال‌پذیری لیتیم سولفات و سدیم نیترات افزایش پیدا می‌کند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

سدیم کلرید، با روش‌های فیزیکی (تبلور) از آب دریاها جدا شده و از آن در تهیه و تولید گاز هیدروژن و کلر می‌توان استفاده کرد. استخراج این ماده از آب دریا، بر اساس یک فرایند فیزیکی بوده و تجزیه آن به عناصر سازنده (فلز سدیم و گاز کلر)، نوعی واکنش شیمیایی است. طی فرایند تبلور، آب موجود در محلول را تبخیر کرده و نمک موجود در آن را استخراج می‌کنند. نمودار زیر، کاربردهای سدیم کلرید را نشان می‌دهد.



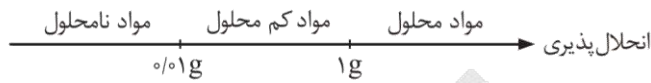
با توجه به نمودار بالا، از نمک خوراکی برای تولید سدیم کربنات، تهیه گاز کلر، تهیه گاز هیدروژن و تهیه سود سوزآور استفاده می‌شود.

چون نمودار انحلال‌پذیری-دما برای نمک لیتیم سولفات نزولی بوده و با افزایش دمای محلول، مقدار انحلال‌پذیری این نمک در آب کاهش پیدا می‌کند، پس می‌توان گفت برای تبدیل محلول سیرنشده‌ای از نمک لیتیم سولفات به یک محلول سیرشده، می‌توان دمای این محلول را افزایش داد. طی این فرایند، جرم آب و نمک موجود در محلول ثابت باقی می‌ماند اما چون به تدریج مقدار انحلال‌پذیری نمک در آب کاهش پیدا می‌کند، محلول مورد نظر به یک محلول سیرشده تبدیل می‌شود. اگر دما به مقدار بیشتری افزایش پیدا کند، حتی می‌توان یک محلول فراسیرشده تهیه کرد.

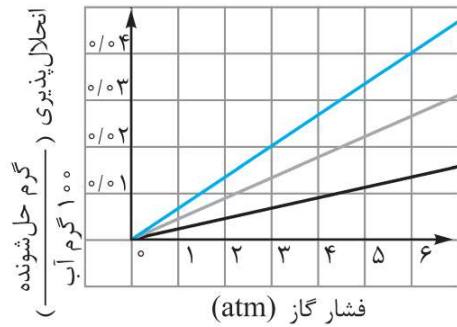


۴

فراوان ترین آنیون چند اتمی موجود در آب دریا یون سولفات است که با یون باریم ترکیب $BaSO_4$ را می سازد که نامحلول بوده و کمتر از $0/01$ گرم در 100 گرم آب حل می شود. همان طور که می دانید، شیمی دان ها مواد حل شونده جامد را براساس میزان انحلال پذیری در آب و دمای اتاق به صورت زیر دسته بندی می کنند:



توجه داریم که انحلال پذیری مواد مختلف در آب را بر حسب مقیاس های جرمی دیگر نیز می توان بیان کرد. برای مثال، می توان گفت انحلال پذیری باریم سولفات در آب، کمتر از $0/1$ گرم در 1 کیلوگرم آب و یا کمتر از 10 میلی گرم در 100 گرم آب است.



۸۶- نمودار مقابل، روند تغییر انحلال پذیری سه گاز O_2 ، N_2 و NO بر حسب تغییر فشار در آب را نشان می دهد. مقدار عددی غلظت مولی گاز O_2 در محلول سیر شده این ماده در فشار $36 atm$ ، برابر با تفاوت مقدار انحلال پذیری گازهای نیتروژن و نیتروژن مونوکسید در چه فشاری است؟ ($O = 16 g \cdot mol^{-1}$)

۱۱/۲۵ (۲)

۷/۵ (۱)

۱۲/۵ (۴)

۶/۲۵ (۳)

سخت - محاسباتی - زمان بر (۱۱۵ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۲

طبق قانون هنری، انحلال پذیری گازهایی که با آب واکنش نمی دهند، با فشار گاز رابطه مستقیم و خطی دارد. نمودار زیر، بیانی از قانون هنری را در رابطه با چند گاز مختلف نشان می دهد:



انحلال پذیری گازها در آب با قطبیت آن ها و همچنین جرم مولی آن ها رابطه مستقیم دارد. نیتروژن مونوکسید و اکسیژن، جرم مولی نزدیک به هم دارند در حالی که نیتروژن مونوکسید قطبی و گاز اکسیژن ناقطبی است. پس انحلال پذیری نیتروژن مونوکسید در آب، بیشتر از انحلال پذیری اکسیژن است. از طرفی هر دو گاز نیتروژن و اکسیژن ناقطبی هستند. در این بین، جرم مولی گاز اکسیژن بالاتر از جرم مولی گاز نیتروژن بوده و انحلال پذیری آن در آب نیز بیشتر است، پس می توان گفت مقایسه انحلال پذیری این سه گاز در شرایط یکسان، به صورت زیر است:

$$S_{NO} > S_{O_2} > S_{N_2}$$

طبق نمودار، انحلال پذیری گاز اکسیژن در فشار $4/5 atm$ برابر $0/02$ گرم در 100 گرم آب است. می توان نتیجه گرفت انحلال پذیری آن در فشار $36 atm$ برابر با $0/16$ گرم ($0/02 \times \frac{36}{4/5}$) در 100 گرم آب خواهد بود. غلظت مولی گاز اکسیژن، معادل با مقدار مول از این ماده است که در یک لیتر آب حل می شود. بر این اساس، مقدار عددی غلظت مولی گاز اکسیژن را در این شرایط محاسبه می کنیم:

