مرکز مشاوره عارف

کدکنترل

121

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۱۰/۲۰

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مرور نیم‌سال اول دوازدهم

دفترچه شماره ۱

ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی ــ پایهٔ دوازدهم

آزمون الکترونیکی ماز ــ مرحله ۷

تعداد سؤال: ۴۰ | مدت پاسخگویی: ۷۰ دقیقه

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخگویی
۱	ریاضیات	۴۰	۱	۴۰	۷۰ دقیقه

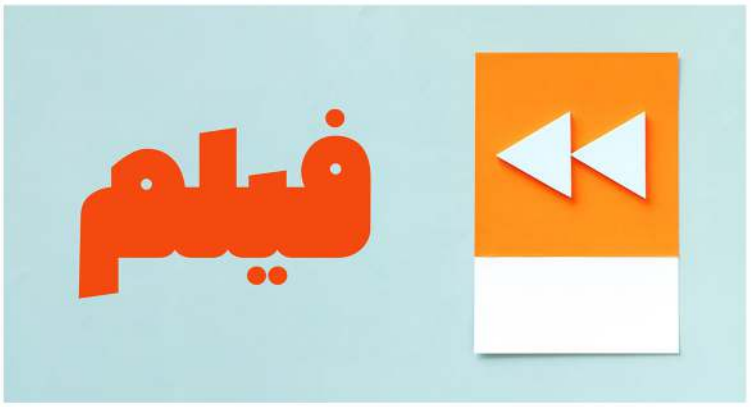
برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

بودجه‌بندی دروس این آزمون

حسابان
دوازدهم + پایه مرتبط

حسابان ۲:
فصل‌های ۱ تا ۳
صفحه‌های ۱ تا ۶۹

هندسه
هندسه (۳)

ماتریس و کاربردها/
آشنایی با مقاطع مخروطی
صفحه‌های ۹ تا ۴۶

گسسته و آمار و احتمال
گسسته

آشنایی با نظریه اعداد/
گراف و مدل‌سازی
صفحه‌های ۱ تا ۴۲

فیزیک
فیزیک (۳)

حرکت بر خط راست/
دینامیک و حرکت دایره‌ای/
نوسان و موج
(تا سر موج و انواع آن)
صفحه‌های ۱ تا ۶۹

شیمی
شیمی (۳)

فصل‌های ۱ و ۲
شیمی ۳:
صفحه‌های ۱ تا ۶۶

استراتژی و هدف‌گذاری با ماز

اهداف کوتاه‌مدت:
- رسیدن به بودجه‌بندی و مباحث آزمون بعد

اهداف میان‌مدت:
- هدف میان‌مدت پاییز: مطالعه و تسلط کامل بر نیم‌سال اول دوازدهم + دروس پایه دهم
- هدف میان‌مدت زمستان: مطالعه و تسلط کامل بر نیم‌سال دوم دوازدهم + دروس پایه یازدهم
- هدف میان‌مدت فروردین‌ماه: مرور و جمع‌بندی بقچه‌ای به صورت پایه‌ای و نیم‌سالی و آماده شدن برای شرکت در آزمون جامع
- هدف میان‌مدت سه هفتهٔ مانده به کنکور اردیبهشت: شرکت در آزمون‌های جامع کاملاً شبیه‌ساز کنکور با سطوح مختلف (آمادگی برای مواجهه با هر نوع کنکور)
- هدف میان‌مدت اردیبهشت و خرداد: کسب آمادگی کامل برای ۲۰ شدن در امتحانات نهایی
- هدف میان‌مدت دو هفتهٔ مانده به کنکور تیر: مرور سریع و آماده شدن برای کنکور تیر

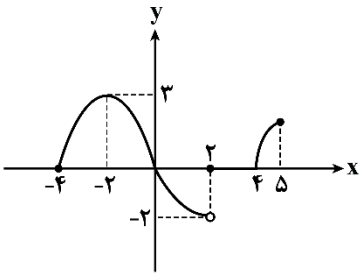
اهداف بلندمدت:
- رسیدن به کنکور اردیبهشت (کنکور اصلی) + آمادگی برای ۲۰ شدن در امتحانات نهایی + کامبک برای کنکور تیر

www.biomaze.ir
WWW.ArefOnline.ir
biomaze
biomaze

۱- به ازای چند مقدار صحیح k ، تابع نمایی $f(x)=(۳۲-۲k^۲)^x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

۲- اگر نمودار تابع $y=f(\frac{۷-x}{۳})$ به شکل زیر و دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}f(۲x+۱)$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل $۱۲a-۳b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) −۶
۳) −۱۰
۴) ۱۵

۳- نمودار تابع $f(x)=۳-\sqrt{۴+۲x}$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و در نهایت یک واحد به بالا و k واحد به راست انتقال می‌دهیم تا تابع g به دست آید. به ازای کدام مقدار صحیح k، دامنهٔ تابع $f+g$ شامل دقیقاً هفده عدد صحیح خواهد بود؟

۱) ۱۱ ۲) ۱۲ ۳) −۱۱ ۴) −۱۲

۴- خط $y=m$ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^۴+۴x}{|x|}$ را در دو نقطه قطع می‌کند. m چند مقدار طبیعی یک رقمی می‌تواند داشته باشد؟ آزمون وی ا ی پی

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

۵- اگر $Q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^۵-۴x^۳+۱۲x^۲-۷x+۱$ بر $(x+۲)$ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $(x+۱)$ کدام است؟

۱) −۴۰ ۲) −۳۰ ۳) −۳۹ ۴) −۲۹

۶- اگر دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x)=\sqrt{۳}-\cos(\frac{\pi}{۲}x)$ را به ترتیب با $T_۱$ و $m_۱$ و $M_۱$ و دوره تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $g(x)=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲$ را به ترتیب با $T_۲$ و $m_۲$ و $M_۲$ نمایش دهیم، حاصل عبارت $\frac{T_۲}{T_۱}\times\frac{m_۱+M_۱}{m_۲+M_۲}$ کدام است؟

مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $\frac{-\sqrt{۳}}{۲}\pi$ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$ ۳) $-\sqrt{۳}\pi$ ۴) $\sqrt{۳}\pi$

محل انجام محاسبات

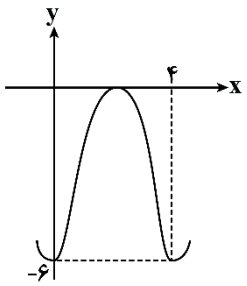
WWW.ArefOnline.ir

۷- در تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\sin bx+۲$ فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم متوالی با عرض -۴ برابر ۸π است. اگر نمودار این تابع روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ اکیداً نزولی باشد، عرض این تابع در نقطه‌ای به طول ۱۱π کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}+۳$ ۲) $-۲\sqrt{۳}+۳$ ۳) $۳\sqrt{۲}+۲$ ۴) $-۳\sqrt{۲}+۲$

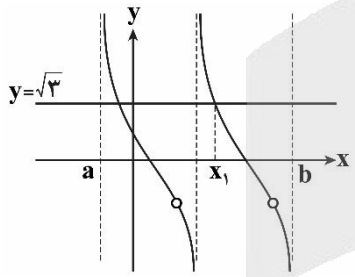
۸- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\cos(c\pi x)$ است. مقدار $\left[f(-\frac{۱۱}{۳})\right]$ کدام است؟ (نماد $[\ ]$ نماد جزء صحیح است)

مشابه تمرین کتاب درسی



۱) -۴
۲) -۵
۳) -۶
۴) -۷

۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ در بازهٔ $[a,b]$ به شکل مقابل است. نمودار این تابع خط $y=\sqrt{۳}$ را در نقطه‌ای به طول $x_۱$ قطع می‌کند. حاصل $\frac{x_۱}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۱۱}$
۲) $\frac{۱۱}{۲۱}$
۳) $\frac{۱}{۹}$
۴) $\frac{۱}{۲۱}$

۱۰- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin x+\cos x=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟ آزمون وی ا ی پی

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

۱۱- بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\sin x-\sin(x+\frac{\pi}{۸})=۰$ در بازهٔ $[۲\pi,۴\pi]$ کدام است؟

مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $\frac{۲۷\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۵۵\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵۷\pi}{۱۶}$ ۴) $\frac{۲۹\pi}{۸}$

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۱۲- معادلهٔ $۲\sin x-۵\cos x=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای m ریشه و معادلهٔ $۴\tan x-۳\cot x=۰$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای n ریشه است. $m+n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

۱۳- اگر $\sin(\alpha+\frac{\pi}{۲})=۲\sin\alpha$ و $۳\cos(\beta-\frac{۳\pi}{۲})=\cos\beta$ باشد، آن‌گاه حاصل $\tan(\pi-\alpha-\beta)$ کدام است؟

۱) -۱ ۲) ۱ ۳) $-\frac{۱}{۷}$ ۴) $\frac{۱}{۷}$

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to(-۱)^-}\frac{x^۲+x}{x^۲+۲x+۱}$ و $\lim\limits_{x\to۱^-}\frac{x^۲-۱}{(x-۱)^۲}$ به ترتیب کدام است؟

مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $+\infty$ و $-\infty$ ۲) $-\infty$ و $+\infty$ ۳) $+\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

۱۵- اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-۳)x^۵-۱۶x^۳-x^۲+۵}{۲ax^۳+۱۴x^۳-۷x+۱}$ برابر عدد حقیقی b باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ $(b\neq۰)$

۱) ۳/۲ ۲) ۲/۸ ۳) ۳/۸ ۴) ۲/۲

۱۶- کدام‌یک از حدهای زیر موجود است؟

۱) $\lim\limits_{x\to۰^+}\cos\frac{۱}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$

۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{۲}}\tan x.\cot x$ ۴) $\lim\limits_{x\to۱}\frac{x^۴-۱}{x^۳-۲x^۲+x}$

۱۷- اگر $\lim\limits_{x\to۰}\frac{\left[-۱+x^۴\right]}{a+b\cos۲x}=-\infty$ باشد، دو تایی (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۴,۴)$ ۲) $(-۴,-۴)$ ۳) $(۴,-۴)$ ۴) $(-۴,۴)$

۱۸- اگر $\lim\limits_{x\to۳}\frac{x-۴}{۳x^۲+۲ax+۶b}=-\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(۳-b)x-\sqrt{۴x^۲+۱۲x}}{(a-۲)x+\sqrt{x^۲-x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x^۲+x+۱}{x^۲+۲x+۳}$ در اطراف مجانب افقی‌اش به کدام صورت است؟ آزمون وی ا ی پی

۱)
۲)
۳)
۴)

۲۰- اگر نقطهٔ $(۱,۱)$ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۱}{(۲a-۱)x+۴b}$ باشد، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

۲۱- اگر معادلهٔ $\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۰ & a\\ ۱ & -x & -۱\\ -۱ & ۳ & ax\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، مقدار این ریشه کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) -۴

۲۲- اگر A ماتریس وارون‌پذیر و $(A+I)^۳=\bar{O}$ باشد، حاصل $A^{-۱}+I$ کدام است؟

۱) $-(A-I)(A+۲I)$ ۲) $(A+I)(A+۲I)$
۳) $(A-I)(A+۲I)$ ۴) $-(A+I)(A+۲I)$

۲۳- ماتریس $A=[a_{ij}]_{۳\times۳}$ به صورت $a_{ij}=\begin{cases}۰ & ; i=j\\ ۱ & ; i\neq j\end{cases}$ معرفی شده است. به ازای کدام مقدار k رابطهٔ $|kA|A^۲|=۲۵۶$ برقرار است؟

۱) $\sqrt[۸]{۲^۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۹]{۲^۴}$

۲۴- بر روی کدام‌یک از خطوط زیر، تنها یک نقطه وجود دارد که از آن نقطه بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۲x+۲y-۶=۰$ رسم کرد؟

۱) $y=۵$ ۲) $y=۳$ ۳) $y=-۱$ ۴) $y=-۳$

۲۵- فرض کنید دایرهٔ C بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو محور مختصات باشد که از مرکز دایرهٔ C' به معادلهٔ $x^۲+y^۲-۴x-۲y+۱=۰$ عبور می‌کند. معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ C و C' کدام است؟

۱) $۳x+۴y=۱۲$ ۲) $۴x+۳y=۱۲$ ۳) $۲x+۳y=۶$ ۴) $۳x+۲y=۶$

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۲۶- اگر A ماتریس وارون‌پذیر به صورت $A=\begin{bmatrix}|A^{-1}| & ۰ & |-A^{-1}|\\ ۰ & -۱ & |A|\\ ۳|A| & ۰ & |۲A|\end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر سوم و ستون اول ماتریس $A^۲$ کدام است؟

۱) ۱۴۰۴ ۲) ۲۰۵۰ ۳) ۲۹۰۷ ۴) ۱۳۴۰

۲۷- اگر ماتریس $A^{-۱}=\begin{bmatrix}a+۱ & -b\\ -۵ & ۲\end{bmatrix}$ وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases}ax+by=e\\ cx+dy=f\end{cases}$ باشد، آن‌گاه $\frac{a-b}{c-d}$ کدام است؟ (ضرایب دستگاه معادله غیرصفر هستند)

۱) $-\frac{۱}{۲}$ ۲) ۱ ۳) -۱ ۴) $\frac{۱}{۲}$

۲۸- مثلث قائم‌الزاویهٔ $\hat{A}\overset{\triangle}{B}C$ $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را در نظر بگیرید. اگر طول اضلاع قائم ۶ و ۸ سانتی‌متر باشد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از رأس A و وتر به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

۲۹- نقاط $A(۰,۲)$، $B(-۴,۴)$ و $C(-۱,-۳)$ را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد و از نقطهٔ C نیز فاصلهٔ ۲ داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

۳۰- اگر $\begin{vmatrix}۲x & ۱ & ۰\\ -۱ & x & ۳\\ ۲ & ۴ & ۰\end{vmatrix}=۲\begin{vmatrix}\sin\theta & \cos\theta\\ -\cos\theta & \sin\theta\end{vmatrix}$ و ماتریسی مانند A وارون‌پذیر و خود توان باشد و وارون ماتریس $I+xA$ را به صورت $I+\alpha A$ نشان دهیم. α کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{۱}{۷}$ ۲) $\frac{۱}{۷}$ ۳) ۶ ۴) -۶

۳۱- فرض کنید $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و $N_G[a]=N_G[d]=\{a,b,c,d\}$ باشد، اگر $\delta(G)=۱$ باشد، حداکثر تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۲- در گراف G از مرتبهٔ $p=۱۸$، $\Delta(G)=۱۲$ می‌باشد. اگر $q(G)=۱۰۷$ باشد، $\Delta(\overline{G})$ کدام است؟ آزمون وی ای پی

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۳۳- گراف منتظم غیرکامل از مرتبهٔ $p=9$ حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۲۷

۳۴- گراف G از مرتبهٔ $p=9$، ۳۳ یال دارد. اگر در گراف G، ۳ رأس یافت شود که همسایگی باز آن‌ها دو به دو برابر باشند، تعداد رئوس با درجهٔ ماکزیمم در این گراف کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۵- فرض کنید $\frac{1}{3}+\frac{1}{y-2}+\frac{1}{x-1}=0$ باشد، اگر y و x اعدادی صحیح و غیرمنفی باشند، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

۳۶- در تقسیم عدد طبیعی a بر b، خارج‌قسمت برابر با ۱۷ و باقی‌مانده برابر با ۲۹ است. چند عدد ۳رقمی برای a یافت می‌شود که مضرب ۹ باشند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

۳۷- فرض کنید $12|a-5$. اگر $a\overset{7}{\equiv}28$ باشد، باقیماندهٔ $\frac{a-5}{12}$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

۳۸- عدد $x=\overline{ab0ab}$ در معادلهٔ $5x\overset{8}{\equiv}1$ صدق می‌کند. بیشترین مقدار $\overline{ab}$ تا اولین عدد ۳ رقمی چقدر فاصله دارد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

۳۹- اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد n^2+5n+6 و $n^2+8n+15$ برابر با ۱۴۰۳ باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

۴۰- معادلهٔ $27x+39y=1002$ چند دسته جواب طبیعی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

کدکنترل

122

A

پنجشنبه

۱۴۰۳/۱۰/۲۰

سال تحصیلی ۱۴۰۴-۱۴۰۳

مرور نیم‌سال اول دوازدهم

دفترچه شماره ۲

ماز

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی ــ پایهٔ دوازدهم

آزمون الکترونیکی ماز ــ مرحله ۷

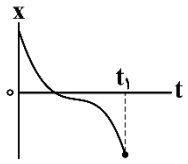
تعداد سؤال: ۶۵ — مدت پاسخگویی: ۷۵ دقیقه

ردیف	مواد امتحانی	تعداد سؤال	از شماره	تا شماره	زمان پاسخگویی
۱	فیزیک	۳۵	۴۱	۷۵	۴۵ دقیقه
۲	شیمی	۳۰	۷۶	۱۰۵	۳۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به کنکور، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازهٔ متن در تمامی آزمون‌های ماز، کاملاً یکسان با استاندارد دفترچه‌های کنکور در نظر گرفته می‌شود.

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

۴۱- نمودار مکان ـ زمان متحرکی به شکل مقابل است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، تندی متحرک چگونه تغییر می‌کند؟



۱) پیوسته افزایش می‌یابد.
۲) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.
۳) پیوسته کاهش می‌یابد.
۴) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.