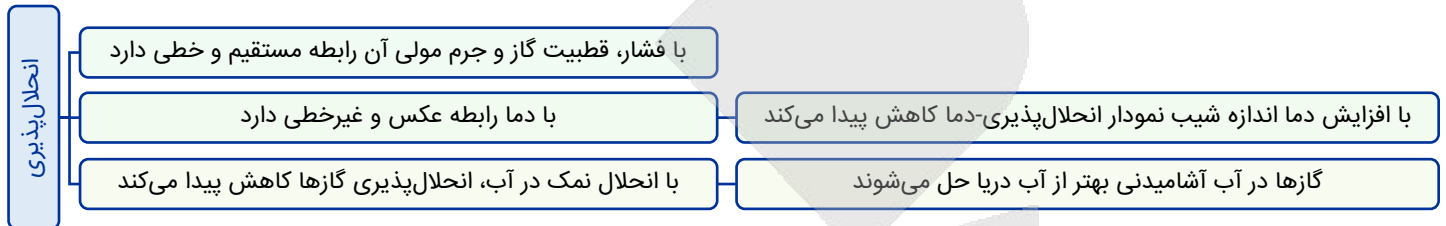
$$? mol O_2 = 1 L \text{ محلول} \times \frac{1000 mL \text{ محلول}}{1 L \text{ محلول}} \times \frac{1 g \text{ محلول}}{1 mL \text{ محلول}} \times \frac{0/16 g O_2}{100 g \text{ محلول}} \times \frac{1 mol O_2}{32 g O_2} = 0/05 mol$$



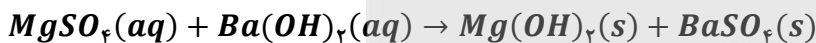
حال باید فشاری را پیدا کنیم که در آن، تفاوت انحلال پذیری دو گاز نیتروژن و نیتروژن مونوکسید برابر 0.05 گرم در 100 گرم آب است. مقدار تفاوت انحلال پذیری دو گاز، با اندازه فشار رابطه مستقیم و خطی دارد. در فشار $4/5 atm$ ، تفاوت انحلال پذیری دو گاز در آب تقریباً برابر 0.02 گرم در 100 گرم آب است. حال با یک تناسب ساده، به فشار مدنظر طراح می‌رسیم. در این رابطه، داریم:

تفاوت انحلال پذیری	فشار	$x = \frac{0.05 \times 4/5}{0.02} = 11/25 atm$
0.02	$4/5$	
0.05	x	

در رابطه با مقدار انحلال پذیری گازها در آب، داریم:



۸۷- محلول‌های مجزایی از منیزیم سولفات و سدیم هیدروکسید با درصد جرمی و چگالی برابر در اختیار داریم. اگر غلظت کاتیون در محلول اول به اندازه $0.8 mol.L^{-1}$ کمتر از غلظت کاتیون در محلول دوم باشد، هر لیتر از محلول منیزیم سولفات با چند لیتر محلول 0.2 مولار باریم هیدروکسید به طور کامل واکنش داده و در این فرایند، مجموعاً چند مول ماده رسوبی در کف ظرف ایجاد می‌شود؟ ($S = 32, Mg = 24, O = 16, N = 14, H = 1 : g.mol^{-1}$)



$0.8 - 2$ (۴)

$0.8 - 4$ (۳)

$0.4 - 2$ (۲)

$0.4 - 4$ (۱)

(سخت - محاسباتی - زمان بر ۶ - صفحه ۹۹ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

فرمول شیمیایی منیزیم سولفات و سدیم هیدروکسید به ترتیب به صورت $MgSO_4$ و $NaOH$ است. درصد جرمی نمک در هر محلول را برابر با a درصد و چگالی هر محلول را نیز برابر با d در نظر می‌گیریم. بر این اساس، داریم:

$$\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times 10 = \frac{\text{غلظت مولی}}{\text{جرم مولی}} \Rightarrow \begin{cases} [MgSO_4] = \frac{10 \times a \times d}{120} = \frac{ad}{12} mol.L^{-1} \\ [NaOH] = \frac{10 \times a \times d}{40} = \frac{ad}{4} mol.L^{-1} \end{cases}$$

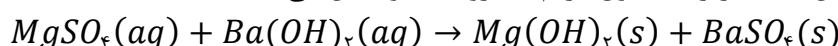
با توجه به محاسبات بالا، غلظت منیزیم سولفات در محلول اول برابر با $\frac{ad}{12}$ مول بر لیتر است، پس غلظت مولی یون منیزیم نیز در این محلول برابر با $\frac{ad}{12}$ می‌شود. در محلول دوم نیز غلظت مولی سدیم هیدروکسید برابر با $\frac{ad}{4}$ مول بر لیتر است، پس غلظت مولی یون سدیم نیز در این محلول آبی برابر با $\frac{ad}{4}$ می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$[Na^+] - [Mg^{2+}] = 0.8 mol.L^{-1} \Rightarrow \frac{ad}{4} - \frac{ad}{12} = 0.8 \Rightarrow \frac{ad}{6} = 0.8 \Rightarrow ad = 4/8$$

با توجه به مقدار ad ، می‌توان گفت غلظت محلول منیزیم سولفات برابر با 0.4 مول بر لیتر و غلظت محلول سدیم هیدروکسید برابر با $1/2$ مول بر لیتر است. در این رابطه، داریم:

$$[MgSO_4] = \frac{10 \times a \times d}{120} = \frac{4/8}{12} = 0.4 mol.L^{-1}$$

محلول منیزیم سولفات بر اساس معادله زیر با محلول باریم هیدروکسید واکنش می‌دهد:



بر این اساس، حجم محلول باریوم هیدروکسید مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم.

$$? L = \text{محلول منیزیم سولفات } 1 L \times \frac{0.4 \text{ mol } MgSO_4}{1 \text{ L محلول منیزیم سولفات}} \times \frac{1 \text{ mol } Ba(OH)_2}{1 \text{ mol } MgSO_4}$$

$$\times \frac{1 \text{ L } Ba(OH)_2 \text{ محلول}}{0.2 \text{ mol } Ba(OH)_2} = 2 L$$

طی این فرایند، ۱ لیتر محلول منیزیم سولفات با ۲ لیتر محلول باریوم هیدروکسید واکنش داده است. در واکنش مورد نظر، ۰/۴ مول رسوب منیزیم هیدروکسید و ۰/۴ مول رسوب باریوم سولفات تشکیل می‌شود، پس مقدار رسوب تولید شده برابر با ۰/۸ مول است. توجه داریم که هر دو فراورده تولید شده در این واکنش، به‌صورت رسوب هستند.



۸۸- کدام یک از مطالب زیر، نادرست است؟

- ۱) در ادرار اغلب افراد مبتلا به سنگ کلیه، نمک‌های کلسیم با غلظت بیشتر از مقدار انحلال‌پذیری آن‌ها وجود دارد.
- ۲) بنزین، برخلاف ضدیخ، نوعی محلول غیرآبی بوده و ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی در سرتاسر آن یکسان است.
- ۳) آب، از مولکول‌های خمیده ساخته شده و تنها ماده‌ای است که به سه حالت فیزیکی در طبیعت یافت می‌شود.
- ۴) اتانول رایج‌ترین حلال در آزمایشگاه بوده و از آن به‌عنوان حلال در تهیه بسیاری از داروها استفاده می‌شود.

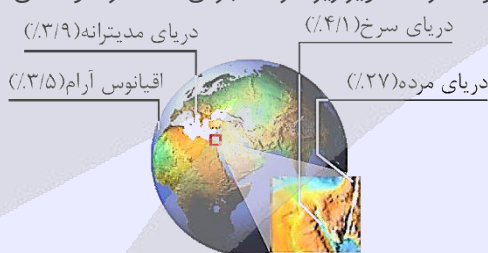
(متوسط - حفظی و مفهومی - سریع ۶ - صفحه ۱۰۹ - ۱۰۰۳)

پاسخ: گزینه ۴

آب، فراوان‌ترین و رایج‌ترین حلال موجود در طبیعت، صنعت و آزمایشگاه است؛ زیرا این ماده می‌تواند بسیاری از ترکیب‌های یونی و مواد مولکولی را در خود حل کند. آب و محلول‌های آبی (محلول‌هایی که حلال آن‌ها آب است) در زندگی جانداران نقش کلیدی و حیاتی دارند، اما همه محلول‌ها آبی نیستند؛ زیرا افزون بر آب، حلال‌های دیگری مثل اتانول، استون و هگزان نیز وجود دارند. برای مثال، هگزان، یک حلال آلی با فرمول مولکولی C_6H_{14} است. این ماده حلال مواد ناقطبی بوده و به‌عنوان رقیق‌کننده رنگ کاربرد دارد.

محلول‌ها

هر محلول از دو جزء حلال (الزاماً یک ماده) و حل‌شونده (یک یا چند ماده) تشکیل شده است. حلال جزئی از محلول است که حل‌شونده را در خود حل می‌کند و شمار مول‌های آن بیشتر است. خواص محلول‌ها به خواص حلال، حل‌شونده و مقدار هر یک از آن‌ها بستگی دارد. برای بیان مقدار حل‌شونده موجود در مقدار معینی از حلال یا محلول، از انواع غلظت استفاده می‌شود. درصد جرمی، ppm و مولاریته، انواعی از غلظت‌های گوناگون هستند. برای مثال، غلظت نمک در آب دریاها گوناگون با یکدیگر تفاوت دارد. تصویر زیر، درصد جرمی نمک در نمونه‌های مختلفی از آب‌ها را نشان می‌دهد:



بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) ادرار فرد مبتلا به سنگ کلیه، اغلب محلول فراسیرشده‌ای از نمک‌های کلسیم است که در آن نمک‌های کلسیم با غلظت بیشتر از مقدار انحلال‌پذیری آن‌ها وجود دارد.

سنگ کلیه

نزدیک به ۳ درصد از جمعیت کشورمان سنگ کلیه دارند. این بیماری افزون بر زمینه ژن‌شناختی (ژنتیکی) می‌تواند به دلیل تغذیه نامناسب، کم‌تحرکی، مصرف بیش از حد نمک خوراکی، نوشیدن کم آب، مصرف پروتئین حیوانی و لبنیات و نیز اختلالات هورمونی ایجاد شود. اغلب سنگ‌های کلیه از رسوب برخی نمک‌های کلسیم‌دار در کلیه‌ها تشکیل می‌شوند. مقدار این نمک‌ها در ادرار افراد سالم از انحلال‌پذیری آن‌ها کمتر است، پس در ادرار این افراد رسوب تشکیل نمی‌شود. در نقطه مقابل، در افرادی که به سنگ کلیه مبتلا می‌شوند، مقدار این نمک‌ها در ادرار از انحلال‌پذیری آن‌ها بیشتر است و به همین خاطر، در ادرار این افراد سنگ کلیه بر اثر رسوب نمک‌ها ایجاد می‌شود.



بنزین، همانند محلول ید در هگزان، نوعی محلول غیرآبی همگن به شمار می‌رود که در آن‌ها از یک ماده دیگر به جز آب به‌عنوان حلال استفاده شده است. در محلول‌های همگن، ویژگی‌های فیزیکی (مثل رنگ، دمای جوش و غلظت) و شیمیایی (مثل ترکیب شیمیایی) در سرتاسر محلول یکسان است. برخلاف محلول‌های همگن، در ساختار کلوئیدها (مثل رنگ‌های پوششی)، سوسپانسیون‌ها (مثل خاکشیر) و مخلوط‌های ناهمگن (مثل سالاد)، ویژگی‌های فیزیکی و شیمیایی در سرتاسر محلول یکسان نیست.

آب، تنها ماده‌ای است که به سه حالت فیزیکی مایع، جامد و گاز (بخار) در طبیعت وجود دارد. مولکول‌های آب در حالت بخار جدا از هم هستند و آزادانه و نامنظم از جایی به جای دیگر منتقل می‌شوند. در حالت مایع، با اینکه مولکول‌ها پیوند هیدروژنی قوی دارند، اما روی هم می‌لغزند و جابه‌جا می‌شوند و به همین خاطر است که یک نمونه از آب، شکل مشخصی نداشته و به شکل ظرف محتوی خود در می‌آید. برخلاف آب، ساختار یخ منظم است. در ساختار یخ، مولکول‌های آب در جاهای نسبتاً ثابتی قرار دارند.



۸۹- کدام موارد از عبارتهای داده شده درست است؟

الف - ترتیب گشتاور دوقطبی برخی مواد هیدروژن‌دار بر حسب دبای (D) به صورت $AsH_3 > PH_3 > NH_3$ است.

ب - قدرت نیروهای بین مولکولی در یک نمونه از HBr از یک نمونه HF بیشتر و از یک نمونه HCl کمتر است.

ج - سیلیسیم تتراکلرید، دارای ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی بوده و نسبت به متان دمای جوش پایین‌تری دارد.