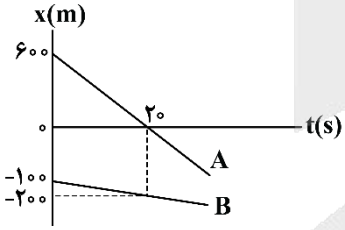
۴۲- متحرکی بر روی محور x درحال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1=0s$ تا $t_2=6s$ در SI برابر $-2\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_2=6s$ تا $t_3=15s$ در SI برابر $3\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1=0$ تا $t_3=15s$ در SI کدام است؟

۱) $\frac{1}{2}\vec{i}$ ۲) $\vec{i}$ ۳) $-\vec{i}$ ۴) $-\frac{1}{2}\vec{i}$

۴۳- شناگری از ابتدای استخری به طول L، یک بار در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 طول استخر را با تندی متوسط s_1 رفته و برمی‌گردد و در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 طول استخر را با تندی متوسط s_2 طی می‌کند. در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، اندازهٔ سرعت متوسط شناگر کدام است؟ آزمون وی ا ی پی

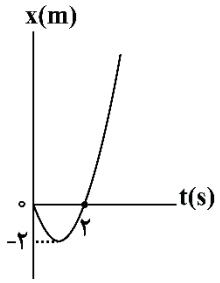
۱) $\frac{s_1s_2}{2(s_1+2s_2)}$ ۲) $\frac{2s_1s_2}{s_2+2s_1}$ ۳) $\frac{s_1s_2}{s_2+2s_1}$ ۴) $\frac{s_1s_2}{s_1+2s_2}$

۴۴- نمودار مکان ـ زمان دو خودروی A و B که روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. اگر ابتدا در لحظهٔ t_1 و سپس در لحظهٔ t_2 فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳۰۰ متر باشد، نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟



۱) ۰/۴
۲) ۲/۵
۳) ۰/۸
۴) ۱/۲۵

۴۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_1=0$ تا $t_2=3s$ چند متر بر ثانیه است؟

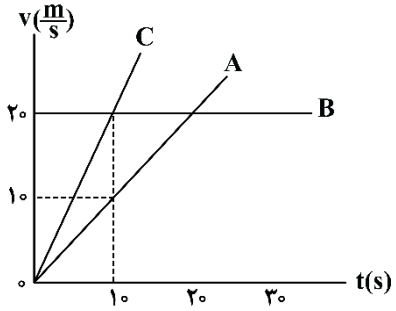


۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۴۶- نمودار سرعت ـ زمان برای سه متحرک A، B و C که بر روی مسیر مستقیم حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. کدام گزینه در مورد مقایسهٔ شتاب حرکت این سه متحرک صحیح است؟



۱) $a_C = ۲a_A > a_B = ۰$

۲) $a_C = \frac{۱}{۲}a_A > a_B = ۰$

۳) $a_B > a_C > a_A$

۴) $a_B = ۲a_C = ۴a_A$

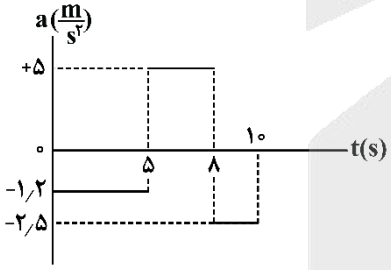
۴۷- متحرکی از حال سکون بر روی محور x با شتاب ثابت، شروع به حرکت می‌کند. مسافت طی‌شده در ثانیهٔ سوم حرکت چند برابر مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ اول حرکت است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{۵}{۹}$ ۳) $\frac{۵}{۷}$ ۴) ۳

۴۸- متحرکی از حال سکون بر روی محور x و در جهت محور x با شتاب ثابت، شروع به حرکت می‌کند و پس از مدت‌زمان $\Delta t_۱$ سرعت خود را با شتاب ثابتی به بزرگی $۱\frac{m}{s^۲}$ کاهش می‌دهد تا در مدت‌زمان $\Delta t_۲$ متوقف شود. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در کل ۳۰۰m و تندی متوسط در بازهٔ زمانی $\Delta t_۱$ برابر $۱۰\frac{m}{s}$ باشد، شتاب متوسط در ۶ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

۴۹- مطابق شکل زیر، نمودار شتاب ـ زمان متحرکی رسم شده که در مبدأ زمان در مکان $x = ۸m$ بوده و دارای سرعت $(-۴\frac{m}{s})\vec{i}$ است. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از محل شروع حرکت، چند متر است؟



۱) ۳۷

۲) ۲۹/۵

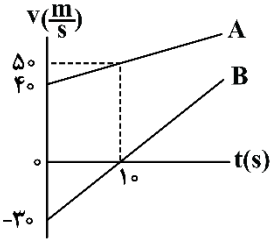
۳) ۴۵

۴) ۲۹

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۵۰- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که از یک مکان بر روی محور x شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظهٔ $t=10s$، فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر چند متر است؟



۱) ۱۵۰
۲) ۳۰۰
۳) ۴۵۰
۴) ۶۰۰

۵۱- خودرویی پشت چراغ‌قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت $2\frac{m}{s^2}$ از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت $36\frac{km}{h}$ از آن سبقت می‌گیرد. پس از گذشت چند ثانیه، خودرو به کامیون می‌رسد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

۵۲- سنگی از صخره‌ای به ارتفاع ۳۱/۲۵m نسبت به سطح زمین، در شرایط خلأ رها می‌شود. سرعت متوسط سنگ از لحظهٔ رها شدن تا لحظهٔ رسیدن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

۵۳- دو گلوله از ارتفاع یکسان از سطح زمین و در شرایط خلأ، با اختلاف زمانی چند ثانیه رها شوند تا در لحظهٔ رسیدن گلولهٔ اول به زمین، جابه‌جایی آن ۹ برابر گلولهٔ دوم باشد و حداکثر فاصلهٔ دو گلوله در حین حرکت به ۱۶۰ متر برسد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

۵۴- چه تعداد از موارد زیر درست است؟ آزمون وی ا ی پی

الف: نیروی وزن سیبی که به یک شاخهٔ درخت آویزان است بر شاخهٔ درخت و واکنش آن بر روی زمین وارد می‌شود.

ب: واکنش نیروی شناوری وارد بر یک کشتی شناور بر سطح آب که درحال تعادل قرار دارد، هم‌اندازه و هم‌جهت با نیروی وزن کشتی است.

پ: واکنش نیرویی که یک قایقران با پارو به آب وارد می‌کند، بر پارو وارد می‌شود.

ت: نیروی اصطکاک وارد بر شخصی که درحال راه رفتن بر روی یک سطح افقی است، در جهت حرکت شخص بوده و واکنش آن بر سطح افقی وارد می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

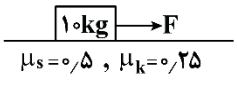
۵۵- دو گوی هم‌اندازه با جرم‌های m و $2m$ را از بالای برجی به ارتفاع h به‌طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، یکسان و بزرگی آن برابر $0/8mg$ باشد، تندی برخورد گوی سنگین‌تر با زمین چند برابر تندی برخورد گوی سبک‌تر با زمین است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{3}$ ۳) $\sqrt{3}$ ۴) ۳

۵۶- فنری به جرم ناچیز از سقف آسانسوری آویزان است. وزنه‌ای را از فنر آویزان می‌کنیم و بعد از تعادل مجموعهٔ جرم ـ فنر، طول فنر به $32cm$ می‌رسد. ناگهان آسانسور با شتاب رو به بالای $2\frac{m}{s^2}$ شروع به حرکت می‌کند و طول فنر به $34cm$ می‌رسد. طول فنر قبل از آویختن وزنه چند سانتی‌متر بوده است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

۵۷- مطابق شکل، به جسمی به جرم $10kg$ که بر روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی F وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت است. بزرگی نیروی F را چند درصد افزایش دهیم تا نیروی خالص وارد بر جسم برابر $30N$ شود؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

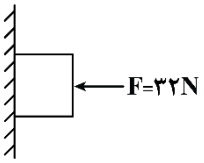


۱) ۵ ۲) ۱۰
۳) ۲۰ ۴) ۳۰

۵۸- رانندهٔ خودرویی با دیدن مانعی که در فاصلهٔ ۵۰ متری آن قرار دارد بلافاصله ترمز می‌کند و بعد از ۴ ثانیه می‌ایستد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک‌ها و سطح جاده برابر ۰/۲ باشد، خودرو در فاصلهٔ چند متری مانع می‌ایستد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۳۴

۵۹- در شکل زیر، جسمی به جرم $2/4kg$ توسط نیروی افقی F، به دیواری فشرده شده است و در حالت سکون قرار دارد. نیرویی که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود، چند برابر وزن جسم است؟ $(g=10\frac{m}{s^2}, \mu_s=0/8)$

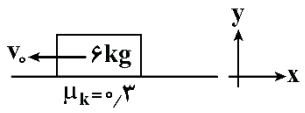


۱) $\sqrt{3}$ ۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{5}{3}$ ۴) $\sqrt{2}$

محل انجام محاسبات

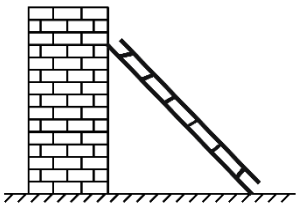
WWW.ArefOnline.ir

۶۰- مطابق شکل زیر، وزنه‌ای را در مبدأ زمان با تندی اولیهٔ $۱۲\frac{m}{s}$ روی سطح افقی به سمت چپ پرتاب می‌کنیم تا تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف شود. اگر از لحظهٔ توقف جسم، نیروی ثابت $\vec{F}=۲۰(N)\vec{i}$ به آن وارد شود. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، وزنه به مکان اولیه‌اش برمی‌گردد؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۲۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

۶۱- مطابق شکل، نردبان ساکنی به جرم ۲۰ کیلوگرم به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است و دیوار، نیروی ۱۰۰ نیوتون بر آن وارد می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و پای نردبان ۰/۷۵ است. نیروی اصطکاک بین نردبان و زمین چند نیوتون است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۱۰۰
۲) ۱۵۰
۳) ۲۰۰
۴) ۲۵۰

۶۲- جرم جسم A، ۵۰ درصد کم‌تر از جرم جسم B است. اگر هر دو جسم با تندی ثابت حرکت کنند، طوری که تکانهٔ جسم A، ۴ برابر تکانهٔ جسم B باشد، انرژی جنبشی جسم B چند برابر انرژی جنبشی جسم A است؟

۱) $\frac{۱}{۸}$
۲) $\frac{۱}{۱۶}$
۳) $\frac{۱}{۳۲}$
۴) $\frac{۱}{۶۴}$

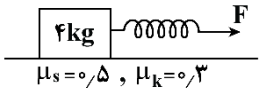
۶۳- معادلهٔ تکانه ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $p=۲t^۲-۴t+۶$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ چند نیوتون است؟

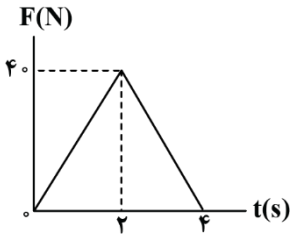
۱) $۸\vec{i}$
۲) $-۸\vec{i}$
۳) $۴\vec{i}$
۴) $-۴\vec{i}$

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۶۴- جسمی ساکن به جرم $4kg$ به یک فنر با طول اولیهٔ $30cm$ و ثابت فنر $400\frac{N}{m}$ بسته شده است. نمودار تغییرات نیروی فنر (F) برحسب زمان، مطابق شکل زیر داده شده است. چه تعداد از موارد زیر درست است؟ $(g=10\frac{N}{kg})$





الف: در لحظهٔ شروع حرکت، طول فنر $35cm$ است.

ب: در لحظه‌ای که طول فنر به $33cm$ می‌رسد، نیروی خالص وارد بر جسم، صفر است.

پ: به مدت ۲/۴ ثانیه، حرکت جسم تندشونده است.

۱) صفر

۲) ۱

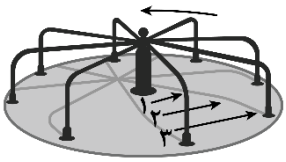
۳) ۲

۴) ۳

۶۵- یک تلسکوپ فضایی در ارتفاع تقریبی ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین به دور زمین می‌چرخد. شتاب گرانشی در این فاصله چند واحد SI است؟ $(g_0=10\frac{m}{s^2}\ ,\ R_e=6400km)$

۱) ۷/۶ ۲) ۵/۶ ۳) ۶/۴ ۴) ۸/۴

۶۶- یک دیسک گردان در شهربازی را درنظر بگیرید که توسط یک موتور الکتریکی می‌چرخد. فرض کنید سه فرد (۱)، (۲) و (۳) در فاصله‌های d، $2d$ و $3d$ از مرکز آن قرار دارند. کدام‌یک از مقایسه‌های زیر در مورد دورهٔ تناوب، بسامد، تندی حرکت و شتاب مرکزگرا برای این افراد نادرست است؟



۱) $T_1=T_2=T_3$

۲) $f_1=f_2=f_3$

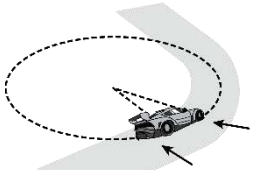
۳) $v_1=2v_2=3v_3$

۴) $a_1=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{3}a_3$

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۶۷- مطابق شکل، خودرویی به جرم ۱۵۰۰kg را درنظر بگیرید که می‌خواهد در یک پیچ مسطح افقی به شعاع ۵۰m بدون آن‌که بلغزد، دور بزند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک و سطح جاده ۱ باشد، حداکثر تندی خودرو چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$


نیروهای اصطکاک ایستایی

۱) $5\sqrt{2}$
۲) $10\sqrt{5}$
۳) ۲۵
۴) ۵۰

۶۸- تندی گردش ماهوارهٔ A به دور زمین، ۲۰ درصد کم‌تر از تندی گردش ماهوارهٔ B به دور زمین است. شعاع مدار ماهوارهٔ A، چند برابر شعاع مدار ماهوارهٔ B است؟

۱) $\frac{4}{5}$
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{16}{25}$
۴) $\frac{25}{16}$

۶۹- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، در SI به‌صورت $x=0/4\cos 4\pi t$ است. از لحظهٔ صفر تا لحظه‌ای که مسافت طی‌شده توسط نوسانگر برابر ۱۴۰cm می‌شود، اندازهٔ سرعت متوسط نوسانگر چند واحد SI است؟

۱) ۰/۴۸
۲) ۰/۲۴
۳) ۰/۱۸
۴) ۰/۱۲

۷۰- نوسانگری بر روی پاره‌خطی به طول ۲۰cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در هر بازهٔ زمانی دلخواهی به مدت ۱ ثانیه، ۱۰ بار به بیشینهٔ تندی خود می‌رسد. اندازهٔ بیش‌ترین تندی متوسط نوسانگر در یک بازهٔ زمانی $\frac{1}{30}$ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه بیش‌تر از کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در یک بازهٔ زمانی $\frac{1}{20}$ ثانیه‌ای می‌باشد؟

۱) $4\sqrt{2}$
۲) $2\sqrt{2}$
۳) $3-2\sqrt{2}$
۴) $2\sqrt{2}-1$

۷۱- جرم خودرویی همراه با سرنشینان آن ۱۶۰۰kg است. این خودرو روی چهار فنر که ثابت هرکدام $10^5\frac{N}{m}$ می‌باشد، سوار شده است. بسامد ارتعاش خودرو وقتی از چاله‌ای می‌گذرد، چند هرتز است؟ (فرض کنید وزن خودرو به‌طور یکنواخت روی فنرهای چهارچرخ توزیع شده است و $\pi=\sqrt{10}$)

۱) ۱/۲۵
۲) ۰/۴
۳) ۲/۵
۴) ۵

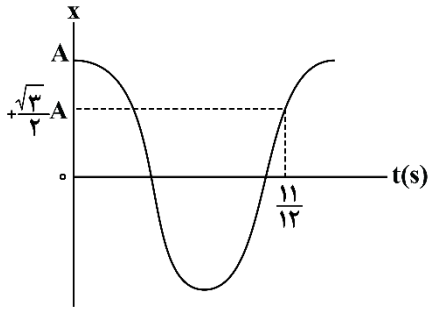
محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۷۲- وزنه‌ای به جرم ۹۰۰ گرم به انتهای فنری با ثابت $۴/۵\frac{N}{cm}$ بسته شده است و روی سطح افقی بدون اصطکاک به نوسان درمی‌آید. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین طول فنر به‌ترتیب ۶۰cm و ۴۰cm باشد، بیشینهٔ تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۱۰}$

۷۳- نمودار مکان ـ زمان آونگ ساده‌ای که به‌صورت هماهنگ ساده نوسان می‌کند به‌صورت زیر است. اگر طول آونگ ۱۲/۵cm کاهش یابد، دورهٔ تناوب آن چند برابر می‌شود؟ $(\pi^۲ = g)$

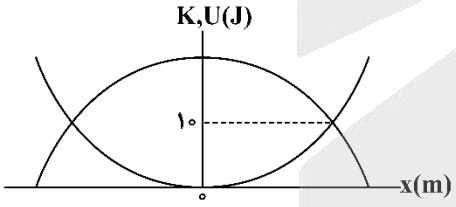


۱) $\frac{۱}{۲}$
۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$
۳) $\sqrt{۲}$
۴) ۲

۷۴- نوسانگری به جرم ۲۰۰ گرم بر روی پاره‌خطی به طول ۱۰cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر بسامد نوسانگر برابر ۵Hz باشد، بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر چند میلی‌ژول است؟ $(\pi = ۳)$

۱) ۴۵ ۲) ۴۵۰ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۲۵

۷۵- نمودار انرژی‌های جنبشی (K) و پتانسیل کشسانی (U) یک نوسانگر هماهنگ ساده برحسب مکان آن مطابق شکل زیر است. اگر مسافت طی‌شدهٔ نوسانگر در هر دورهٔ نوسان ۴۰cm باشد، نیروی خالص وارد بر نوسانگر در لحظهٔ تغییر جهت بردار تکانهٔ آن کدام است؟



۱) ۸۰۰
۲) ۲۰۰
۳) ۴۰۰
۴) ۱۶۰۰

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۷۶- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) میانگین جهانی شاخص امید به زندگی، بیشتر از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.

۲) صابون مایع را از گرم کردن مخلوط روغن‌های مایع مثل روغن زیتون با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند.

۳) اگر ظروف چرب را به خاکستر آغشته کرده و با آب گرم شست‌وشو بدهیم، چربی‌ها آسان‌تر تمیز می‌شوند.

۴) اتیلن گلیکول، الکلی است که به عنوان ضدیخ کاربرد داشته و در هر مولکول آن، ۷ پیوند اشتراکی وجود دارد.