د - در مواد مولکولی با نقطه جوش بسیار نزدیک، ماده با جرم مولی بیشتر، قطبیت پایین‌تری دارد.

(۱) «الف» و «ج» (۲) «الف» و «د» (۳) «ب» و «ج» (۴) «ب» و «د»

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۰۷ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۲

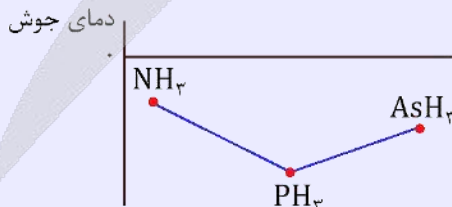
عبارتهای (الف) و (د) درست هستند.

بررسی موارد:

در ساختار یک مولکول، هرچه قدر که تفاوت خصلت نافلزی اتم‌ها بیشتر باشد، آن مولکول دارای گشتاور دوقطبی بیشتری است. بر این اساس، می‌توان گفت با کاهش خاصیت نافلزی اتم مرکزی، گشتاور دوقطبی مولکول مورد نظر کاهش پیدا می‌کند. از طرفی، می‌دانیم که در هر گروه از جدول دوره‌ای با حرکت از بالا به سمت پایین، خاصیت نافلزی اتم‌ها کاهش پیدا می‌کند. با توجه به توضیحات داده شده، ترتیب قطبیت (μ) مولکول‌های NH_3 و PH_3 و AsH_3 بر حسب دبای (D) به صورت $NH_3 > PH_3 > AsH_3$ است.

دمای جوش ترکیب‌های هیدروژن‌دار

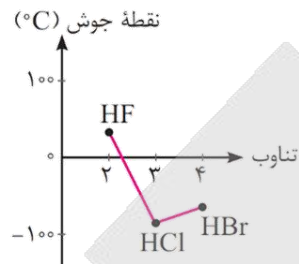
نیتروژن، فسفر و آرسنیک، عناصر موجود در صدر گروه ۱۵ جدول دوره‌ای عناصر هستند. به‌طور کلی در گروه شماره ۱۵ جدول دوره‌ای، با افزایش عدد اتمی عناصر، دمای جوش ترکیب هیدروژن‌دار این عناصر ابتدا کاهش یافته و سپس افزایش پیدا می‌کند. در گروه‌های شماره ۱۶ و ۱۷ جدول دوره‌ای نیز همین روند برقرار است. در واقع، چون بین مولکول‌های آمونیاک برخلاف مولکول‌های PH_3 ، پیوند هیدروژنی برقرار می‌شود، پس می‌توان گفت یک نمونه از آمونیاک در مقایسه با PH_3 دمای جوش بالاتری دارد. از طرفی، چون AsH_3 نسبت به PH_3 دارای جرم مولی بیشتری است، پس می‌توان گفت این ترکیب نیز در مقایسه با PH_3 دمای جوش بالاتری دارد. نمودار زیر، نقطه جوش این سه ماده را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد:



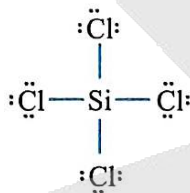
در رابطه با عناصر موجود در گروه ۱۶ جدول دوره‌ای نیز می‌توان گفت آب به خاطر تشکیل پیوندهای هیدروژنی در مقایسه با H_2S دمای جوش بالاتری دارد و H_2Se نیز به خاطر جرم مولی بیشتر، در مقایسه با H_2S دمای جوش بالاتری دارد. در گروه ۱۷ جدول دوره‌ای نیز با توجه به برقرار شدن پیوند هیدروژنی بین مولکول‌های HF ، این ماده در مقایسه با HCl دمای جوش بیشتری دارد. یک نمونه از HBr نیز به خاطر جرم مولی بالاتر، در مقایسه با HCl دمای جوش بیشتری دارد.



در بین هالیدهای هیدروژن، گاز HF به دلیل امکان تشکیل پیوند هیدروژنی، قوی‌ترین نیروهای بین مولکولی را دارد و در سایر هالیدهای هیدروژن، با افزایش جرم مولی، قدرت نیروی بین مولکولی افزایش پیدا می‌کند. همان‌طور که می‌دانیم، قدرت نیروهای بین مولکولی در مواد گازی با دمای جوش آن‌ها رابطه مستقیم دارد. در رابطه با دمای جوش هالیدهای هیدروژن، داریم:



ساختار مولکولی سیلیسیم تتراکلرید با فرمول شیمیایی $SiCl_4$ ، به صورت زیر است:



همان‌طور که مشخص است، سیلیسیم تتراکلرید در ساختار خود ۱۲ جفت الکترون ناپیوندی دارد. دمای جوش مواد مولکولی، به میزان قطبیت و جرم مولی آن‌ها وابسته است. چون جرم مولی سیلیسیم تتراکلرید در مقایسه با گاز متان بیشتر بوده و این دو ماده از ذرات ناقطبی ساخته شده‌اند، پس می‌توان گفت سیلیسیم تتراکلرید نسبت به متان دمای جوش بالاتری دارد.

با توجه به اینکه نقطه جوش دو ماده مورد نظر نزدیک به هم است و نقطه جوش هر ماده نیز با جرم مولی و مقدار قطبیت آن ماده رابطه مستقیم دارد، اگر ماده‌ای جرم مولی بالاتری داشته باشد، باید قطبیت پایین‌تری داشته باشد تا با ترکیب دیگری که جرم مولی کمتر و قطبیت بیشتری دارد، نقطه جوش برابر یا نزدیک به هم داشته باشند.

قدرت نیروی وان دروالسی

عوامل مؤثر بر نیروی بین مولکولی (وان دروالسی)، به شرح زیر هستند:

(۱) **قطبیت مولکول:** هر چه قطبیت بیشتر باشد ← نیروی بین مولکولی بیشتر است ← نقطه جوش بیشتر است

مثال: HCl قطبی و N_2 ناقطبی است؛ بنابراین نیروی بین مولکولی و نقطه جوش HCl بیشتر است.

(۲) **جرم و حجم مولکول:** هر چه جرم و حجم بیشتر باشد ← نیروی بین مولکولی بیشتر است ← نقطه جوش بیشتر است

مثال: I_2 جرم و حجم بیشتری نسبت به Br_2 دارد، بنابراین نیروی بین مولکولی قوی‌تر و نقطه جوش بالاتری دارد.

توجه داریم که هر چه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد (به صفر نزدیک‌تر باشد)، آن ماده راحت‌تر به مایع تبدیل می‌شود. به عبارتی هر چه نقطه جوش یک گاز بالاتر باشد، مایع کردن آن در دماهای بالاتری انجام می‌شود.



۹۰- در شرایط استاندارد، ۳۲۱ گرم KIO_3 را در واکنش موازنه نشده $H_2(g) + KIO_3(s) \rightarrow KI(s) + H_2O(l)$ مصرف کرده و نیمی از آب تولید شده در این واکنش را به ۹ گرم محلول ۱۱ درصد جرمی منیزیم سولفات اضافه می‌کنیم. درصد جرمی منیزیم سولفات در محلول ایجاد شده به چند درصد رسیده و در واکنش انجام شده، چند گرم گاز هیدروژن مصرف می‌شود؟

($H = 1$ و $O = 16$ و $K = 39$ و $I = 127$ $g.mol^{-1}$)

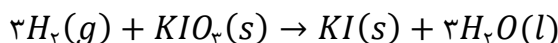
۱۸ - ۴ (۴)

۹ - ۴ (۳)

۱۸ - ۲ (۲)

۹ - ۲ (۱)

معادله واکنش انجام شده به صورت زیر است:



با توجه به معادله این واکنش شیمیایی، جرم آب تولید شده و جرم گاز هیدروژن مصرف شده را محاسبه می‌کنیم.

$$? g H_2O = 321 g KIO_3 \times \frac{1 mol KIO_3}{214 g KIO_3} \times \frac{3 mol H_2O}{1 mol KIO_3} \times \frac{18 g H_2O}{1 mol H_2O} = 81 g$$

$$? g H_2 = 321 g KIO_3 \times \frac{1 mol KIO_3}{214 g KIO_3} \times \frac{3 mol H_2}{1 mol KIO_3} \times \frac{2 g H_2}{1 mol H_2} = 9 g$$

در قدم بعد، جرم منیزیم سولفات موجود در محلول منیزیم سولفات اولیه را محاسبه می‌کنیم.

$$? g MgSO_4 = 9 g \text{ محلول} \times \frac{11 g MgSO_4}{100 g \text{ محلول}} = 0.99 g$$

جرم محلول اولیه برابر با ۹ گرم بوده است. نیمی از آب تولید شده در واکنش، به محلول اضافه شده است. با افزودن ۴۰/۵ گرم آب به این محلول، جرم آن به ۴۹/۵ گرم رسیده است. بر این اساس، درصد جرمی منیزیم سولفات را در محلول نهایی محاسبه می‌کنیم.

$$MgSO_4 \text{ درصد جرمی} = \frac{\text{جرم } MgSO_4}{\text{جرم محلول}} \times 100 = \frac{0.99 g MgSO_4}{49.5 g \text{ محلول}} \times 100 = 2 \text{ درصد}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، درصد جرمی محلول نهایی برابر با ۲٪ شده است.

تغییر غلظت محلول

در گروهی از سوالات، غلظت ppm و یا درصد جرمی یک محلول به ما داده شده و از ما می‌خواهند که پس از تبخیر مقداری آب (حذف آب) و یا افزودن مقداری آب به محلول، غلظت نهایی را محاسبه کنیم. قدم اول برای بررسی روند تغییر غلظت محلول در این سوالات، محاسبه جرم محلول نهایی ایجاد شده است. در این رابطه، داریم:

جرم آب اضافه شده \pm جرم محلول اولیه = جرم محلول نهایی

طی این فرایند، مقدار حل‌شونده موجود در محلول ثابت است. در این حالت، برای محاسبه غلظت ppm در محلول جدید ایجاد شده از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

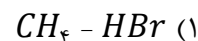
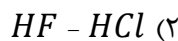
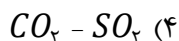
$$ppm_1 \times m_1 = ppm_2 \times m_2 \Rightarrow \text{جرم نهایی} \times ppm \text{ محلول نهایی} = \text{جرم اولیه} \times ppm \text{ محلول اولیه}$$

در این تیپ سوالات، برای بررسی روند تغییر درصد جرمی محلول نیز از رابطه زیر استفاده می‌کنیم:

$$a_1 \times m_1 = a_2 \times m_2 \Rightarrow \text{جرم نهایی} \times \text{درصد جرمی محلول نهایی} = \text{جرم اولیه} \times \text{درصد جرمی محلول اولیه}$$



۹۱- در کدام گزینه، گشتاور دوقطبی مولکول دوم، بیشتر از گشتاور دوقطبی مولکول اول است؟



مولکول‌های ناقطبی شرایط زیر را دارند:

(۱) مولکول‌های دارای دو اتم یکسان مانند N_2 و F_2

(۲) مولکول‌هایی با اتم‌های مشابه پیرامون اتم مرکزی و فاقد الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی مانند CO_2 و CH_4
مولکول‌های قطبی نیز شرایط زیر را دارند:

(۱) مولکول‌های دارای الکترون ناپیوندی روی اتم مرکزی مانند NH_3 و SO_2

(۲) مولکول‌های دو اتمی با دو اتم متفاوت مانند HCl و CO

(۳) مولکول‌های دارای اتم‌های متفاوت پیرامون اتم مرکزی مانند CH_2Cl

جهت‌گیری مولکول‌ها در میدان الکتریکی، مبنای اندازه‌گیری کمیتی به نام گشتاور دوقطبی (μ) با یکای دبا (D) است. مقدار این کمیت، با افزایش قطبیت مولکول افزایش می‌یابد. این کمیت، میزان قطبیت مولکول و قدرت نیروهای بین مولکولی را نشان می‌دهد. مولکول‌های



هیدروژن فلوئورید (HF) و هیدروژن کلرید (HCl)، هر دو قطبی هستند اما چون خاصیت نافلزی فلوئور بیشتر از کلر است، گشتاور دوقطبی مولکول هیدروژن فلوئورید بیشتر از هیدروژن کلرید خواهد بود. توجه داریم که مولکول‌های متان، نیتروژن و کربن دی‌اکسید، به‌عنوان دومین ترکیب در سایر گزینه‌ها مطرح شده‌اند که همگی ناقطبی بوده و گشتاور دوقطبی برابر با صفر دارند.