۷۷- تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرف شده در فرایند تولید ۰/۱ مول پاک‌کننده صابونی جامد با استفاده از یک اسید چرب، برابر با ۲۰/۲ گرم است. اگر همه پیوندهای کربن-کربن موجود در این پاک‌کننده یگانه باشند، شمار اتم‌های کربن موجود در هر مول از این پاک‌کننده کدام است؟ ($H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $C = ۱۲$ و $O = ۱۶$ و $Na = ۲۳$)

آب + پاک‌کننده صابونی ← محلول سدیم هیدروکسید + اسید چرب : معادله واکنش

۱) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۴}$ ۲) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۴}$ ۳) $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۴}$ ۴) $۹/۰۳ \times ۱۰^{۲۴}$

۷۸- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار را می‌توان به کمک صابون‌ها پاک کرد.

۲) در ساختار بخش قطبی اسیدهای چرب، همانند استرهای سنگین، پیوند دوگانه کربن-اکسیژن یافت می‌شود.

۳) شربت معده، نمونه‌ای از مخلوط‌های ناپایدار بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن مشخص است.

۴) با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، بخش قطبی ذرات صابون در کنار هم قرار می‌گیرد.

۷۹- جرم یک نمونه اوره، برابر با جرم متانول موجود در ۶ لیتر محلول ۰/۱ مولار این ماده است. در ساختار این نمونه از اوره، تقریبا چند اتم هیدروژن وجود دارد؟ ($H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $C = ۱۲$ و $N = ۱۴$ و $O = ۱۶$)

۱) $۱/۵۴ \times ۱۰^{۲۴}$ ۲) $۷/۷ \times ۱۰^{۲۳}$ ۳) $۱/۳۲ \times ۱۰^{۲۴}$ ۴) $۶/۶ \times ۱۰^{۲۳}$

۸۰- اگر ثابت یونش اسید HA در محلول ۰/۵ مولار از این ماده برابر ۱/۱۲۵ مول بر لیتر باشد، درصد یونش این اسید در محلول مورد نظر چند برابر درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید در محلولی از این ماده با غلظت ۱ مولار و $pH = ۲$ خواهد بود؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

۸۱- اگر pH محلول یک اسید آلی تک‌پروتون‌دار با درصد جرمی ۰/۷۸٪ و چگالی ۱ گرم بر میلی‌لیتر برابر با ۱/۵ باشد، جرم مولی ذرات سازنده این اسید برابر با چند گرم بر مول می‌شود؟ (ثابت یونش این اسید ۹×۱۰^{-۳} است.)

۱) ۴۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۴ ۴) ۷۸

۸۲- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.

۲) در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، به یقین پیوند دوگانه بین اتم‌ها وجود دارد.

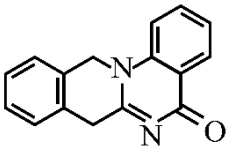
۳) در ساختار هر پاک‌کننده صابونی، به یقین ذره‌هایی یافت می‌شوند که در تشکیل هیچ پیوند اشتراکی شرکت نکرده‌اند.

۴) شیر، حاوی توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت بوده و مسیر حرکت نور، همانند محلول آبی شکر، در آن مشخص است.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۸۳- شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از ترکیب مقابل، چند برابر شمار این پیوندها در ساختار یون استات است؟



۱) ۵ ۲) ۶
۳) ۷ ۴) ۸

۸۴- مقدار pH محلول حاصل از افزودن ۴۰۰ میلی‌لیتر آب خالص به ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = ۲/۳$، چقدر بوده و غلظت یون کلرید در محلول حاصل از این فرایند برابر با چند ppm می‌شود؟ (چگالی محلول را برابر با ۱/۲۵ گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $Cl = ۳۵/۵\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۲/۷ – ۴۴/۳ ۲) ۳ – ۴۴/۳
۳) ۲/۷ – ۲۸/۴ ۴) ۳ – ۲۸/۴

۸۵- اگر مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول حاصل از حل کردن مقداری فورمیک اسید ($K_a = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$) در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب در دمای معین برابر ۰/۰۳ مول بر لیتر باشد، pH محلول و جرم تقریبی فورمیک اسید حل شده در محلول به ترتیب کدام است؟

(از تغییر حجم محلول صرف‌نظر کنید. $H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $C = ۱۲$ و $O = ۱۶$)

۱) ۱/۳ ـ ۲۷/۶ ۲) ۱/۳ ـ ۲۳/۳
۳) ۱/۸ ـ ۲۷/۶ ۴) ۱/۸ ـ ۲۳/۳

۸۶- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) با افزودن سدیم هیدروژن کربنات به شوینده‌ها، قدرت این مواد برای پاک‌کردن چربی‌ها بیشتر می‌شود.
۲) مقدار $[H_۳O^+]$ در شیره ترشح شده از معده انسان، بیشتر از غلظت این یون در محلولی با $pH = ۲$ است.
۳) دیواره داخلی معده انسان، به طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در معده را جذب می‌کند.
۴) منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضداسیدها بوده و هر مول از آن، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.

۸۷- مقدار $۲۵mL$ محلول هیدروبرمیک اسید با $pH = ۱$ به $۱۷۵mL$ محلول KOH اضافه می‌شود. اگر pH محلول نهایی برابر ۱۳/۴ باشد، جرم تقریبی یون K^+ در محلول بازی اولیه برابر با چند گرم بوده و درصد جرمی یون Br^- در محلول پایانی چقدر است؟

(چگالی محلول‌ها را برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $K = ۳۹ : g.mol^{-۱}$ و $Br = ۸۰$)

$$HBr(aq) + KOH(aq) \rightarrow H_۲O(l) + KBr(aq)$$

۱) ۰/۸ ، ۲/۰۵ ۲) ۰/۱ ، ۲/۰۵
۳) ۰/۸ ، ۴/۱ ۴) ۰/۱ ، ۴/۱

۸۸- یک نمونه ۱/۶ گرمی از گاز گوگرد تری‌اکسید را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول مورد نظر را به ۴۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. برای خنثی کردن ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول ایجاد شده، به چند لیتر محلول ۰/۰۲ مولار سود نیاز داریم؟

($S = ۳۲$ و $O = ۱۶ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵
۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۸۹- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: برخلاف خون موجود در رگ‌ها، محتویات معده خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است.

ب: در شرایط یکسان، تعداد ذرات اسید یونیده نشده در محلول نیتریک اسید کمتر از محلول نیترواسید است.

پ: در شرایط استاندارد(STP)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ در محلول‌های آبی برابر 10^{-14} است.

ت: هیدروسیانیک اسید، برخلاف سولفوریک اسید، یک اسید ضعیف بوده و مقدار ثابت یونش آن کوچک‌تر از صفر است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «پ» و «ت» ۴) «الف» و «ت»

۹۰- جرم‌های برابر از باریم اکسید و آمونیاک را به طور مجزا در ۱ لیتر آب حل می‌کنیم. اگر درجه یونش آمونیاک در محلول حاصل از این فرایند برابر با ۰/۰۲ باشد، pH محلول آمونیاک تقریبا به اندازه ..... واحد ..... از محلول دیگر می‌شود.

($H = 1 : g.mol^{-1}$ و $N = 14$ و $O = 16$ و $Ba = 137$)

۱) ۱ ـ کمتر ۲) ۱ ـ بیشتر ۳) ۰/۶ ـ کمتر ۴) ۰/۶ ـ بیشتر

۹۱- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلول یک اسید با غلظت اولیهٔ اسید برابر باشد، ثابت یونش آن اسید بسیار بزرگ است.

۲) یک نمونه از آب خالص، برخلاف نمونه‌ای از آب گازدار و آب‌نمک، اصلا جریان الکتریسیته را از خود عبور نخواهد داد.

۳) با افزودن مقداری آب خالص به محلول آبی از نیترواسید، درجه یونش اسید مورد نظر در محلول افزایش پیدا می‌کند.

۴) اگر K_a اسید HA بزرگ‌تر از HB باشد، با دانستن pH اسید HA، درباره pH اسید دیگر نمی‌توان اظهار نظر کرد.

۹۲- در شرایط استاندارد، ۴۴/۸ لیتر گاز HX را در ۸۰۰ میلی‌لیتر آب خالص حل می‌کنیم. درصد یونش مولکول‌های اسید در محلول ایجاد شده برابر با چقدر باشد، تا محلول ایجاد شده قابل استفاده در ساختار نیم‌سلول SHE شود؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

۹۳- یک نمونه ۳ گرمی از منیزیم را در واکنش اکسایش شرکت داده و الکترون‌های حاصل از این فرایند را روی سطح یک کره فلزی به شعاع $5cm$ قرار می‌دهیم. اگر این الکترون‌ها به‌صورت متقارن روی سطح کره پخش شوند، در هر سانتی‌متر از سطح این کره فلزی تقریبا چند عدد الکترون قرار خواهد گرفت؟ (عدد π را برابر ۳ در نظر بگیرید.

($Mg = 24 : g.mol^{-1}$) آزمون وی ا ی پی

۱) $2/5 \times 10^{21}$ ۲) 5×10^{21} ۳) $2/5 \times 10^{20}$ ۴) 5×10^{20}

۹۴- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) در واکنش هیدروکلریک اسید با فلزها، یون کلرید نقشی در فرایند اکسایش ـ کاهش ندارد.

۲) آخرین فلز واسطه موجود در تناوب چهارم، در مقایسه با آلومینیم، قدرت کاهندگی بیشتری دارد.

۳) در واکنش میان فلز روی با گاز اکسیژن، هر اتم از گونه کاهنده ۲ الکترون با $l = 2$ از دست خواهد داد.

۴) با قرار دادن منیزیم در محلول مس(II) سولفات، دما بالا رفته و مجموع غلظت کاتیون‌ها در محلول بیشتر می‌شود.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۹۵- چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: کاهش اثر نقص عضو، نیم‌رخی از افزایش سطح رفاه بوده و به دنبال رشد دانش و پیشرفت فناوری محقق شده است.

ب: با استفاده از یک لیمو و دو تیغه از جنس Zn و Cu، می‌توان بخشی از انرژی ذخیره شده در فلزها را آزاد کرد.

پ: پرکاربردترین شکل انرژی در استفاده از فناوری‌هایی مثل فناوری گرمایش آسان‌تر، انرژی الکتریکی است.

ت: اکسیژن نافلزی فعال است که با همه عناصر فلزی واکنش داده و آنها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۹۶- مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد در واکنش اکسایش-کاهش زیر چقدر بوده و به ازای مبادله ۰/۶ مول الکترون در این واکنش، چند مول از گونه اکسنده مصرف می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)

$$Cr_2O_7^{2-} + Sn^{2+} + H^+ \rightarrow Sn^{4+} + H_2O + Cr^{3+}$$

۱) ۲۸ ـ ۰/۱۵ ۲) ۲۸ ـ ۰/۱ ۳) ۳۰ ـ ۰/۱۵ ۴) ۳۰ ـ ۰/۱

۹۷- یک قطعه فلز روی را در محلولی از مس(II) سولفات قرار می‌دهیم. اگر در طول یک بازه زمانی، ۳ مول الکترون بین گونه‌های شرکت کننده در این واکنش مبادله شده باشد، میزان تغییر جرم تیغه فلزی برابر با چند گرم می‌شود؟

(کل فلز تولید شده روی سطح تیغه رسوب می‌کند. $Cu = ۶۴ : g.mol^{-1}$ و $Zn = ۶۵$)

۱) ۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

۹۸- برای تغییر مقدار emf سلول گالوانی روی-نقره، از کدام اقدام زیر نمی‌توان استفاده کرد؟

۱) جایگزین کردن الکترود روی با الکترود آهن

۲) تغییر غلظت کاتیون در ساختار نیم‌سلول نقره

۳) تغییر جرم تیغه فلز روی در نیم‌سلول روی

۴) تغییر دمای محیط انجام واکنش الکتروشیمیایی

۹۹- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی سلول روی-مس، مخالف جهت حرکت آنیون‌ها در دیواره متخلخل آن است.

ب: نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره، کمتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره است.

پ: با قرار دادن یک تیغه مس در محلول آبی از نیتریک اسید، با گذشت زمان، نیم‌سلولی از مس ایجاد می‌شود.

ت: در سری الکتروشیمیایی عناصر فلزی، عنصر لیتیم در موقعیت بالاتری در مقایسه با عنصر روی قرار دارد.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «پ» و «ت» ۴) «الف» و «ت»

۱۰۰- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول $CuSO_4$، بیشتر از گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول Ag_2SO_4 است.

۲) در سری الکتروشیمیایی، گونه کاهنده در سمت راست و گونه اکسنده در سمت چپ نیم‌واکنش‌ها نوشته می‌شود.

۳) بازده تولید انرژی الکتریکی در نیروگاه حرارتی، نسبت به بازده تولید انرژی در سلول‌های سوختی کمتر است.

۴) واکنش‌هایی که در برخی از باتری‌های لیتیمی انجام می‌شوند، از نوع واکنش‌های برگشت‌پذیر هستند.

محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

۱۰۱- اگر مدتی پس از شروع واکنش الکتروشیمیایی در سلول آلومینیم-مس، اختلاف جرم الکترود کاتد و الکترود آند به $۷/۳۸g$ برسد، در طول این مدت چند گرم از جرم الکترود آند کاسته شده است؟ (جرم الکترودهای استفاده شده در ابتدای واکنش یکسان بوده است. $Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱}$ و $Al = ۲۷$)

۱) ۰/۸۱ ۲) ۱/۶۲ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۵/۷۶

۱۰۲- در ساختار یک اسید چرب، ۱۸ اتم کربن وجود داشته و مجموع عدد اکسایش این اتم‌های کربن برابر با ۲۴- است. شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از این ماده، چند برابر شمار این پیوندها در مولکول $SO_۳$ است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

۱۰۳- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: در آبکاری قطعه‌ای از جنس فلز مس با فلز نقره، قطعه مسی را به قطب منفی باتری متصل می‌کنند.

ب: در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، عنصری در سمت کاتد تولید می‌شود که در دمای اتاق حالت گاز دارد.

پ: در فرایند برقکافت مقداری منیزیم کلرید مذاب، فراوردهٔ کاتدی نسبت به الکترولیت مذاب چگالی کمتری دارد.

ت: چون اتم‌های سدیم بسیار پایدارتر از یون‌های سدیم هستند، برای تهیه فلز سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد.

ث: در سلول نورالکتروشیمیایی که در تهیه گاز $H_۲$ کاربرد دارد، عدد اکسایش سیلیسیم در سمت کاتد تغییر می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

۱۰۴- مجموع جرم تیغه‌های کربنی بکار رفته در سلول مورد استفاده برای فرایند هال برابر با ۷۲۰ گرم است. این تیغه‌های کربنی به چه قطبی از مولد متصل بوده و از آن‌ها برای استخراج حداکثر چند گرم آلومینیم می‌توان استفاده کرد؟ ($C = ۱۲ : g.mol^{-۱}$ و $Al = ۲۷$)

معادله واکنش موازنه شود. $Al_۲O_۳(l) + C(s) \rightarrow Al(l) + CO_۲(g)$

۱) مثبت ـ ۱۲۱۵ ۲) منفی ـ ۱۲۱۵ ۳) مثبت ـ ۲۱۶۰ ۴) منفی ـ ۲۱۶۰

۱۰۵- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) در ساختار نوعی از آهن که برای تهیه قوطی کنسرو استفاده می‌شود، فلزی با $E^\circ < ۰$ در سطح قرار گرفته است.

۲) تمایل اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیطی که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند، بیشتر از محیط خنثی است.

۳) قیراندود کردن و روکش دادن، از جمله روش‌هایی هستند که به طور کامل جلوی خوردگی آهن را می‌گیرند.

۴) در معادله واکنش خوردگی آهن، تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده، ۱/۵ برابر هر اتم از گونه اکسنده است.

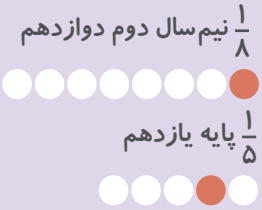
محل انجام محاسبات

WWW.ArefOnline.ir

بودجه‌بندی دروس آزمون بعد...

تاریخ برگزاری: ۱۱ بهمن

میزان پیشروی:



حسابان	هندسه	گسسته و آمار و احتمال	فیزیک	شیمی
دوازدهم + پایه مرتبط	هندسه (۳)	گسسته	فیزیک (۳)	شیمی (۳)
مشتق صفحه‌های ۷۱ تا ۸۳	آشنایی با مقاطع مخروطی (تا پایان بیضی) صفحه‌های ۴۷ تا ۵۰	گراف و مدل‌سازی (تا انتهای کار در کلاس صفحه ۴۷) صفحه‌های ۴۳ تا ۴۷	نوسان و موج (تا پایان موج طولی و مشخصه‌های آن) صفحه‌های ۶۹ تا ۷۸	شیمی جلوه‌ای از هنر، زیبایی و ماندگاری (هنرنمایی شاره) صفحه‌های ۶۷ تا ۷۹ پایهٔ مرتبط: شیمی ۱: صفحه‌های ۴۰، ۴۱، ۵۴ تا ۵۶
پایه	هندسه (۲)	آمارواحتمال	فیزیک (۲)	شیمی (۲)
ریاضی ۱: مجموعه، الگو و دنباله، توان‌های گویا و عبارت‌های جبری صفحه‌های ۱ تا ۲۷، ۴۷ تا ۶۷ حسابان ۱: جبر و معادله صفحه‌های ۱ تا ۶	تبدیل‌های هندسی و کاربردها صفحه‌های ۳۱ تا ۵۴	_	الکتریسیته ساکن/ جریان الکتریکی و مدارهای جریان مستقیم صفحه‌های ۳۲ تا ۶۱	قدر هدایای زمینی را بدانیم صفحه‌های ۲۵ تا ۵۰

WWW.ArefOnline.ir

مرکز مشاوره عارف

دفترچه پاسخ

مرور نیم سال اول دوازدهم

پنجشنبه
۱۴۰۳/۱۰/۲۰

برای دیدن پاسخنامه ویدئویی آزمون
QRcode بالارو اسکن یا روی لینک زیر کلیک کن!

مشاهدهٔ پاسخنامهٔ ویدئویی آزمون

گروه آزمایشی علوم ریاضی و فنی ــ پایهٔ دوازدهم
آزمون الکترونیکی ماز ــ مرحله ۷

درس	مسئول درس	طراحان	ویراستاران
ریاضیات	حسین شفیع‌زاده سیدجواد نظری مهرداد کیوان	محمد پورسعید ـ رضا توکلی سوگند روشنی ـ امیرحسین ابومحبوب مهدی عزیزی ـ کیوان دارابی	مهرداد اسپیدکار ـ حمیدرضا ولیپور علیرضا ملک‌حسینی
فیزیک	سجاد صادقی‌زاده سعید احمدی	سعید احمدی ـ مجید رجبی‌وندچالی حسین عبدوی‌نژاد ـ احسان ایرانی ـ سجاد صادقی‌زاده امیررضا خوینی‌ها ـ مجید میرزائی محسن قندچلر ـ مهدی یوسفی	حسین عبدوی‌نژاد ـ حامد نبی‌منصور
شیمی	فرشاد هادیان‌فرد	فرشاد هادیان‌فرد ـ حسین ایروانی محمد کهنه‌پوشی	فرهنگ امیری محمد داوودآبادی‌فراهانی بنیامین بهرامی

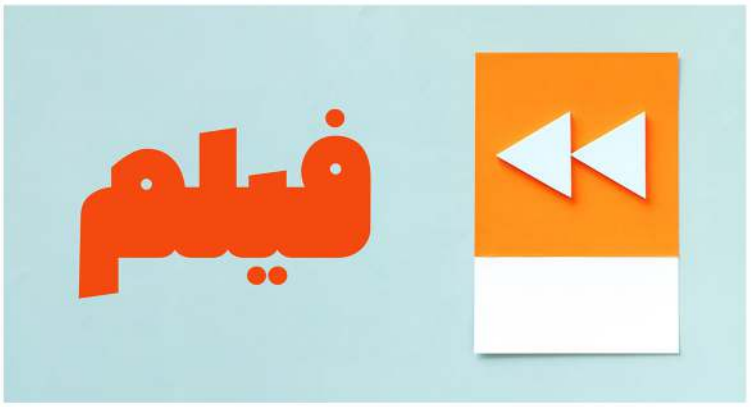
مدیر آزمون: دکتر رسول خنجری

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.
به دلیل عدم رضایت تیم ماز، هرگونه استفادهٔ غیرقانونی از دفترچه سؤالات و پاسخنامه ماز برای تمامی اشخاص، شرعاً حرام است.

آزمون

کارنامه
رتبه های
برتر
رتبه های ۱ تا ۳۰۰۰

جزوه


فیلم

مشاوره

www.
arefonline.ir
مرکز مشاوره عارف

سلام، دمت گرم که تلاشت رو ادامه میدی و با نتیجه آزمون یادگیریت رو کامل میکنی!

خیال کن میخوای توی شب تاریک از یک جنگل عبور کنی و به مقصدی که اولین باره سمتش میری برسی. اگه توی این مسیر یک چراغ و یک مسیریاب داشته باشی خیالت راحت‌تره ولی قدم‌ها رو خودت باید برداری ما همراهت هستیم تا توی این مسیر که بارها با دانش‌آموزهای موفق دیگه طی کردیم، تو رو به سمت هدفت راهنمایی کنیم. امسال بیش از ۲۰۰ هزار نفر در آزمون‌های متوسطه دوم ماز شرکت می‌کنن و شما میتونی ارزیابی دقیقی از خودت داشته باشی و با این بازخورد از یک جامعهٔ آماری بالا ساعت مطالعه‌ات رو بالا ببری و روش مطالعه‌ات رو اصلاح کنی و مرحله به مرحله خودت رو به هدفت نزدیک‌تر کنی. ما هم تلاشمون رو می‌کنیم که هرچی به عنوان چراغ و مسیریابی نیاز داری در اختیارت بذاریم تا با خیال راحت این مسیر رو طی کنی :) حالایک سری از کارهایی که به ویژگی‌های آزمون اضافه کردیم رو بهت میگم...

بخشی از کارهایی که اخیراً برای ارتقای کیفیت و خدمات آزمون ماز انجام شده:

برنامهٔ مطالعاتی برای تمام رشته‌ها و تمام پایه‌ها: می‌دونیم که برنامه‌ریزی و رسیدن به بودجه‌بندی آزمون کار سختیه و کلی انرژی باید صرف این برنامه‌ریزی بشه! پس ما بعد از هر آزمون، تمام لقمه‌های مطالعاتی + یک پلتفرم مطالعاتی (کاربرگ مطالعاتی) برای رسیدن به آزمون بعد در اختیارتون قرار می‌دیم تا با خیال راحت و بدون دغدغه، برنامه‌ریزی کنید و به آزمون بعد برسید.

پاسخنامهٔ ویدیویی: با اینکه پاسخنامهٔ آزمون رو سعی می‌کنیم به کامل‌ترین شکل ممکن براتون بنویسیم؛ اما باز هم اگه برای حل برخی سؤالات دچار ابهام شدین می‌تونید از پاسخنامهٔ ویدیویی آزمون استفاده کنید. این پاسخنامه توسط اساتید کلاس آنلاین ماز و مؤلفان و طراحان آزمون ماز حاضر میشه.

آزمون‌های تیک آبی برای جلوگیری از تقلب: درسته که ما تبلیغات تلویزیونی آن چنانی نداریم، اما به لطف نظرات مثبت شما، جامعهٔ آماری ماز خیلی زیاد شده و کسب رتبهٔ واقعی در این جامعهٔ آماری می‌تونه بهتون کمک کنه که رتبهٔ واقعی‌تون در کنکور رو هم تخمین بزنید.
حالا برای اینکه شانس تقلب در آزمون به حداقل برسه، در برخی از آزمون‌های ماز برای یک درس، آزمون تیک آبی گرفته میشه (حدود ۱۰ تا ۱۵ سؤال) که این آزمون برای هر فرد متفاوت از بقیه افراد هست، تأثیری هم در درصد و کارنامه نداره، اما اگه تفاوت تراز یک نفر در این آزمون با همون درس در آزمون ماز، فاحش باشه، به این معنی هست که احتمالاً این فرد تقلب کرده و به این فرد رتبه داده نمیشه، تا کسانی که تقلب نکردن، رتبهٔ واقعی خودشون رو ببینن. پس حتماً در آزمون تیک آبی شرکت کنید و به همهٔ سؤالاتش پاسخ بدید.

درجهٔ سختی تصادفی: حتماً از کسانی که کنکور دادن شنیدین که در کنکور هر سال، به صورت کاملاً تصادفی یک یا چند تا از دروس، سخت‌تر از حالت عادی طراحی میشن! و ممکنه سر جلسه کنکور خیلی متعجب بشید و استراتژی کنکورتون به طور کل به هم بخوره! ما برای آمادگی این حالت، در آزمون‌های نیمسال دوم ماز، در هر آزمون یک درس رو به صورت تصادفی سخت‌تر از حالت عادی طراحی می‌کنیم تا برای هر شرایطی در کنکور سراسری، آمادگی کامل داشته باشید.

سرنخ برای درصد گرفتن در درس‌های دشوار: بعضی درس‌ها ذاتاً دشوار هستن، نه فقط برای شما، برای همه! به طور مثال درس ریاضی برای خود من (رسول خنجری)، درس سختی بوده همیشه! اما توی کنکور خودم (کنکور ۹۲)، ریاضی رو تقریبا ۵۷ درصد زدم! چطوری؟ با پیداکردن سؤال‌های آسون (به جای اتلاف وقت سر سؤال‌های سخت)! حالا برای یادگیری این استراتژی و درصد گرفتن در درس‌های دشوار، داخل بعضی از آزمون‌ها براتون سرنخ‌هایی گذاشتیم، مثلاً سرنخ سؤالات «مشابه تمرین کتاب درسی» در این آزمون! این سؤالات هم به درد امتحان نهایی‌تون میخورن، هم میتونن توی کنکور طرح بشن! و هم حل کردنشون براتون راحت‌تره! و باید یاد بگیرید این جنس سؤالات رو داخل هر آزمونی از جمله کنکور، پیدا کنید و اول اونارو حل کنید.

کلام آخر:

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ماز با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

راستی! حتماً در نظرسنجی آزمون شرکت کنین و نظرات و پیشنهادات‌تون رو برامون بنویسین.

ریاضی

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۳۲- حداقل چند عضو از مجموعهٔ اعداد طبیعی کمتر از ۲۱ انتخاب کنیم تا مطمئن باشیم حداقل ۲ عضو با تفاضل ۱۱ در بین آن‌ها وجود دارد؟

۱) ۱۰ ۲) ۱۱ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

(مرحله ۱۸ آزمون‌های سالیانه ــ ریاضیات رشته ریاضی)

۳۹- حداقل چند عضو از مجموعه $\{۱۴,۱۵,۱۶,...,۲۰,۲۲,۲۳,۲۴,...,۲۸\}$ انتخاب کنیم تا به طور قطع، لااقل سه عضو انتخاب شده اعداد متوالی باشند؟

۱) ۱۲ ۲) ۱۱ ۳) ۱۰ ۴) ۹

(کنکور تیر ۱۴۰۳ ــ ریاضیات رشته ریاضی)

برای مشاهدهٔ همهٔ مطابقت‌ها اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir یا رو این کلیک کن!

WWW.ArefOnline.ir

دانش‌آموزان عزیز ماز

ما اومدیم با یکی دیگه از آزمون‌هامون

توی این آزمون یه سری مباحث جدید بهمون اضافه شدن حالا اگه می‌خوای ببینی توی این آزمون چه خبره باهامون همراه باش...

- آقا! + بله؟

- توی این آزمون دقیقا ازچه قسمت‌هایی سوال طرح کردین؟

+ مباحثی که توی این آزمون ازش سوال اومده رو می‌تونی توی جدول پایینی ببینی...

بخش	کتاب	فصل	مباحث	تعداد سوال
دوازدهم	حسابان ۲	فصل اول	تبدیل نمودار توابع	۳
			یکنوایی توابع	۱
			بخش‌پذیری و قضیهٔ تقسیم	۱
		فصل دوم	تناوب و تانژانت	۴
			معادلات مثلثاتی	۴
		فصل سوم	حدهای نامتناهی	۲
			حد در بی‌نهایت	۵
	هندسه ۳	فصل اول	ماتریس و اعمال روی ماتریس‌ها	۱
			وارون ماتریس و دترمینان	۵
		فصل دوم	آشنایی با مقاطع مخروطی	۱
			دایره	۳
	ریاضیات گسسته	فصل اول	استدلال ریاضی	-
			بخش پذیری در اعداد صحیح	۲
			هم‌نهشتی در اعداد صحیح و کاربردها	۴
		فصل دوم	معرفی گراف	۴

- آقا! + بله؟

- از این مباحثی که گفتین، کدوما مهمترن؟

+ خب همه مباحث اهمیت خاص خودشون رو دارن و می‌تونن به صورت مجزا و یا ترکیبی با بقیه مباحث توی کنکور مطرح بشن ولی اگه بخوام مهمترها رو بگم، از بین همه این مباحث، قسمت‌های "حد در بی‌نهایت"، "تناوب و تانژانت" و قسمت "معادلات مثلثاتی" در حسابان و همچنین قسمت "وارون ماتریس و دترمینان" در هندسه ۳ و نهایتا قسمت "هم‌نهشتی و کاربردها" در ریاضیات گسسته اهمیت زیادتری دارن.

بزن بریم که آزمون رو با هم تحلیل کنیم...

حسین شفیع‌زاده - رتبهٔ ۶ کنکور ۶۷ و مسئول درس ریاضی آزمون ماز

۱- به ازای چند مقدار صحیح k، تابع نمایی $f(x)=(۳۲-۲k^۲)^x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ یکنوایی و بخش‌پذیری ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

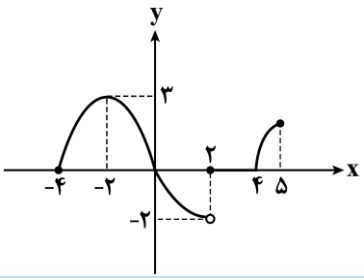
شرط این که تابع نمایی $f(x)=a^x$ روی $\mathbb{R}$ صعودی باشد، این است که $a>۱$ باشد، پس داریم:

$۳۲-۲k^۲>۱ \Rightarrow ۲k^۲<۳۱ \Rightarrow k^۲<\frac{۳۱}{۲} \xrightarrow{k\in\mathbb{Z}} -۳\le k\le ۳ \Rightarrow$ ۷ مقدار صحیح برای k وجود دارد.

تابع نمایی

هر تابع به فرم $f(x)=a^x \ (a>۰, a\neq ۱)$ را تابع نمایی می‌گوییم. اگر $a>۱$ باشد، تابع اکیداً صعودی و اگر $۰<a<۱$ باشد، تابع اکیداً نزولی است.

۲- اگر نمودار تابع $y=f(\frac{۷-x}{۳})$ به شکل زیر و دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}f(۲x+۱)$ بازهٔ $[a,b]$ باشد، حاصل $۱۲a-۳b$ کدام است؟



۱) ۲
۲) ۶-
۳) ۱۰-
۴) ۱۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ تبدیل نمودار توابع ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

چون طبق شکل داده شده، دامنه تابع $y=f(\frac{۷-x}{۳})$ بازهٔ $[-۴,۵]$ است، پس خواهیم داشت:

$$-۴\le x\le ۵\Rightarrow -۵\le -x\le ۴\Rightarrow ۲\le ۷-x\le ۱۱\Rightarrow \frac{۲}{۳}\le\frac{۷-x}{۳}\le\frac{۱۱}{۳}$$

پس دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[\frac{۲}{۳},\frac{۱۱}{۳}]$ است و در نتیجه باید داشته باشیم:

$$\frac{۲}{۳}\le ۲x+۱\le\frac{۱۱}{۳}\Rightarrow -\frac{۱}{۳}\le ۲x\le\frac{۸}{۳}\Rightarrow -\frac{۱}{۶}\le x\le\frac{۴}{۳}$$

پس دامنهٔ تابع $g(x)=\frac{۱}{۲}-\frac{۳}{۴}f(۲x+۱)$ به صورت $D_g=[-\frac{۱}{۶},\frac{۴}{۳}]$ است و بنابراین $a=-\frac{۱}{۶}$ و $b=\frac{۴}{۳}$ می‌باشد و داریم: $۱۲a-۳b=-۲-۴=-۶$

یافتن دامنه

اگر دامنهٔ تابع $y=f(x)$ بازهٔ $[m,n]$ باشد، برای تعیین دامنهٔ تابع $y=kf(ax+b)+h$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

محدودهٔ x را به دست می‌آوریم که دامنهٔ تابع $y=kf(ax+b)+h$ می‌باشد.

$m\le ax+b\le n \xrightarrow{\text{۳ طرف منهای b شده و بر a تقسیم می‌شود}}$

اگر دامنهٔ تابع $y=kf(ax+b)+h$ بازهٔ $[m,n]$ باشد، برای تعیین دامنهٔ تابع $y=f(x)$ به صورت زیر عمل می‌کنیم:

دامنهٔ تابع $y=f(x)$ به دست می‌آید.

$m\le x\le n \xrightarrow{\text{۳ طرف در a ضرب شده و با b جمع می‌شود}}$

گروه آموزشی ماز

۳- نمودار تابع $f(x)=۳-\sqrt{۴+۲x}$ را نسبت به محور xها قرینه کرده و سپس نسبت به محور yها قرینه می‌کنیم و در نهایت یک واحد به بالا و k واحد به راست انتقال می‌دهیم تا تابع g به دست آید. به ازای کدام مقدار صحیح k، دامنهٔ تابع $f+g$ شامل دقیقاً هفده عدد صحیح خواهد بود؟

۱) ۱۱
۲) ۱۲
۳) ۱۱-
۴) ۱۲-

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ تبدیل نمودار توابع ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$y=۳-\sqrt{۴+۲x}\xrightarrow[\times(-۱)]{\text{قرینه نسبت به محور xها}}y=-۳+\sqrt{۴+۲x}\xrightarrow[x\to -x]{\text{قرینه نسبت به محور yها}}y=-۳+\sqrt{۴-۲x}$$

$$\xrightarrow{\text{یک واحد به بالا}}y=-۲+\sqrt{۴-۲x}\xrightarrow[x\to x-k]{\text{k واحد به راست}}y=-۲+\sqrt{۴-۲(x-k)}=-۲+\sqrt{-۲x+۲k+۴}$$

$D_f: ۴+۲x\ge ۰\Rightarrow x\ge -۲$ (۱)

$D_g: -۲x+۲k+۴\ge ۰\Rightarrow ۲x\le ۲k+۴\Rightarrow x\le k+۲$ (۲)

$(۱),(۲)\xrightarrow{\text{اشتراک}}-۲\le x\le k+۲=D_{f+g}$

تعداد xهای صحیح $=(k+۲)-(-۲)+۱=k+۵\xrightarrow{\text{طبق فرض}}k+۵=۱۷\Rightarrow k=۱۲$

گروه آموزشی ماز

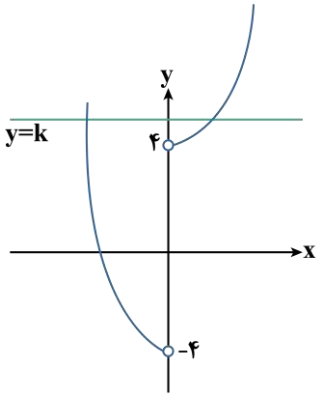
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۴- خط $y=m$ نمودار تابع $f(x)=\frac{x^4+4x}{|x|}$ را در دو نقطه قطع می‌کند. m چند مقدار طبیعی یک رقمی می‌تواند داشته باشد؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۴ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ تبدیل نمودار توابع ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ضابطهٔ تابع f را ساده می‌کنیم:



$$f(x)=\frac{x^4+4x}{|x|}$$

$$f(x)=\frac{x(x^3+4)}{|x|}=\begin{cases}x^3+4 & x>0\\ -x^3-4 & x<0\end{cases}$$

با رسم نمودار تابع f مشخص می‌شود که m می‌تواند هر عدد حقیقی بزرگ‌تر از ۴ باشد، پس مقادیر طبیعی و یک رقمی برای m عبارتند از: $m=۵,۶,۷,۸,۹$

یعنی m می‌تواند ۵ مقدار طبیعی یک رقمی را اختیار کند.