۹۲- محلول سیرشده‌ای از آمونیاک با غلظت ۲۰ مول بر لیتر و چگالی $1/14 \text{ g} \cdot \text{mL}^{-1}$ در اختیار داریم. انحلال‌پذیری گاز آمونیاک در شرایط داده شده برابر با چند گرم در ۱۰۰ گرم آب است؟ ($N = 14$ و $H = 1$: $\text{g} \cdot \text{mol}^{-1}$)

۳۴ (۴)

۴۲/۵ (۳)

۲۱/۲ (۲)

۳۹/۱ (۱)

(متوسط - محاسباتی - سریع) (صفحه ۱۰۰ - ۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

مراحل حل این سؤال، به‌صورت خلاصه به شرح زیر هستند:

گام اول محاسبه جرم آب و جرم آمونیاک موجود در محلول

گام دوم محاسبه مقدار انحلال‌پذیری آمونیاک در آب

محلولی از آمونیاک با حجم ۱ لیتر را در نظر گرفته و جرم اجزای سازنده آن را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g} = \text{محلول } 1 \text{ L} \times \frac{\text{محلول } 1000 \text{ mL}}{\text{محلول } 1 \text{ mL}} \times \frac{\text{محلول } 1/14 \text{ g}}{\text{محلول } 1 \text{ mL}} = 1140 \text{ g}$$

$$? \text{ g } NH_3 = \text{محلول } 1 \text{ L} \times \frac{20 \text{ mol } NH_3}{\text{محلول } 1 \text{ L}} \times \frac{17 \text{ g } NH_3}{1 \text{ mol } NH_3} = 340 \text{ g}$$

$$800 \text{ g} = \text{جرم آب} \implies 1140 \text{ g} = \text{جرم آب} + 340 \text{ g } NH_3 \implies \text{جرم آمونیاک} + \text{جرم آب} = \text{جرم محلول}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، می‌توان گفت ۳۴۰ گرم آمونیاک در ۸۰۰ گرم آب حل شده و یک محلول سیرشده را ایجاد کرده است. از طرفی، می‌دانیم که مقدار انحلال‌پذیری مواد مختلف در آب، در مقیاس گرم در ۱۰۰ گرم آب بیان می‌شود. بر این اساس، مقدار انحلال‌پذیری گاز آمونیاک در ۱۰۰ گرم آب را محاسبه می‌کنیم:

$$? \text{ g } NH_3 = 100 \text{ g آب} \times \frac{340 \text{ g } NH_3}{800 \text{ g آب}} = 42/5 \text{ g}$$



۹۳- با توجه به اطلاعات داده شده در جدول زیر، در چند ردیف داده‌های نادرست وجود دارد؟

نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار الکترون با $l = 0$ در کاتیون	شمار پیوند اشتراکی در واحد فرمولی
منیزیم سولفید	MgS	۴	۱
سدیم نیترات	NO_3Na	۴	۴
کروم (II) کلرید	$CrCl$	۶	۰
آلمینیم سولفات	$Al_2(SO_4)_3$	۴	۱۲

۴ (۴)

۳ (۳)

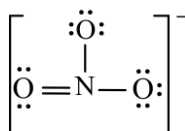
۲ (۲)

۱ (۱)

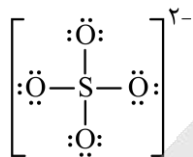
(متوسط - مفهومی - استاندارد) (صفحه ۱۲۲ - ۱۰۳)

پاسخ: گزینه ۳

در ردیف اول، منیزیم سولفید (MgS) یک ترکیب یونی دوتایی بوده و فاقد پیوند اشتراکی در ساختار خود است. در ساختار این ترکیب، دو یون تک اتمی منیزیم و سولفید وجود دارد. در ردیف دوم، فرمول شیمیایی ترکیب نادرست نوشته شده است. طبق قرارداد ابتدا باید کاتیون و سپس آنیون نوشته شود. یون نیترات (NO_3^-)، ۴ پیوند اشتراکی بین اتم‌های خود دارد. ساختار لوویس یون نیترات به‌صورت زیر است:



در ردیف سوم، نام ترکیب با فرمول شیمیایی آن مطابقت ندارد. کروم، دارای دو کاتیون پایدار به فرمهای Cr^{3+} و Cr^{2+} است؛ در نتیجه باید برای نوشتن آن از اعداد رومی استفاده کرد. توجه داریم که ترکیب داده شده در این ردیف، ترکیب یونی دوتایی بوده و فاقد پیوند اشتراکی است. در ردیف چهارم، اطلاعات کاملاً درست وارد شده است. یون سولفات (SO_4^{2-})، یک آنیون چند اتمی با ساختار لوویس زیر است:



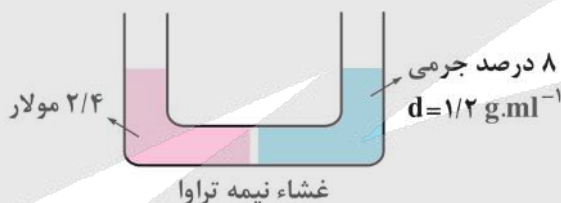
توجه داریم که کل اطلاعات داده شده در رابطه با تعداد الکترونهایی با $l = 0$ در کاتیون ترکیبهای داده شده به صورت درست نوشته شده است. جدول زیر، شکل درست جدول داده شده در سؤال را نمایش می‌دهد:

نام ترکیب	فرمول شیمیایی	شمار پیوند اشتراکی در هر واحد فرمولی
منیزیم سولفید	MgS	۰
سدیم نیترات	$NaNO_3$	۴
کروم (II) کلرید	$CrCl_2$	۰
آلمینیوم سولفات	$Al_2(SO_4)_3$	۱۲

همان‌گونه که مشخص است، فقط اطلاعات مربوط به ردیف آخر به صورت درست نوشته شده است.