گروه آموزشی ماز

۵- اگر $Q(x)$ خارج‌قسمت تقسیم چندجمله‌ای $p(x)=x^5-4x^3+12x^2-7x+1$ بر $(x+2)$ باشد، در این صورت باقی‌ماندهٔ تقسیم $Q(x)$ بر $(x+1)$ کدام است؟

۱) ۴۰- ۲) ۳۰- ۳) ۳۹- ۴) ۲۹-

پاسخ: گزینهٔ ۱ آزمون وی ای پی (متوسط ـ یکنوایی و بخش‌پذیری ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$p(x)=x^5-4x^3+12x^2-7x+1$$

خارج‌قسمت تقسیم $p(x)$ بر $(x+2)$ برابر $Q(x)$ است، اگر باقی‌ماندهٔ آن را R در نظر بگیریم، طبق قضیهٔ تقسیم خواهیم داشت:

$$p(x)=(x+2)Q(x)+R$$

برای یافتن R کافی است $p(-2)$ را به دست آوریم که در این صورت خواهیم داشت:

$$p(-2)=R \Rightarrow -32+32+48+14+1=R \Rightarrow R=63$$

پس رابطهٔ تقسیم به صورت زیر خواهد بود:

$$p(x)=(x+2)Q(x)+63$$

حال چون باقی‌ماندهٔ $Q(x)$ بر $(x+1)$ موردنظر است، پس باید $Q(-1)$ را بیابیم که خواهیم داشت:

$$x=-1 \Rightarrow p(-1)=(-1+2)Q(-1)+63$$

$$-1+4+12+7+1=Q(-1)+63 \Rightarrow Q(-1)=-40$$

تقسیم

مقسوم — مقسوم‌علیه

$$\begin{array}{c|c} A(x) & B(x) \\ \vdots & \hline Q(x) \end{array}$$

$Q(x)$ → خارج‌قسمت

$R(x)$ → باقی‌مانده

$$\Rightarrow A(x)=B(x)\times Q(x)+R(x)$$

باید درجهٔ باقی‌مانده $(R(x))$ از درجهٔ مقسوم‌علیه $(B(x))$ کمتر باشد.

یه چیز دوست داشتنی از تقسیم: اگر مقسوم‌علیه درجهٔ اول باشد برای محاسبهٔ باقی‌مانده کافی است ریشهٔ مقسوم‌علیه را در مقسوم قرار دهیم.

گروه آموزشی ماز

۶- اگر دورهٔ تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $f(x)=\sqrt{3}-\cos(\frac{\pi}{2}x)$ را به ترتیب با T_1 و m_1 و M_1 و دورهٔ تناوب و مقادیر مینیمم و ماکزیمم تابع $g(x)=-\pi\sin(\frac{x}{2})-2$ را به ترتیب با T_2 و m_2 و M_2 نمایش دهیم، حاصل عبارت $\frac{T_2}{T_1}\times\frac{m_1+M_1}{m_2+M_2}$ کدام است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $\frac{-\sqrt{3}}{2}\pi$ ۲) $\frac{\sqrt{3}}{2}\pi$ ۳) $-\sqrt{3}\pi$ ۴) $\sqrt{3}\pi$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ مثلثات ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

$$f(x)=\sqrt{۳}-\cos(\frac{\pi}{۲}x)\Rightarrow T_۱=\frac{۲\pi}{\frac{\pi}{۲}}=۴\ ,\ m_۱=\sqrt{۳}-۱\ ,\ M_۱=\sqrt{۳}+۱$$

$$g(x)=-\pi\sin(\frac{x}{۲})-۲\Rightarrow T_۲=\frac{۲\pi}{\frac{۱}{۲}}=۴\pi\ ,\ m_۲=-۲-\pi\ ,\ M_۲=-۲+\pi$$

$$\frac{T_۲}{T_۱}\times\frac{m_۱+M_۱}{m_۲+M_۲}=\frac{۴\pi}{۴}\times\frac{\sqrt{۳}-۱+\sqrt{۳}+۱}{(-۲-\pi)+(-۲+\pi)}=\pi\times\frac{۲\sqrt{۳}}{-۴}=-\frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi$$

توابع مثلثاتی

اگر بخواهیم مقادیر max و min توابع $y=a\sin(bx+c)+d$ یا $y=a\cos(bx+c)+d$ را مشخص کنیم کافی است یک بار به جای sin یا cos عدد ۱ و بار دیگر عدد ۱− قرار دهیم.

فرمول‌های دورهٔ تناوب

$$\left.\begin{matrix}f(x)=a\sin(bx+c)+d\\ f(x)=a\cos(bx+c)+d\end{matrix}\right\}\Rightarrow T=\frac{۲\pi}{|\text{ضریب } x|}=\frac{۲\pi}{|b|}$$

گروه آموزشی ماز

۷- در تابعی با ضابطهٔ $f(x)=a\sin bx+۲$ فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم متوالی با عرض ۴− برابر ۸π است. اگر نمودار این تابع روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ اکیداً نزولی باشد، عرض این تابع در نقطه‌ای به طول ۱۱π کدام است؟

۱) $۲\sqrt{۳}+۳$ ۲) $-۲\sqrt{۳}+۳$ ۳) $۳\sqrt{۲}+۲$ ۴) $-۳\sqrt{۲}+۲$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ مثلثات ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم متوالی برابر دوره تناوب تابع است، یعنی داریم:

$$T=\frac{۲\pi}{|b|}=۸\pi\Rightarrow|b|=\frac{۱}{۴}\Rightarrow b=\pm\frac{۱}{۴}$$

$$y_{min}=-|a|+۲=-۴\Rightarrow|a|=۶\Rightarrow a=\pm۶$$

چون تابع روی بازهٔ $(۰,\frac{\pi}{۲})$ اکیداً نزولی است، پس باید a و b مختلف‌العلامت باشند، یعنی داریم:

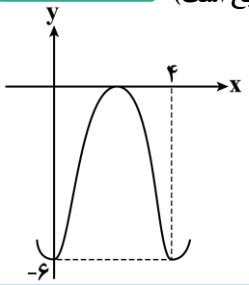
$$f(x)=-۶\sin\frac{x}{۴}+۲\Rightarrow f(۱۱\pi)=-۶\sin(\frac{۱۱\pi}{۴})+۲$$

$$f(۱۱\pi)=-۶\sin(۳\pi-\frac{\pi}{۴})+۲=-۶\sin\frac{\pi}{۴}+۲=-۶\times\frac{\sqrt{۲}}{۲}+۲=-۳\sqrt{۲}+۲$$

گروه آموزشی ماز

۸- شکل زیر، قسمتی از نمودار تابع $f(x)=a+b\cos(c\pi x)$ است. مقدار $\left[f(-\frac{۱۱}{۳})\right]$ کدام است؟ (نماد [ ] نماد جزء صحیح است)

مشابه تمرین کتاب درسی



۱) ۴−
۲) ۵−
۳) ۶−
۴) ۷−

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مثلثات ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

چون طبق شکل فاصلهٔ دو نقطهٔ مینیمم تابع f برابر ۴ واحد است، پس $T=۴$ و از طرفی با توجه به شکل $a<۰$ است. همچنین تابع در همسایگی راست $x=۰$ صعودی بوده پس $b<۰$ است. طبق شکل ماکزیمم تابع برابر صفر است، پس داریم:

$$a+|b|=۰\xrightarrow{\text{با توجه به شکل } b<۰ \text{ است}}a-b=۰\Rightarrow a=b$$

$$f(x)=a+a\cos(c\pi x)\xrightarrow{f(۰)=-۶}a+a(۱)=-۶\Rightarrow ۲a=-۶\Rightarrow a=-۳$$
$$\Rightarrow b=-۳\Rightarrow f(x)=-۳-۳\cos(c\pi x)$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

$$T=۴\Rightarrow\frac{۲\pi}{|c\pi|}=۴\Rightarrow|c|=\frac{۱}{۲}\Rightarrow c=\pm\frac{۱}{۲}$$

$$\Rightarrow f(x)=-۳-۳\cos(\frac{\pi}{۲}x)$$

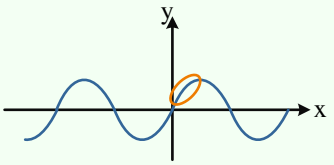
$$f(-\frac{۱۱}{۳})=-۳-۳\cos(-\frac{۱۱\pi}{۶})=-۳-۳\cos(\frac{۱۱\pi}{۶})=-۳-۳\cos(۲\pi-\frac{\pi}{۶})$$

$$=-۳-۳\cos\frac{\pi}{۶}=-۳-۳(\frac{\sqrt{۳}}{۲})=-۳(۱+\frac{\sqrt{۳}}{۲})\simeq-۳(۱/۸۵)\simeq-۵/۵۵\Rightarrow\left[f(-\frac{۱۱}{۳})\right]=-۶$$

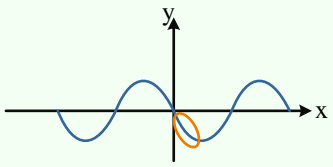
نکتهٔ ریز در توابع مثلثاتی

$f(x)=a\sin(bx)+c$

- a و b هم‌علامت هستند. ← در سمت راست $x=۰$ تابع صعودی می‌باشد.



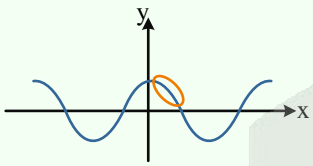
- a و b غیرهم‌علامت هستند. ← در سمت راست $x=۰$ تابع نزولی می‌باشد.



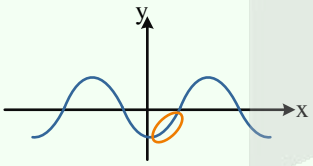
جابه‌جایی روی محور x وجود ندارد.

$f(x)=a\cos(bx)+c$

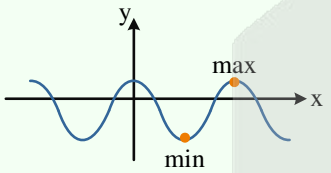
- $a>۰$ (علامت b تاثیر ندارد.) ← در سمت راست $x=۰$ تابع نزولی می‌باشد.



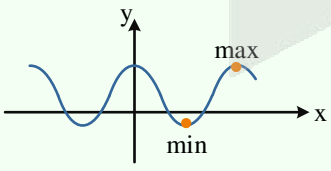
- $a<۰$ (علامت b تاثیر ندارد.) ← در سمت راست $x=۰$ تابع صعودی می‌باشد.



- در هر نمودار $y=a\sin(bx)+c$ یا $y=a\cos(bx)+c$ می‌توان گفت:



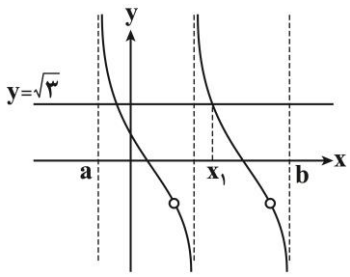
نقطهٔ max به محور x نزدیک‌تر از نقطهٔ min است. ← $c<۰$



نقطهٔ min به محور x نزدیک‌تر از نقطهٔ max است. ← $c>۰$

WWW.ArefOnline.ir

۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}$ در بازهٔ $[a,b]$ به شکل مقابل است. نمودار این تابع خط $y=\sqrt{۳}$ را در نقطه‌ای به طول $x_۱$ قطع می‌کند. حاصل $\frac{x_۱}{b}$ کدام است؟



۱) $\frac{۹}{۱۱}$

۲) $\frac{۱۱}{۲۱}$

۳) $\frac{۱}{۹}$

۴) $\frac{۱}{۲۱}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ مثلثات ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

$$f(x)=\frac{۱-\tan x}{۱+\tan x}=\tan(\frac{\pi}{۴}-x)$$

$$\tan(\frac{\pi}{۴}-x)=\sqrt{۳}\Rightarrow\frac{\pi}{۴}-x=k\pi+\frac{\pi}{۳}\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{۱۲}$$

طبق شکل اولین نقطه تقاطع با طول مثبت موردنظر است، بنابراین داریم:

$$k=-۱\Rightarrow x=\frac{۱۱\pi}{۱۲}\Rightarrow x_۱=\frac{۱۱\pi}{۱۲}$$

از طرفی، دومین مجانب قائم با طول مثبت نیز b نام دارد، بنابراین داریم:

$$\frac{\pi}{۴}-x=k\pi+\frac{\pi}{۲}\Rightarrow x=-k\pi-\frac{\pi}{۴}$$

$$k=-۲\Rightarrow x=۲\pi-\frac{\pi}{۴}=\frac{۷\pi}{۴}\Rightarrow b=\frac{۷\pi}{۴}$$

$$\frac{x_۱}{b}=\frac{\frac{۱۱\pi}{۱۲}}{\frac{۷\pi}{۴}}=\frac{۱۱}{۲۱}$$

گروه آموزشی ماز

۱۰- تعداد جواب‌های معادلهٔ $\sin x+\cos x=۱$ در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ مثلثات ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

$$\sin x+\cos x=۱\Rightarrow\sqrt{۲}\sin(x+\frac{\pi}{۴})=۱\Rightarrow\sin(x+\frac{\pi}{۴})=\frac{\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow\begin{cases}x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\frac{\pi}{۴}\\x+\frac{\pi}{۴}=۲k\pi+\pi-\frac{\pi}{۴}\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=۲k\pi\\x=۲k\pi+\frac{\pi}{۲}\end{cases}$$

k	۰	۱
x	۰, $\frac{\pi}{۲}$	۲π

معادله در بازهٔ $[۰,۲\pi]$ دارای ۳ جواب است.

فراموشتان نشود که

$$\sin x\pm\cos x=\sqrt{۲}\sin(x\pm\frac{\pi}{۴})$$

گروه آموزشی ماز

۱۱- بزرگ‌ترین جواب معادلهٔ $\sin x-\sin(x+\frac{\pi}{۸})=۰$ در بازهٔ $[۲\pi,۴\pi]$ کدام است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $\frac{۲۷\pi}{۸}$ ۲) $\frac{۵۵\pi}{۱۶}$ ۳) $\frac{۵۷\pi}{۱۶}$ ۴) $\frac{۲۹\pi}{۸}$

www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ مثلثات ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

$$\sin x - \sin(x+\frac{\pi}{8}) = 0 \Rightarrow \sin x = \sin(x+\frac{\pi}{8})$$

$$\begin{cases} x = 2k\pi + x + \frac{\pi}{8} \Rightarrow \text{x حذف می‌شود} \\ x = 2k\pi + \pi - x - \frac{\pi}{8} \Rightarrow 2x = 2k\pi + \frac{7\pi}{8} \Rightarrow x = k\pi + \frac{7\pi}{16} \end{cases}$$

بزرگ‌ترین جواب معادله در بازه $[2\pi, 4\pi]$ برابر است با:

$$k = 3 \Rightarrow x = 3\pi + \frac{7\pi}{16} = \frac{55\pi}{16}$$

معادلهٔ مثلثاتی معروف

$$\sin A = \sin B \Rightarrow \begin{cases} A = 2k\pi + B \\ A = 2k\pi + \pi - B \end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

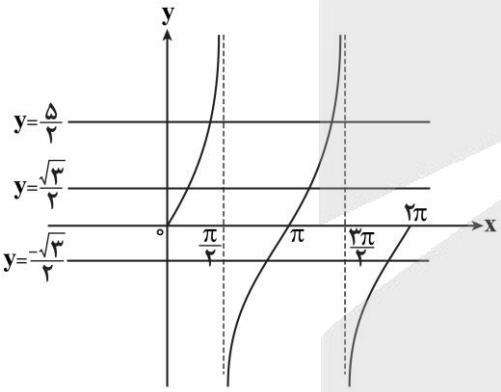
۱۲- معادلهٔ $2\sin x - 5\cos x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای m ریشه و معادلهٔ $4\tan x - 3\cot x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای n ریشه است. $m+n$ کدام است؟

۱) ۲ ۲) ۴ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مثلثات ـ ترکیبی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

$$2\sin x - 5\cos x = 0 \Rightarrow 2\sin x = 5\cos x \Rightarrow \tan x = \frac{5}{2}$$

$$4\tan x - 3\cot x = 0 \Rightarrow 4\tan x - \frac{3}{\tan x} = 0 \Rightarrow 4\tan^2 x - 3 = 0 \Rightarrow \tan^2 x = \frac{3}{4} \Rightarrow \tan x = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$$



کافی است نمودار تابع $y = \tan x$ را با خطوط $y = \frac{5}{2}$ و $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$ و $y = -\frac{\sqrt{3}}{2}$ قطع دهیم تا تعداد نقاط تلاقی این خطوط با نمودار تابع $y = \tan x$ تعداد ریشه‌های معادلات فوق را مشخص کند.

طبق شکل، معادلهٔ $2\sin x - 5\cos x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای دو ریشه و معادلهٔ $4\tan x - 3\cot x = 0$ در بازهٔ $[0, 2\pi]$ دارای ۴ ریشه است، پس $m = 2$ و $n = 4$ و در نتیجه $m + n = 6$ است.