۹۴- مطابق تصویر زیر، محلولی از سدیم هیدروکسید در تیغه سمت راست و محلولی از گلوکز در تیغه سمت چپ یک ظرف دارای غشای نیمه تراوا ریخته شده است:



در ابتدای کار، جهت جریان آب از خلال غشا به کدام سمت بوده و در صورت وارد کردن یک نیروی خارجی به محلول موجود در تیغه سمت چپ، سرعت اسمز چگونه تغییر می‌کند؟ ($Na = 23, O = 16, H = 1 : g.mol^{-1}$)

- (۱) راست - افزایش می‌یابد
 (۲) چپ - افزایش می‌یابد
 (۳) راست - کاهش می‌یابد
 (۴) چپ - کاهش می‌یابد

(متوسط - مفهومی - استاندارد) - صفحه ۱۱۸ - ۱۰۰۳

پاسخ: گزینه ۱

ذرات حل‌شونده موجود در یک محلول، تمایل دارند ذرات حلال را به سمت خود بکشند. در این شرایط، اگر دو محلول با غلظت متفاوت را توسط یک غشای نیمه‌تراوا از هم جدا کنیم، ذرات حلال از محیطی با غلظت کمتر حل‌شونده به سمت محیط غلیظ‌تر کشیده می‌شوند. طی این فرایند، غلظت حل‌شونده در محیط غلیظ‌تر کاهش یافته و غلظت حل‌شونده در محیط رقیق‌تر افزایش می‌یابد. به چنین فرایندی، اسمز گفته می‌شود. اسمز یک فرایند خودبه‌خودی بوده و بدون نیاز به نیروی خارجی انجام می‌شود. برای اینکه ببینیم در لوله مورد نظر، کدام محلول آب را به سمت خود می‌کشد، باید غلظت مولی ذرات در هر دو محلول را محاسبه کنیم. گلوکز به صورت مولکولی در آب حل شده و طبق فرض سؤال، غلظت آن در محلول مورد نظر $2/4$ مولار است. در رابطه با سدیم هیدروکسید ($NaOH$)، ابتدا باید غلظت مولی کلی نمک را محاسبه کنیم. در این رابطه، داریم:

$$\text{غلظت مولی} = \frac{\text{چگالی} \times \text{درصد جرمی} \times 10}{\text{جرم مولی}} = \frac{10 \times 8 \times 1/2}{40} = 2/4 \text{ mol. L}^{-1}$$

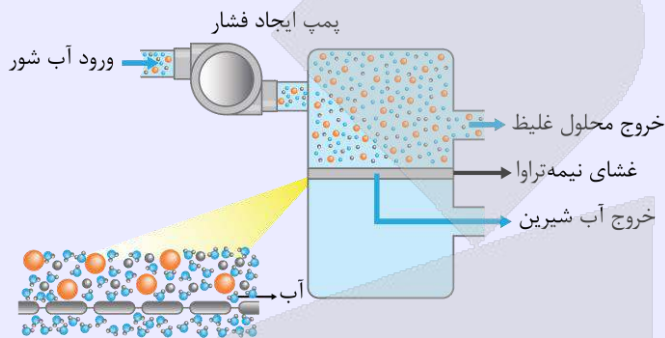
با انحلال هر مول سدیم هیدروکسید در آب، یک یون سدیم و یک یون هیدروکسید وارد محلول می‌شود، پس مجموع غلظت مولی ذرات در این محلول برابر با $4/8$ مول بر لیتر است. چون مجموع غلظت مولی ذرات در لوله سمت راست بیشتر است، پس در ابتدای کار جهت جریان آب به



سمت لوله سمت راست خواهد بود. در این شرایط، اگر به لوله سمت چپ فشار بیشتری وارد کنیم، نه تنها اسمز ادامه پیدا می کند، بلکه سرعت انجام شدن آن بیشتر هم می شود چون نیروی خارجی نیز در جهت فرستادن ذرات آب از محلول چپ به محلول راست ایفای نقش می کند.

اسمز معکوس

در دستگاه اسمز معکوس، یک محلول با غلظت مشخص، از طریق یک ورودی و با استفاده از یک پمپ، وارد دستگاه می شود. در واقع پمپ، نیروی مورد نیاز برای انجام شدن فرایند اسمز معکوس را تأمین می کند. با ورود آب تصفیه نشده به دستگاه، این محلول با استفاده از یک غشای نیمه تراوا به دو محلول مختلف تفکیک شده و با استفاده از خروجی های دستگاه خارج می شوند. یکی از این محلول های خروجی آب تصفیه شده است و محلول دیگر نیز حاوی غلظت بالایی از مواد حل شونده است. چون کل مواد حل شده در محلول ورودی وارد مخلوط غلیظ خروجی شده و این محلول در مقایسه با محلول ورودی حجم کمتری دارد، پس می توان گفت محلول غلیظ تولید شده، نسبت به آب شور اولیه غلظت نمک بیشتری دارد. تصویر زیر، ساختار دستگاه اسمز معکوس را نشان می دهد:



۹۵- کدام یک از مطالب داده شده نادرست است؟

- ۱) با استفاده از روش تقطیر، برخلاف روش صافی کربن، نمی توان مواد آلی فرار موجود در آب را از آن جدا کرد.
- ۲) دیواره یاخته های گیاهی فقط اجازه گذر به برخی از ذره ها و مولکول های کوچک مثل آب و یون ها را می دهد.
- ۳) در شرایط یکسان، غلظت مولی گاز NO در محلول سیر شده این ماده، کمتر از O_2 در محلول سیر شده آن است.
- ۴) ماهی با عبور آب از درون آبشش، اکسیژن مولکولی محلول در آب را جذب و در فرایند سوخت و ساز مصرف می کند.

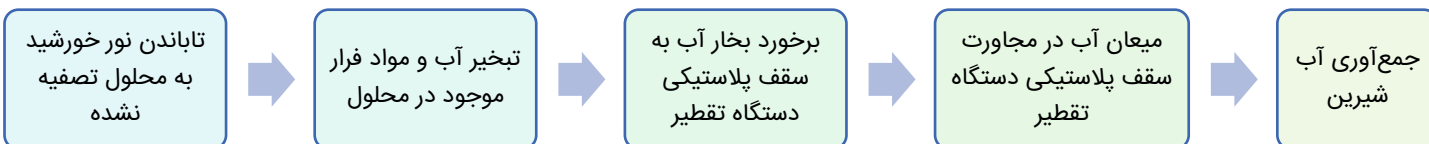
پاسخ: گزینه ۳

(سخت - مفهومی - استاندارد ۶ - صفحه ۱۱۹ - ۱۰۰۳)

چون گاز نیتروژن مونوکسید قطبی بوده و گاز اکسیژن ناقطبی است، در شرایط یکسان، مقدار انحلال پذیری گاز NO در آب، بیشتر از مقدار انحلال پذیری گاز O_2 در آب است؛ به عبارت دیگر، اگر محلول سیر شده ای از این دو ماده با جرم برابر داشته باشیم، جرم گاز نیتروژن مونوکسید در محلول این ماده بیشتر از جرم گاز اکسیژن در محلول آن خواهد بود. از طرفی، جرم مولی گاز نیتروژن مونوکسید کمتر از جرم مولی گاز اکسیژن است، پس می توان گفت غلظت مولی گاز NO در محلول سیر شده این ماده، بیشتر از گاز O_2 در محلول سیر شده آن خواهد بود.