گروه آموزشی ماز

۱۳- اگر $\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2\sin\alpha$ و $3\cos(\beta - \frac{3\pi}{2}) = \cos\beta$ باشد، آن‌گاه حاصل $\tan(\pi - \alpha - \beta)$ کدام است؟

۱) -1 ۲) ۱ ۳) $-\frac{1}{7}$ ۴) $\frac{1}{7}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ مثلثات ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

$$\sin(\alpha + \frac{\pi}{2}) = 2\sin\alpha \Rightarrow \cos\alpha = 2\sin\alpha \Rightarrow \tan\alpha = \frac{1}{2}$$

$$3\cos(\beta - \frac{3\pi}{2}) = \cos\beta \Rightarrow -3\sin\beta = \cos\beta \Rightarrow \tan\beta = -\frac{1}{3}$$

$$\tan(\pi - \alpha - \beta) = \tan\big(\pi - (\alpha + \beta)\big) = -\tan(\alpha + \beta)$$

$$= -\frac{\tan\alpha + \tan\beta}{1 - \tan\alpha\tan\beta} = -\frac{\frac{1}{2} - \frac{1}{3}}{1 + \frac{1}{6}} = -\frac{\frac{1}{6}}{\frac{7}{6}} = -\frac{1}{7}$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۱۴- حاصل $\lim\limits_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}$ و $\lim\limits_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}$ به ترتیب کدام است؟ مشابه تمرین کتاب درسی

۱) $-\infty$ و $+\infty$ ۲) $+\infty$ و $-\infty$ ۳) $+\infty$ و $+\infty$ ۴) $-\infty$ و $-\infty$

پاسخ: گزینهٔ ۱ آزمون وی ای پی (آسان ـ حدهای نامتناهی ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

$$\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x^2+x}{x^2+2x+1}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x(x+1)}{(x+1)^2}=\lim_{x\to(-1)^-}\frac{x}{x+1}=\frac{-1}{0^-}=+\infty$$

$$\lim_{x\to1^-}\frac{x^2-1}{(x-1)^2}=\lim_{x\to1^-}\frac{x+1}{x-1}=\frac{2}{0^-}=-\infty$$

حد بی‌نهایت

اگر $\lim\limits_{x\to a}f(x)=L>0$ و $\lim\limits_{x\to a}g(x)=0$ در یک همسایگی a مثبت باشد، آن‌گاه:

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$$

در حالت کلی می‌توان گفت حدهایی که صورت آن، عددی غیر صفر و مخرج آن ۰ (حدی) می‌شود دارای حاصل ∞ هستند، ببینید:

$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$ $\quad\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$ $\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$ $\quad\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$

گروه آموزشی ماز

۱۵- اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{(a-3)x^5-16x^3-x^2+5}{2ax^3+14x^3-7x+1}$ برابر عدد حقیقی b باشد، حاصل $a+b$ کدام است؟ $(b\neq0)$

۱) ۳/۲ ۲) ۲/۸ ۳) ۳/۸ ۴) ۲/۲

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ حد در بی‌نهایت ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

چون حاصل حد تابع هنگامی که $x\to+\infty$ برابر عدد حقیقی b شده است، پس صورت و مخرج کسر هم‌درجه بوده‌اند. بنابراین خواهیم داشت:

$$a-3=0\Rightarrow a=3$$

$$\lim_{x\to+\infty}\frac{(a-3)x^5-16x^3-x^2+5}{2ax^3+14x^3-7x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-16x^3-x^2+5}{6x^3+14x^3-7x+1}=\lim_{x\to+\infty}\frac{-16x^3}{20x^3}=\frac{-16}{20}=\frac{-4}{5}=-0/8$$

$$\Rightarrow b=-0/8\Rightarrow a+b=3-0/8=2/2$$

محاسبهٔ حد در ∞ و قاعدهٔ پرتوان

$$\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n+bx^{n-1}+cx^{n-2}+\dots}{a'x^m+b'x^{m-1}+c'x^{m-2}+\dots}=\lim_{x\to\infty}\frac{ax^n}{a'x^m}=\begin{cases}\infty & n>m\\ \frac{a}{a'} & n=m\\ 0 & n<m\end{cases}$$

گروه آموزشی ماز

۱۶- کدام‌یک از حدهای زیر موجود است؟

۱) $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\frac{1}{x}$ ۲) $\lim\limits_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]$ ۳) $\lim\limits_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x.\cot x$ ۴) $\lim\limits_{x\to1}\frac{x^4-1}{x^3-2x^2+x}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ حد در بی‌نهایت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

حاصل حد هنگامی موجود است که برابر عددی مشخص باشد، به عبارت دیگر باید حاصل حد برابر عدد حقیقی و مشخص L باشد. حال به بررسی هر یک از گزینه‌ها می‌پردازیم:

بررسی گزینه‌ها:

۱ $\lim\limits_{x\to0^+}\cos\frac{1}{x}=$ موجود نیست

زیرا اگر $x\to0^+$، آن‌گاه $\frac{1}{x}\to+\infty$ و بنابراین کمان $\cos\frac{1}{x}$ به سمت $+\infty$ میل می‌کند و در این صورت مقادیر کسینوس دائماً بین ۱- تا ۱ نوسان می‌کنند که در این صورت به دلیل نوسان مقادیر بین ۱- تا ۱، تابع f فاقد حد خواهد بود.

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

۲

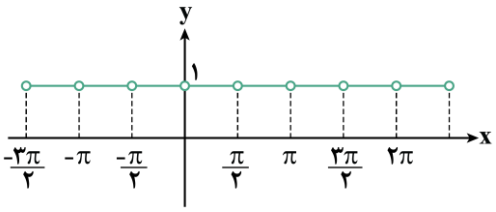
$$\lim_{x\to+\infty}\left[\frac{\sin x}{x}\right]=\begin{cases}0 & \sin x\geq 0\\ -1 & \sin x<0\end{cases}$$

با میل کردن $x\to+\infty$، مقادیر کسر $\frac{\sin x}{x}$ به صفر میل می‌کنند، زیرا صورت کسر بین -1 تا 1 نوسان می‌کند ولی مخرج کسر به ∞ میل می‌کند، حال اگر $\sin x>0$ باشد، آن‌گاه $\frac{\sin x}{x}\to 0^+$ و اگر $\sin x<0$ باشد، آن‌گاه $\frac{\sin x}{x}\to 0^-$ و بنابراین جزء صحیح این مقادیر می‌تواند صفر یا -1 باشد که به دلیل نوسان روی این مقادیر، حاصل حد، موجود نیست.

۳

$$\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x.\cot x=1$$

حاصل $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}}\tan x.\cot x$، با توجه به نمودار تابع که در شکل مقابل رسم شده است، موجود و برابر 1 است.



۴

$$\lim_{x\to۱}\frac{x^۴-۱}{x^۳-۲x^۲+x}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}{x(x^۲-۲x+۱)}=\lim_{x\to۱}\frac{(x-۱)(x+۱)(x^۲+۱)}{x(x-۱)^۲}=\lim_{x\to۱}\frac{(x+۱)(x^۲+۱)}{x(x-۱)}=\frac{۴}{\text{صفرحدی}}=\pm\infty$$

اگر $x\to۱^+$، آن‌گاه حاصل حد برابر $+\infty$ و اگر $x\to۱^-$، آن‌گاه حاصل حد برابر $-\infty$ خواهد بود و در هر صورت حاصل حد، موجود نیست.

گروه آموزشی ماز

۱۷- اگر $\lim_{x\to۰}\frac{\left[-۱+x^۴\right]}{a+b\cos ۲x}=-\infty$ باشد، دو تایی (a,b) کدام می‌تواند باشد؟

۱) $(۴,۴)$ ۲) $(-۴,-۴)$ ۳) $(۴,-۴)$ ۴) $(-۴,۴)$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ حدهای نامتناهی ـ مفهومی ـ ۱۲۰۳)

$$\lim_{x\to۰}\frac{\left[-۱+x^۴\right]}{a+b\cos ۲x}=-\infty$$

حد صورت کسر برابر (-1) است زیرا اگر $x\to 0^-$ یا $x\to 0^+$، آن‌گاه $x^۴\to 0^+$ و بنابراین داریم:

$$\lim_{x\to۰}\left[-۱+x^۴\right]=\left[(-۱)^+\right]=-۱$$

پس چون حد تابع از دو طرف برابر $-\infty$ شده است، باید حد مخرج 0^+ باشد، یعنی باید مخرج کسر دارای ریشهٔ مضاعف باشد، بنابراین لازم است که داشته باشیم:

$$a+b\cos ۰=۰\Rightarrow a+b=۰$$

پس گزینه‌های ۱ و ۲ مردود هستند. حال گزینهٔ ۳ را بررسی می‌کنیم. به ازای $a=۴$ و $b=-۴$ خواهیم داشت:

$$a=۴\ ,\ b=-۴\Rightarrow\lim_{x\to۰}\frac{\left[-۱+x^۴\right]}{۴-۴\cos ۲x}=\lim_{x\to۰}\frac{\left[-۱+x^۴\right]}{۴(۱-\cos ۲x)}=\frac{-۱}{۴(۰^+)}=-\infty$$

توجه

توجه شود که همواره $\cos ۲x<۱$ است، به همین دلیل حد مخرج همواره 0^+ است.

نادرستی گزینهٔ ۴ را هم خودتان تحقیق کنید.

و باز هم حد

اگر $\lim_{x\to a}f(x)$ برابر یک عدد حقیقی غیرصفر مانند L و $\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)}=\infty$ شود، یعنی هر دو حد راست و چپ در $x=a$ هم‌علامت باشند $\lim_{x\to a^\pm}\frac{f(x)}{g(x)}=+\infty$ یا $\lim_{x\to a^\pm}\frac{f(x)}{g(x)}=-\infty$) بنابراین $g(x)$ در $x=a$ صفر شده و ریشهٔ مکرر دارد، پس در مخرج عامل صفرشونده یا درون قدرمطلق یا دارای توان زوج است و یا مخرج به فرم $b(۱\pm\cos x)$ یا $b(۱\pm\sin x)$ است.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۱۸- اگر $\lim\limits_{x\to ۳}\frac{x-۴}{۳x^۲+۲ax+۶b}=-\infty$ باشد، حاصل $\lim\limits_{x\to-\infty}\frac{(۳-b)x-\sqrt{۴x^۲+۱۲x}}{(a-۲)x+\sqrt{x^۲-x}}$ کدام است؟

۱) $\frac{۷}{۲۴}$ ۲) $-\frac{۷}{۲۴}$ ۳) $-\frac{۱}{۲۴}$ ۴) $\frac{۱}{۲۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ حد در بی‌نهایت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$$\lim_{x\to ۳}\frac{x-۴}{۳x^۲+۲ax+۶b}=-\infty$$

چون حاصل حد تابع در نقطهٔ $x=۳$ برابر $-\infty$ شده، پس باید مخرج کسر به ازای $x=۳$ برابر صفر شود و چون هم حد راست و هم حد چپ هر دو $-\infty$ شده‌اند، پس مخرج کسر دارای ریشهٔ مضاعف $x=۳$ بوده است که در این صورت خواهیم داشت:

$$۳x^۲+۲ax+۶b=۳(x-۳)^۲\Rightarrow ۳x^۲+۲ax+۶b=۳x^۲-۱۸x+۲۷\Rightarrow\begin{cases}۲a=-۱۸\Rightarrow a=-۹\\ ۶b=۲۷\Rightarrow b=\frac{۹}{۲}\end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty}\frac{(۳-b)x-\sqrt{۴x^۲+۱۲x}}{(a-۲)x+\sqrt{x^۲-x}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{۳}{۲}x-\sqrt{۴x^۲}}{-۱۱x+\sqrt{x^۲}}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{۳}{۲}x-۲|x|}{-۱۱x+|x|}=\lim_{x\to-\infty}\frac{-\frac{۳}{۲}x+۲x}{-۱۱x-x}=\lim_{x\to-\infty}\frac{\frac{۱}{۲}x}{-۱۲x}=\frac{-۱}{۲۴}$$

گروه آموزشی ماز

۱۹- نمودار تابع $f(x)=\frac{۳x^۲+x+۱}{x^۲+۲x+۳}$ در اطراف مجانب افقی‌اش به کدام صورت است؟

۱) ۲) ۳) ۴)

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ حد در بی‌نهایت ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

مجانب افقی نمودار تابع f، خط $y=۳$ است، زیرا:

$$\lim_{x\to\pm\infty}f(x)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲+x+۱}{x^۲+۲x+۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{۳x^۲}{x^۲}=۳$$

حال اگر منحنی و مجانب افقی را از هم کم کنیم، خواهیم داشت:

$$f(x)-۳=\frac{۳x^۲+x+۱}{x^۲+۲x+۳}-۳=\frac{۳x^۲+x+۱-۳x^۲-۶x-۹}{x^۲+۲x+۳}=\frac{-۵x-۸}{x^۲+۲x+۳}$$

$$\lim_{x\to\pm\infty}\big(f(x)-۳\big)=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۵x-۸}{x^۲+۲x+۳}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۵x}{x^۲}=\lim_{x\to\pm\infty}\frac{-۵}{x}$$

$$\lim_{x\to+\infty}\big(f(x)-۳\big)=\lim_{x\to+\infty}\frac{-۵}{x}=۰^-$$

$$\lim_{x\to-\infty}\big(f(x)-۳\big)=\lim_{x\to-\infty}\frac{-۵}{x}=۰^+$$

پس در شاخهٔ $+\infty$ منحنی پایین مجانب و در شاخهٔ $-\infty$ منحنی بالای مجانب قرار دارد، یعنی گزینهٔ ۲ صحیح است.

وضعیت نمودار $f(x)$ در اطراف مجانب افقی

برای بررسی وضعیت نمودار تابع $f(x)$ در اطراف مجانب افقی‌اش، ابتدا مجانب افقی $(y=b)$ را به دست می‌آوریم. $\lim\limits_{x\to\pm\infty}f(x)=b$

حال به محاسبهٔ هر دو حد $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-b\big)$ و $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-b\big)$ می‌پردازیم. اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-b\big)$ برابر ۰^+ بود یعنی نمودار در شاخهٔ $+\infty$ بالای مجانب افقی قرار دارد و اگر حاصل $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-b\big)$ برابر ۰^- بود یعنی نمودار در شاخهٔ $+\infty$ زیر مجانب افقی قرار دارد. برای شاخهٔ $-\infty$ نیز استدلال به همین صورت است.

$\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-b\big)=۰^-$ $\lim\limits_{x\to+\infty}\big(f(x)-b\big)=۰^+$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-b\big)=۰^+$ $\lim\limits_{x\to-\infty}\big(f(x)-b\big)=۰^-$

گروه آموزشی ماز

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

۲۰- اگر نقطهٔ $(۱,۱)$ نقطهٔ تلاقی مجانب‌های نمودار تابع $f(x)=\frac{ax+۱}{(۲a-۱)x+۴b}$ باشد، حاصل $f(۳)$ کدام است؟

۱) -۳ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) -۲

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ حد در بی‌نهایت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

$$f(x)=\frac{ax+۱}{(۲a-۱)x+۴b}$$

$(۲a-۱)x+۴b=۰ \Rightarrow x=\frac{-۴b}{۲a-۱}$ مجانب قائم

$\Rightarrow$ طبق فرض: $\frac{-۴b}{۲a-۱}=۱$ (۱)

$\lim\limits_{x\to\pm\infty} f(x)=\lim\limits_{x\to\pm\infty}\frac{ax+۱}{(۲a-۱)x+۴b}=\frac{a}{۲a-۱} \Rightarrow y=\frac{a}{۲a-۱}$ مجانب افقی

$\Rightarrow$ طبق فرض: $\frac{a}{۲a-۱}=۱ \Rightarrow a=۲a-۱ \Rightarrow a=۱ \xrightarrow{(۱)} \frac{-۴b}{۲a-۱}=۱ \Rightarrow -۴b=۱ \Rightarrow b=-\frac{۱}{۴}$

$f(x)=\frac{ax+۱}{(۲a-۱)x+۴b}=\frac{x+۱}{x-۱} \Rightarrow f(۳)=\frac{۴}{۲}=۲$

گروه آموزشی ماز

۲۱- اگر معادلهٔ $\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۰ & a\\ ۱ & -x & -۱\\ -۱ & ۳ & ax\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰$ دارای ریشهٔ مضاعف باشد، مقدار این ریشه کدام است؟

۱) ۱ ۲) -۱ ۳) ۴ ۴) -۴

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ ماتریس و اعمال روی آن ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

ابتدا با ضرب ماتریس‌ها، یک معادله تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x & ۰ & a\\ ۱ & -x & -۱\\ -۱ & ۳ & ax\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰ \Rightarrow \begin{bmatrix}x-۲ & x+۳ & ax+a+۱\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\ -۱\\ x\end{bmatrix}=۰$$

$\Rightarrow x(x-۲)-(x+۳)+x(ax+a+۱)=۰ \Rightarrow x^۲-۲x-x-۳+ax^۲+ax+x=۰$

$\Rightarrow (a+۱)x^۲+(a-۲)x-۳=۰$

معادله زمانی ریشهٔ مضاعف دارد که $\Delta=۰$ باشد:

$\Delta=۰ \Rightarrow (a-۲)^۲-۴\times(-۳)(a+۱)=۰ \Rightarrow a^۲-۴a+۴+۱۲a+۱۲=۰ \Rightarrow a^۲+۸a+۱۶=۰ \Rightarrow (a+۴)^۲=۰ \Rightarrow a=-۴$

با جای‌گذاری $a=-۴$ در معادلهٔ $(a+۱)x^۲+(a-۲)x-۳=۰$ ریشهٔ مضاعف آن را به دست می‌آوریم:

$a=-۴ \Rightarrow -۳x^۲-۶x-۳=۰ \Rightarrow -۳(x^۲+۲x+۱)=۰ \Rightarrow -۳(x+۱)^۲=۰ \Rightarrow x+۱=۰ \Rightarrow x=-۱$

گروه آموزشی ماز

۲۲- اگر A ماتریس وارون‌پذیر و $(A+I)^۳=\bar{O}$ باشد، حاصل $A^{-۱}+I$ کدام است؟

۱) $-(A-I)(A+۲I)$ ۲) $(A+I)(A+۲I)$ ۳) $(A-I)(A+۲I)$ ۴) $-(A+I)(A+۲I)$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ وارون ماتریس و دترمینان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

با توجه به صورت سوال داریم:

$(A+I)^۳=\bar{O} \Rightarrow A^۳+۳A^۲I+۳AI^۲+I^۳=\bar{O} \Rightarrow A^۳+۳A^۲+۳A+I=\bar{O} \Rightarrow I=-A^۳-۳A^۲-۳A$

$\Rightarrow I=A(\underbrace{-A^۲-۳A-۳I}_{A^{-۱}}) \Rightarrow A^{-۱}=-A^۲-۳A-۳I$

حال به محاسبهٔ $A^{-۱}+I$ می‌پردازیم:

$A^{-۱}+I=-A^۲-۳A-۳I+I \Rightarrow A^{-۱}+I=-A^۲-۳A-۲I=-(A^۲+۳A+۲I)=-(A+I)(A+۲I)$

پس:

$A^{-۱}+I=-(A+I)(A+۲I)$

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

از ماتریس بدانید

۱) دو ماتریس مربعی A و B وارون یکدیگرند، هرگاه $AB = BA = I$ باشد، در این صورت می‌نویسیم $A = B^{-1}$ و $B = A^{-1}$.

۲) شرط وارون‌پذیری ماتریس مربعی A آن است که $|A| \neq ۰$ باشد.

۳) وارون هر ماتریس در صورت وجود، منحصر به فرد است.

۴) ضرب ماتریس‌ها در حالت کلی خاصیت جابه‌جایی ندارد، اگر $A \times B = B \times A$ باشد، در این صورت دو ماتریس A و B تعویض‌پذیر هستند، در حالت کلی، دو ماتریس مربعی و هم‌مرتبهٔ A و I تعویض‌پذیر می‌باشند $(A \times I = I \times A = A)$. استفاده از اتحادها در ضرب ماتریس‌ها امکان‌پذیر نیست مگر آنکه دو ماتریس تعویض‌پذیر باشند، به عنوان مثال:

$$(A+B)^۲ = (A+B)(A+B) = A^۲ + AB + BA + B^۲ \xrightarrow[A\times B = B\times A]{\text{اگر A و B تعویض‌پذیر باشند}} (A+B)^۲ = A^۲ + ۲AB + B^۲$$

$$(A-B)(A+B) = A^۲ + AB - BA - B^۲ \xrightarrow[A\times B = B\times A]{\text{اگر A و B تعویض‌پذیر باشند}} (A-B)(A+B) = A^۲ - B^۲$$

A و I همواره تعویض‌پذیرند، پس:

$$(A+I)^۲ = A^۲ + ۲AI + I^۲ = A^۲ + ۲A + I$$

گروه آموزشی ماز

۲۳- ماتریس $A = [a_{ij}]_{۳\times ۳}$ به صورت $a_{ij} = \begin{cases} ۰ & ; i = j \\ ۱ & ; i \neq j \end{cases}$ معرفی شده است. به ازای کدام مقدار k رابطهٔ $|kA|A^۲| = ۲۵۶$ برقرار است؟

۱) $\sqrt[۴]{۲^۳}$ ۲) $\sqrt{۲}$ ۳) $\sqrt[۳]{۲}$ ۴) $\sqrt[۹]{۲^۴}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ وارون ماتریس و دترمینان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

ابتدا ماتریس A را طبق تعریف داده شده نوشته و دترمینان آن را به کمک دستور ساروس محاسبه می‌کنیم:

$$A = \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۰ \end{bmatrix} \Rightarrow |A| = (۰+۱+۱) - (۰+۰+۰) = ۲$$

$$|kA| = k^۳|A| = ۲k^۳ \Rightarrow |kA|A^۲| = |۲k^۳A^۲| = (۲k^۳)^۳|A^۲| = ۸k^۹|A|^۲ = ۸k^۹ \times ۴ = ۳۲k^۹$$

$$۳۲k^۹ = ۲۵۶ \Rightarrow k^۹ = ۲^۳ \Rightarrow k = \sqrt[۹]{۲^۳} \Rightarrow k = \sqrt[۳]{۲}$$

بنابراین:

دترمینان ماتریس

۱) اگر A یک ماتریس مربعی و n عددی طبیعی باشد، آن‌گاه داریم: $|A^n| = |A|^n$

۲) اگر A یک ماتریس مربعی $n \times n$ و k عددی حقیقی باشد، آن‌گاه داریم: $|kA| = k^n|A|$

۳) اگر A یک ماتریس مربعی و $A^{-۱}$ وارون ماتریس A باشد، آن‌گاه داریم: $|A^{-۱}| = \frac{۱}{|A|}$

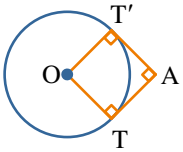
گروه آموزشی ماز

۲۴- بر روی کدام‌یک از خطوط زیر، تنها یک نقطه وجود دارد که از آن نقطه بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C به معادلهٔ $x^۲ + y^۲ - ۲x + ۲y - ۶ = ۰$ رسم کرد؟

۱) $y = ۵$ ۲) $y = ۳$ ۳) $y = -۱$ ۴) $y = -۳$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ دایره و بیضی ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

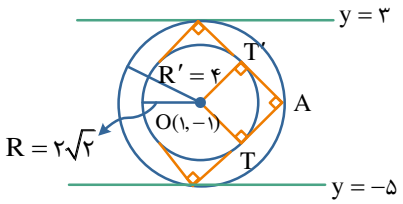
فرض کنید که از نقطهٔ A دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم کرده باشیم. چهارضلعی $ATOT'$ چهار زاویهٔ قائمه دارد و دو ضلع مجاور آن برابر یکدیگرند $(OT = OT' = R)$، پس این چهارضلعی مربع است و در نتیجه OA قطر مربع و اندازهٔ آن برابر $R\sqrt{۲}$ است.



$$\text{شعاع دایره} = R = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ - ۴c} = \frac{۱}{۲}\sqrt{(-۲)^۲ + ۲^۲ - ۴(-۶)} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴+۴+۲۴} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳۲} = ۲\sqrt{۲} \Rightarrow R\sqrt{۲} = ۴$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پس نقطهٔ A روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۴ قرار دارد. با توجه به این که مختصات مرکز دایره $O(1,-1)$ می‌باشد، خطوط افقی $y=3$ و $y=-5$ بر این دایره مماس‌اند و در نتیجه بر روی هر کدام از این دو خط، تنها یک نقطه وجود دارد که می‌توان از آن، دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ C رسم کرد.



از دایره بشنوید

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از آن نقاط بتوان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم کرد، دایرهٔ $C'(O,R\sqrt{2})$ است.

گروه آموزشی ماز

۲۵- فرض کنید دایرهٔ C بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو محور مختصات باشد که از مرکز دایرهٔ C' به معادلهٔ $x^2+y^2-4x-2y+1=0$ عبور می‌کند. معادلهٔ وتر مشترک دو دایرهٔ C و C' کدام است؟

۱) $3x+4y=12$ ۲) $4x+3y=12$ ۳) $2x+3y=6$ ۴) $3x+2y=6$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ دایره و بیضی ـ محاسباتی / مفهومی ـ ۱۲۰۲)

مختصات مرکز دایرهٔ C' به صورت $O'(2,1)$ است، یعنی مرکز این دایره در ناحیهٔ اول دستگاه مختصات قرار دارد. معادلهٔ دایرهٔ مماس بر هر دو محور مختصات در ناحیهٔ اول به صورت $(x-R)^2+(y-R)^2=R^2$ است. با قرار دادن مختصات نقطهٔ O' در معادلهٔ این دایره داریم:

$$(x-R)^2+(y-R)^2=R^2 \xrightarrow[y=1]{x=2} 4-4R+R^2+1-2R+R^2=R^2 \Rightarrow R^2-6R+5=0 \Rightarrow (R-1)(R-5)=0 \Rightarrow \begin{cases} R=1 \\ R=5 \end{cases}$$

چون دایرهٔ C طبق فرض، بزرگ‌ترین دایرهٔ مماس بر دو محور مختصات است، پس مقدار $R=5$ قابل قبول است و در نتیجه داریم:

$$C:(x-5)^2+(y-5)^2=5^2 \Rightarrow x^2+y^2-10x-10y+25=0$$

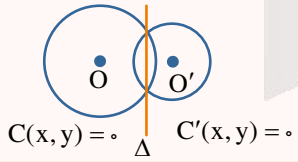
برای به دست آوردن معادلهٔوتر مشترک دو دایرهٔ C و C'، معادلات دو دایره را از هم کم می‌کنیم:

$$(x^2+y^2-4x-2y+1)-(x^2+y^2-10x-10y+25)=0 \Rightarrow 6x+8y-24=0 \Rightarrow 3x+4y=12$$

وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع

برای پیدا کردن وتر مشترک در دایرهٔ متقاطع، کافی است معادلهٔ دو دایره را از هم کم کنیم.

$$\Delta(x,y): C(x,y)-C'(x,y)=0$$



توجه

توجه داریم در معادلهٔ دو دایره باید ضرایب x^2 و y^2 یکی باشد، تا وقتی معادلهٔ دو دایره را از هم کم می‌کنیم، با هم ساده شوند.

گروه آموزشی ماز

۲۶- اگر A ماتریس وارون‌پذیر به صورت $A=\begin{bmatrix} |A^{-1}| & 0 & |-A^{-1}| \\ 0 & -1 & |A| \\ 3|A| & 0 & |2A| \end{bmatrix}$ باشد، درایهٔ سطر سوم و ستون اول ماتریس A^2 کدام است؟

۱) ۱۴۰۴ ۲) ۲۰۵۰ ۳) ۲۹۰۷ ۴) ۱۳۴۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ وارون ماتریس و دترمینان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

ابتدا از طرفین ماتریس داده شده، دترمینان می‌گیریم. با توجه به این که $|A^{-1}|=\frac{1}{|A|}$ است، خواهیم داشت:

$$|A|=-1(|A^{-1}|\times \underbrace{|2A|}_{8|A|}-3|A|\times \underbrace{|-A^{-1}|}_{-|A^{-1}|})=-(8+3)=-11 \Rightarrow \begin{cases} |A|=-11 \\ |A^{-1}|=-\frac{1}{11} \end{cases}$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

حال ماتریس A را بازنویسی می‌کنیم:

$$A=\begin{bmatrix}-\frac{1}{11} & 0 & \frac{1}{11}\\ 0 & -1 & -11\\ -33 & 0 & -88\end{bmatrix}\Rightarrow A^2=B\Rightarrow b_{31}=\begin{bmatrix}-33 & 0 & -88\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\frac{1}{11}\\ 0\\ -33\end{bmatrix}=3+2904=2907$$

گروه آموزشی ماز

۲۷- اگر ماتریس $A^{-1}=\begin{bmatrix}a+1 & -b\\ -5 & 2\end{bmatrix}$ وارون ماتریس ضرایب دستگاه $\begin{cases}ax+by=e\\ cx+dy=f\end{cases}$ باشد، آن‌گاه $\frac{a-b}{c-d}$ کدام است؟ (ضرایب دستگاه معادله غیرصفر هستند)

۱) $-\frac{1}{2}$ ۲) ۱ ۳) -1 ۴) $\frac{1}{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ وارون ماتریس و دترمینان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & b\\ c & d\end{bmatrix}$ ماتریس ضرایب دستگاه معادلات و ماتریس $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ وارون آن است. با توجه به برابری دو ماتریس $\begin{bmatrix}a+1 & -b\\ -5 & 2\end{bmatrix}$ و $\frac{1}{|A|}\times\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}$ و در نتیجه مساوی بودن درایه‌های واقع در سطر اول و ستون دوم این دو ماتریس، $|A|=1$ است و داریم:

$$\begin{bmatrix}d & -b\\ -c & a\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}a+1 & -b\\ -5 & 2\end{bmatrix}\Rightarrow\begin{cases}-c=-5\Rightarrow c=5\\ a=2\\ d=a+1\Rightarrow d=3\end{cases}$$

$$|A|=1\Rightarrow ad-bc=1\Rightarrow 2\times3-b\times5=1\Rightarrow 6-5b=1\Rightarrow b=1$$

بنابراین حاصل عبارت برابر است با:

$$\frac{a-b}{c-d}=\frac{2-1}{5-3}=\frac{1}{2}$$

گروه آموزشی ماز

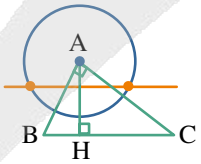
۲۸- مثلث قائم‌الزاویهٔ $A\hat{B}C$ $(\hat{A}=90^\circ)$ را در نظر بگیرید. اگر طول اضلاع قائم ۶ و ۸ سانتی‌متر باشد، چند نقطه در صفحه وجود دارد که از رأس A و وتر به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) بی‌شمار

پاسخ: گزینهٔ ۳ آزمون وی ای پی (متوسط ـ مقاطع مخروطی و مکان هندسی ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

اولاً با توجه به اضلاع مثلث، وتر ۱۰ سانتی‌متر است. می‌دانیم مکان هندسی نقاطی از صفحه که از رأس A به فاصلهٔ ۴ سانتی‌متر باشند، دایره‌ای است به مرکز A و شعاع ۴ سانتی‌متر و همچنین مکان هندسی نقاطی در صفحه که از ضلع BC به فاصلهٔ ۴ باشند، دو خط موازی به فاصلهٔ ۴ در طرفین BC است. پیدا کردن تقاطع این دو مکان هندسی، جواب مسئله است. ارتفاع AH را به دست می‌آوریم و همان‌طور که می‌بینید این دو مکان هندسی دو نقطهٔ تقاطع دارند.

$$AH\times BC=AB\times AC\Rightarrow AH\times10=6\times8\Rightarrow AH=4/8$$



گروه آموزشی ماز

۲۹- نقاط $A(0,2)$، $B(-4,4)$ و $C(-1,-3)$ را در نظر بگیرید. چند نقطه در صفحه وجود دارد که از A و B به یک فاصله باشد و از نقطهٔ C نیز فاصلهٔ ۲ داشته باشد؟

۱) صفر ۲) ۱ ۳) ۲ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ دایره و بیضی ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از $A(0,2)$ و $B(-4,4)$ به یک فاصله باشد، عمودمنصف AB است که معادله آن به صورت زیر است:

$$m_{AB}=\frac{2-4}{0+4}=\frac{-2}{4}=-\frac{1}{2}\Rightarrow m_{\text{عمودمنصف}}=+2$$

$$AB\text{ نقطهٔ وسط}\Rightarrow M(-2,3)\Rightarrow\text{معادلهٔ عمودمنصف: }y-3=2(x+2)\Rightarrow y=2x+7$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

مکان هندسی نقاطی از صفحه که از نقطهٔ C به فاصلهٔ ۲ هستند، دایره‌ای به مرکز C و شعاع ۲ است که معادلهٔ آن به صورت زیر می‌باشد:

$$(x+1)^2+(y+3)^2=4$$

حال کافی است تعداد نقاط تلاقی دایره $(x+1)^2+(y+3)^2=4$ و خط $y=2x+7$ را تعیین کنیم. برای این منظور وضعیت نسبی خط و دایره را تعیین می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix} O=(-1,-3)\ ,\ R=2 \\ 2x-y+7=0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow \text{فاصله O از خط} = \frac{|-2+3+7|}{\sqrt{4+1}} = \frac{8}{\sqrt{5}}$$

اما $\frac{8}{\sqrt{5}} > 2$ بنابراین فاصله مرکز دایره از خط از شعاع بزرگتر بوده و دایره، خط را قطع نمی‌کند. یعنی هیچ نقطه‌ای با شرایط مطلوب سوال وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۳۰- اگر $\begin{vmatrix} 2x & 1 & 0 \\ -1 & x & 3 \\ 2 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 2\begin{vmatrix} \sin\theta & \cos\theta \\ -\cos\theta & \sin\theta \end{vmatrix}$ و ماتریسی مانند A وارون‌پذیر و خود توان باشد و وارون ماتریس $I+xA$ را به صورت $I+\alpha A$ نشان دهیم. α کدام گزینه است؟

۱) $-\frac{1}{7}$ ۲) $\frac{1}{7}$ ۳) ۶ ۴) -6

پاسخ: گزینهٔ ۱ (سخت ـ وارون ماتریس و دترمینان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$-3(8x-2)=2(\underbrace{\sin^2\theta+\cos^2\theta}_{1}) \Rightarrow -24x+6=2 \Rightarrow -24x=-4 \Rightarrow x=\frac{1}{6}$$

$$I+xA=I+\frac{1}{6}A \Rightarrow (I+\frac{1}{6}A)^{-1}=I+\alpha A$$

$$(I+\frac{1}{6}A)(I+\alpha A)=I \Rightarrow I+\alpha A+\frac{1}{6}A+\frac{\alpha}{6}\underbrace{A^2}_{A}=I \Rightarrow (\alpha+\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{6})A=0 \Rightarrow \alpha+\frac{1}{6}+\frac{\alpha}{6}=0 \Rightarrow \alpha=-\frac{1}{7}$$

ماتریس خود توان

اگر ماتریس مربعی A خود توان باشد، یعنی هر توانی از ماتریس A با خود ماتریس A برابر می‌شود. $A^n=A$

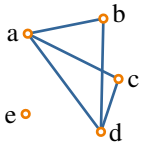
گروه آموزشی ماز

۳۱- فرض کنید $V(G)=\{a,b,c,d,e\}$ و $N_G[a]=N_G[d]=\{a,b,c,d\}$ باشد، اگر $\delta(G)=1$ باشد، حداکثر تعداد یال‌های این گراف کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ گراف و مدل‌سازی ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

سعی می‌کنیم شکل گراف G را رسم کنیم. چون $\delta(G)=1$ است، پس از e فقط یک یال خارج می‌شود. دقت کنید چون گراف G می‌خواهد بیشترین یال را داشته باشد، یال bc را رسم می‌کنیم. پس



$$q_{max}(G)=5+\underbrace{1}_{bc\text{ یال}}+\underbrace{1}_{e\text{ یال منتهی به}}=7$$

گروه آموزشی ماز

۳۲- در گراف G از مرتبهٔ $p=18$، $\Delta(G)=12$ می‌باشد. اگر $q(G)=107$ باشد، $\Delta(\overline{G})$ کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۷ ۳) ۸ ۴) ۹

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ گراف و مدل‌سازی ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

دقت کنید اگر درجهٔ تمام رئوس گراف G، ۱۲ باشد. یعنی گراف G، ۱۲-منتظم باشد داریم: $q(G)=\frac{12\times 18}{2}=12\times 9=108$

اما گراف G، ۱۰۷ یال دارد. پس باید یک یال از گراف ۱۲-منتظم مرتبهٔ $p=18$ برداریم. پس گراف G، ۱۶ رأس با درجهٔ ۱۲ و ۲ رأس با درجهٔ ۱۱ دارد.

$$\delta(G)=11\ ,\ \underbrace{\delta(G)}_{11}+\Delta(\overline{G})=p-1=17 \Rightarrow \Delta(\overline{G})=6$$

هرگز نشه فراموش

$$\delta(G)+\Delta(\overline{G})=p-1$$

$$\Delta(G)+\delta(\overline{G})=p-1$$

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

۳۳- گراف منتظم غیرکامل از مرتبهٔ $p=۹$ حداکثر چند یال دارد؟

۱) ۲۸ ۲) ۳۵ ۳) ۳۶ ۴) ۲۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ گراف و مدل‌سازی ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

چون $p=۹$ عددی فرد است، بنابراین اگر گراف G، $G-r$ منتظم باشد باید r عددی زوج و $۰\le r\le ۸$ باشد. اگر $r=۸$ باشد، گراف کامل است، پس باید $r=۶$ باشد، بنابراین:

$$q=\frac{r\times p}{۲}\Rightarrow q=\frac{۶\times ۹}{۲}=۲۷$$

گراف منتظم

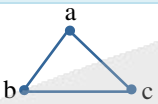
گراف $r-$ منتظم از مرتبهٔ p گرافی دارای p رأس بوده و درجهٔ همهٔ رئوس آن r می‌باشد. بنابراین تعداد یال‌های این گراف از رابطهٔ $q=\frac{p\times r}{۲}$ به دست می‌آید. توجه داریم گراف $r-$ منتظم از مرتبهٔ p که در آن r و p هر دو فرد باشند، وجود ندارد.