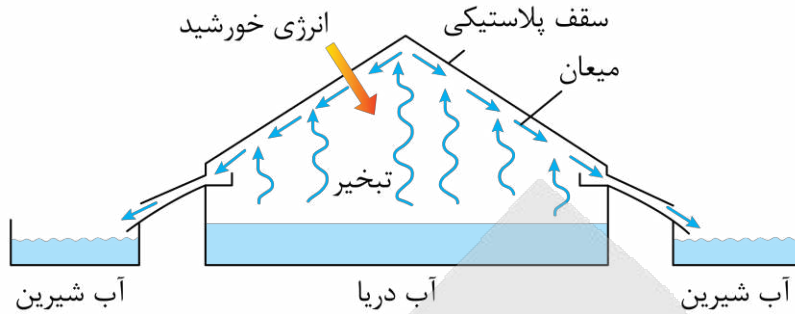
بررسی سایر گزینه ها:

۱) صافی کربن، اسمز معکوس و تقطیر، از جمله روش های تصفیه ی آب به شمار می روند. نافلزها، آلاینده ها، فلزهای سمی و حشره کش ها از جمله موادی هستند که با استفاده از تمامی این روش ها از آب جدا می شوند؛ در حالی که میکروب های موجود در آب، از جمله موادی هستند که با استفاده از هیچ روشی نمی توان آن ها را از آب جدا کرد. برای از بین بردن میکروب های موجود در آب، محلول حاصل از فرایند تصفیه را کلر زنی می کنند. ترکیب های آلی فرار نیز یکی دیگر از آلاینده های موجود در آب هستند که آن ها را با استفاده از صافی کربن و اسمز معکوس می توان جدا کرد؛ اما فرایند تقطیر توانایی جدا کردن آن ها از آب را ندارد. مراحل انجام شده در فرایند تقطیر که منجر به تولید آب شیرین می شود، به شرح زیر است:





توجه داریم که انرژی مورد نیاز برای انجام شدن تقطیر، با استفاده از نور خورشید تأمین می‌شود. تصویر زیر، نمایی از فرایند تقطیر را نشان می‌دهد:



دیواره یاخته‌ها در گیاهان روزنه‌هایی بسیار ریز دارد که ذره‌های سازنده مواد می‌توانند از آن گذر کنند؛ به گونه‌ای که این روزنه‌ها فقط اجازه گذر به برخی از ذره‌ها و مولکول‌های کوچک مانند آب و یونها را می‌دهند و از گذر مولکول‌های درشت‌تر جلوگیری می‌کنند. این دیواره‌ها غشای نیمه‌تراوا نامیده می‌شوند. به خاطر وجود همین غشای نیمه‌تراوا است که وقتی میوه‌های خشک مانند مویز درون آب قرار می‌گیرند، مولکول‌های آب، خود به خود از محیط رقیق با گذر از روزنه‌های دیواره سلولی به محیط غلیظ می‌روند. در نتیجه، میوه آبدار و متورم می‌شود.

اسمز در میوه‌های خشک شده



هنگامی که حبوبات و میوه‌های خشک را برای مدتی درون آب قرار می‌دهیم، متورم می‌شوند. در واقع طی این فرایند، ذرات آب به صورت خودبه‌خودی از محیط رقیق (آب موجود در اطراف سلول‌ها) با گذر از روزنه‌های دیواره سلولی به محیط غلیظ (محیط درون سلول‌های گیاهی) می‌روند. طی این فرایند، سلول‌های سازنده میوه و حبوبات آبدار و متورم می‌شود و برخی نمک‌ها، ویتامین‌ها و ... از بافت میوه و یا حبوبات به آب راه می‌یابد. در نقطه مقابل، پس از انداختن یک خیار در محلول آب‌نمک غلیظ، خیار به‌مرور چروکیده می‌شود. طی این فرایند، ذرات آب به صورت خودبه‌خودی (بدون نیاز به نیروی خارجی) از محیط رقیق (محیط درون سلول‌ها) با گذر از روزنه‌های دیواره سلولی به محیط غلیظ (محیط اطراف سلول‌ها) می‌روند. در نتیجه این فرایند، سلول‌های سازنده خیار چروکیده، کوچک و جمع می‌شوند.

همه جانوران از جمله ماهی‌ها برای زنده ماندن و انجام واکنش سوخت و ساز در بدن خود به گاز اکسیژن نیاز دارند. ماهی‌ها با عبور دادن آب از درون آبشش‌های خود، اکسیژن مولکولی حل شده در آب را جذب می‌کنند.

اکسیژن در آب دریا



با اینکه گاز اکسیژن به میزان کمی در آب حل می‌شود، اما همین مقدار کم برای زندگی آبزیان نقش حیاتی دارد. ادامه زندگی اغلب ماهی‌ها هنگامی امکان‌پذیر است که غلظت اکسیژن محلول در آب بیشتر از $5ppm$ باشد. توجه داریم که در هوای گرم، انحلال‌پذیری گاز اکسیژن در آب دریا کاهش یافته و به همین خاطر، در چنین شرایطی ماهی‌ها به سطح آب می‌آیند تا بتوانند گاز اکسیژن مورد نیاز خود را از قسمت‌های سطحی‌تر آب که غلظت گاز اکسیژن بیشتری دارد، دریافت کنند.



آزمون



کارنامه رتبه‌های بهرتر

رتبه‌های ا تا ۳۰۰۰



جزوه



فیلم



مشاوره



www.
arefonline.ir



مرکز مشاوره عارف