گروه آموزشی ماز

۳۴- گراف G از مرتبهٔ $p=۹$، ۳۳ یال دارد. اگر در گراف G، ۳ رأس یافت شود که همسایگی باز آن‌ها دو به دو برابر باشند، تعداد رئوس با درجهٔ ماکزیمم در این گراف کدام است؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ گراف و مدل‌سازی ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

این گراف از گراف کامل هم‌مرتبه‌اش، ۳ یال کمتر دارد. سه یال به صورت 

از آن حذف می‌کنیم. دقت کنید $N(a)=N(b)=N(c)$ است، پس تعداد رئوس Δ، ۶ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۵- فرض کنید $\frac{۱}{x-۱}+\frac{۱}{y-۲}+\frac{۱}{۳}=۰$ باشد، اگر y و x اعدادی صحیح و غیرمنفی باشند، مقدار $x+y$ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۶ ۳) ۷ ۴) ۸

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ بخش‌پذیری ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۴۰۱)

$$\frac{۱}{y-۲}=-\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{x-۱}\Rightarrow\frac{۱}{y-۲}=\frac{(x-۱)+۳}{-۳(x-۱)}\Rightarrow y-۲=\frac{۳(x-۱)}{-x-۲}\xrightarrow{x\text{ و }y\text{ اعداد صحیح و نامنفی هستند}}-x-۲\,|\,۳(x-۱)$$

$$\begin{matrix}-x-۲\,|\,۳x-۳\\-x-۲\,|\,-۳x-۶\end{matrix}\Rightarrow -x-۲\,|\,-۹\Rightarrow x+۲\,|\,۹\Rightarrow x+۲=\pm ۱,\pm ۳,\pm ۹\Rightarrow x=۱,۷$$

دقت کنید $x=۱$ عضو دامنهٔ تابع نمی‌باشد، پس:

$$x=۷\Rightarrow y=۰\Rightarrow x+y=۷$$

گروه آموزشی ماز

۳۶- در تقسیم عدد طبیعی a بر b، خارج‌قسمت برابر با ۱۷ و باقی‌مانده برابر با ۲۹ است. چند عدد ۳ رقمی برای a یافت می‌شود که مضرب ۹ باشند؟

۱) ۶ ۲) ۵ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ بخش‌پذیری ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱)

طبق الگوریتم تقسیم، تقسیم را می‌نویسیم و شرط باقی‌مانده هم لحاظ می‌کنیم:

$$a=b\times ۱۷+۲۹\Rightarrow ۰\le ۲۹<b$$

طبق صورت سوال a باید مضرب ۹ باشد، پس:

$$\overset{۹}{a}\equiv ۰\Rightarrow \overset{۹}{۱۷}b+\overset{۹}{۲۹}\equiv ۰\Rightarrow \overset{۹}{۱۷}b\equiv -\overset{۹}{۲۹}\xrightarrow[\substack{۹\\ -۲۹\equiv -۲}]{\substack{۹\\ ۱۷\equiv -۱}}-\overset{۹}{b}\equiv -\overset{۹}{۲}\Rightarrow \overset{۹}{b}\equiv \overset{۹}{۲}\Rightarrow b=۹k+۲$$

از طرفی، باید $۲۹<b$ باشد، پس:

$$۲۹<b\Rightarrow ۲۹<۹k+۲\Rightarrow ۲۷<۹k\Rightarrow k>۳\Rightarrow k\ge ۴$$

حال a را برحسب k پیدا می‌کنیم:

$$a=b\times ۱۷+۲۹\Rightarrow a=(۹k+۲)\times ۱۷+۲۹\Rightarrow a=۱۵۳k+۶۳$$

چون a عددی ۳ رقمی است، بنابراین $۱۰۰\le a\le ۹۹۹$ می‌باشد، پس:

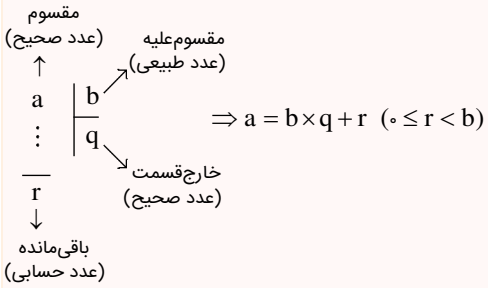
$$۱۰۰\le a\le ۹۹۹\Rightarrow ۱۰۰\le ۱۵۳k+۶۳\le ۹۹۹\Rightarrow ۱\le k\le ۶$$

به خاطر شرط باقی‌مانده از قبل نشان دادیم که $k\ge ۴$ می‌باشد، پس $۴\le k\le ۶$ در نتیجه ۳ مقدار $(۶,۵,۴)$ برای k یافت می‌شود، یعنی ۳ عدد ۳ رقمی برای a به دست می‌آید.

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

قضیهٔ تقسیم

در تقسیم عدد صحیح a بر عدد طبیعی b، a را مقسوم و b را مقسوم‌علیه می‌نامیم. اگر خارج‌قسمت تقسیم، برابر عدد صحیح q و باقی‌مانده، عدد حسابی r باشد، طبق الگوریتم تقسیم می‌توان گفت:



$$\Rightarrow a = b \times q + r \quad (0 \le r < b)$$

گروه آموزشی ماز

۳۷- فرض کنید $12 | a-5$. اگر $a \overset{7}{\equiv} 28$ باشد، باقیماندهٔ $\frac{a-5}{12}$ بر ۷ کدام است؟

۱) ۵ ۲) ۴ ۳) ۳ ۴) ۶

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ هم‌نهشتی ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$a \overset{7}{\equiv} 28 \Rightarrow a-5 \overset{7}{\equiv} 23 \overset{7}{\equiv} 2 \overset{7}{\equiv} -12 \xrightarrow{\div 12} \frac{a-5}{12} \overset{7}{\equiv} -1 \overset{7}{\equiv} 6$$

پس $r = 6$ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۸- عدد $x = \overline{ab0ab}$ در معادلهٔ $5x \overset{8}{\equiv} 1$ صدق می‌کند. بیشترین مقدار $\overline{ab}$ تا اولین عدد ۳ رقمی چقدر فاصله دارد؟

۱) ۲ ۲) ۵ ۳) ۶ ۴) ۷

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ هم‌نهشتی ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

$$x = \overline{ab0ab} = \overline{ab000} + \overline{ab} = 1000\,\overline{ab} \Rightarrow 5x \overset{8}{\equiv} 1$$

$$\Rightarrow 5 \times 1000\,\overline{ab} \overset{8}{\equiv} 1 \xrightarrow{1000 \overset{8}{\equiv} 1} 5\overline{ab} \overset{8}{\equiv} 1 - 2 \times 8 \Rightarrow 5\overline{ab} \overset{8}{\equiv} -15 \Rightarrow \overline{ab} \overset{8}{\equiv} -3 \overset{8}{\equiv} 5 \Rightarrow \overline{ab} = 8q + 5$$

$$\xrightarrow{q=11} \overline{ab} = 8 \times 11 + 5 \Rightarrow \overline{ab} = 93$$

فاصلهٔ عدد ۹۳ تا اولین عدد ۳ رقمی یعنی ۱۰۰ برابر ۷ می‌باشد.

گروه آموزشی ماز

۳۹- اگر بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد n^2+5n+6 و $n^2+8n+15$ برابر با ۱۴۰۳ باشد، مجموع ارقام عدد طبیعی n کدام است؟

۱) ۸ ۲) ۷ ۳) ۶ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ هم‌نهشتی ـ مفهومی / محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم که بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد n^2+5n+6 و $n^2+8n+15$ برابر با ۱۴۰۳ است، پس:

$$(n^2+8n+15, n^2+5n+6) = \big((n+3)(n+5), (n+3)(n+2)\big) = (n+3)\underbrace{(n+5, n+2)}_{d'} = (n+3) \times d'$$

$$(n+5, n+2) = d' \Rightarrow \begin{cases} d' \mid n+5 \\ d' \mid n+2 \end{cases} \Rightarrow d' \mid (n+5) - (n+2) \Rightarrow d' \mid 3 \xrightarrow{d'>0} d' = 1 \text{ یا } 3$$

$$(n^2+8n+15, n^2+5n+6) = (n+3)(n+5, n+2) = (n+3) \times d' = n+3 \text{ یا } 3(n+3)$$

اما ۱۴۰۳ مضرب ۳ نیست پس $n+3 = 1403$

$$\Rightarrow n = 1400 \xrightarrow{\text{مجموع ارقام } n} 1+4+0+0 = 5$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

چند ویژگی مهم

عدد طبیعی d را بزرگ‌ترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد صحیح a و b می‌گوییم و می‌نویسیم $(a,b)=d$ هرگاه هر دو شرط زیر برقرار باشد:

۱) $d|a\ ,\ d|b$

۲) $\forall m>0;\ m|a, m|b \Rightarrow m\le d$

- $(ka,kb)=|k|(a,b)\ ;\ (k\in\mathbb{Z}\ ,\ k\neq 0)$
- $\begin{cases} a|b \\ a|c \end{cases} \Rightarrow a|b\pm c$

گروه آموزشی ماز

۴۰- معادلهٔ $۲۷x+۳۹y=۱۰۰۲$ چند دسته جواب طبیعی دارد؟

۱) ۴ ۲) ۳ ۳) ۲ ۴) ۱

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ هم‌نهشتی ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

ابتدا شرط جواب معادله را بررسی می‌کنیم:

$(۲۷,۳۹)=۳|۱۰۰۲$ ✓

$$\xrightarrow{\div ۳} ۹x+۱۳y=۳۳۴ \Rightarrow ۱۳y\overset{۹}{\equiv}۳۳۴$$

$$\Rightarrow ۱۳y\overset{۹}{\equiv}۱ \xrightarrow[۱\overset{۹}{\equiv}-۸]{۱۳\overset{۹}{\equiv}۴} ۴y\overset{۹}{\equiv}-۸ \Rightarrow y\overset{۹}{\equiv}-۲ \Rightarrow y=-۲+۹t \quad (t\in\mathbb{Z})$$

$$۹x+۱۳(-۲+۹t)=۳۳۴ \Rightarrow x=۴۰-۱۳t \Rightarrow \begin{cases} x=۴۰-۱۳t \\ y=-۲+۹t \end{cases} \quad (t\in\mathbb{Z})$$

حالا شرط جواب‌های طبیعی را چک می‌کنیم:

$$\begin{cases} x>0 \Rightarrow ۴۰-۱۳t>0 \Rightarrow t<\frac{۴۰}{۱۳} \\ y>0 \Rightarrow -۲+۹t>0 \Rightarrow t>\frac{۲}{۹} \end{cases} \Rightarrow \frac{۲}{۹}<t<\frac{۴۰}{۱۳} \Rightarrow t=۱,۲,۳$$

پس معادله ۳ دسته جواب طبیعی دارد.

$t=۱ \Rightarrow x=۲۷\ ,\ y=۷$

$t=۲ \Rightarrow x=۱۴\ ,\ y=۱۶$

$t=۳ \Rightarrow x=۱\ ,\ y=۲۵$

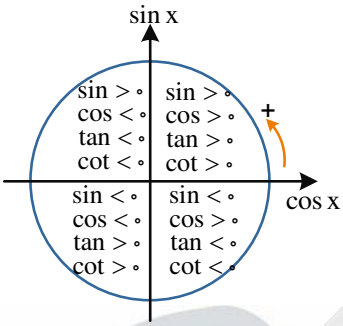
گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

و اما بریم سراغ یه جمع‌بندی از نیمسال اول حسابان ۲ (فصل ۱و۲و۳) هندسه ۳ (صفحات ۹ تا ۴۶) گسسته (صفحات ۱ تا ۴۲)

مفاهیم پایه

دایره مثلثاتی



اتحادها

$$\left.\begin{array}{l}\sin^۲\alpha = ۱-\cos^۲\alpha \\ \cos^۲\alpha = ۱-\sin^۲\alpha\end{array}\right\} \Leftarrow \sin^۲\alpha+\cos^۲\alpha = ۱$$

$$۱+\tan^۲\alpha = \frac{۱}{\cos^۲\alpha} \quad \text{و} \quad ۱+\cot^۲\alpha = \frac{۱}{\sin^۲\alpha}$$

$$\tan\alpha\cot\alpha = ۱ \Leftarrow \tan\alpha = \frac{۱}{\cot\alpha}$$

روابط $(\alpha \pm \beta)$

$$\sin(\alpha\pm\beta) = \sin\alpha\cos\beta \pm \sin\beta\cos\alpha$$

$$\cos(\alpha\pm\beta) = \cos\alpha\cos\beta \mp \sin\alpha\sin\beta$$

$$\tan(\alpha\pm\beta) = \frac{\tan\alpha \pm \tan\beta}{۱\mp\tan\alpha\tan\beta}$$

روابط (۲α)

$$\sin(۲\alpha) = ۲\sin\alpha\cos\alpha$$

$$\cos(۲\alpha) = \cos^۲\alpha - \sin^۲\alpha$$

$$\tan(۲\alpha) = \frac{۲\tan\alpha}{۱-\tan^۲\alpha}$$

زوایای متمم $(\alpha, ۹۰^\circ-\alpha)$

$$\sin(۹۰^\circ-\alpha) = \cos\alpha$$

$$\cos(۹۰^\circ-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\tan(۹۰^\circ-\alpha) = \cot\alpha$$

$$\cot(۹۰^\circ-\alpha) = \tan\alpha$$

زوایای مکمل $(\alpha, ۱۸۰^\circ-\alpha)$

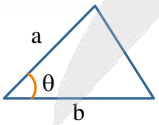
$$\sin(۱۸۰^\circ-\alpha) = \sin\alpha$$

$$\cos(۱۸۰^\circ-\alpha) = -\cos\alpha$$

$$\tan(۱۸۰^\circ-\alpha) = -\tan\alpha$$

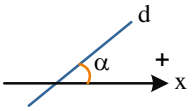
$$\cot(۱۸۰^\circ-\alpha) = -\cot\alpha$$

مساحت مثلث



$$S = \frac{۱}{۲}ab\sin\theta$$

شیب خط

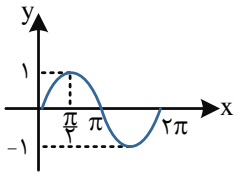


$$m_d = \tan\alpha$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

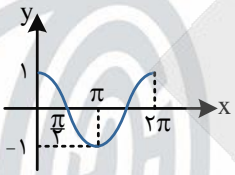
رسم نمودارهای مثلثاتی

نمودار $y = \sin x$



آزمون وی ای پی

نمودار $y = \cos x$



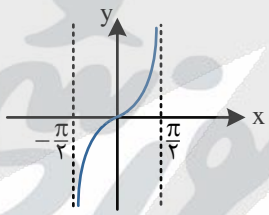
تابع $y = a + b\sin(cx + d)$

- $a + |b| \leftarrow \max$
- $a - |b| \leftarrow \min$
- دوره تناوب $(T) \leftarrow T = \frac{۲\pi}{|c|}$
- تابع در $y = ۰$
  - صعودی $\leftarrow bc > ۰$
  - نزولی $\leftarrow bc < ۰$

تابع $y = a + b\cos(cx + d)$

- $a + |b| \leftarrow \max$
- $a - |b| \leftarrow \min$
- دوره تناوب $(T) \leftarrow T = \frac{۲\pi}{|c|}$

نمودار $y = \tan x$



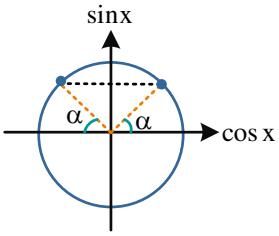
تابع $y = \tan(ax)$

- دوره تناوب $\leftarrow T = \frac{\pi}{|a|}$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

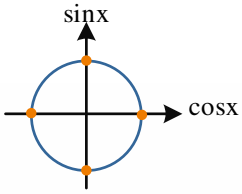
WWW.ArefOnline.ir

معادله مثلثاتی



معادله سینوسی

$$\sin x = \sin\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha\ (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 2k\pi + \pi - \alpha (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$

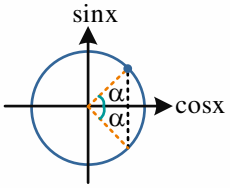


حالات خاص معادله سینوسی

$$\sin x = 0 \Rightarrow x = k\pi$$

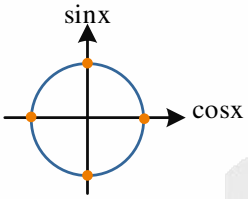
$$\sin x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\sin x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi - \frac{\pi}{2}$$



معادله کسینوسی

$$\cos x = \cos\alpha \Rightarrow \begin{cases} x = 2k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z}) \\ x = 2k\pi - \alpha (k \in \mathbb{Z}) \end{cases}$$



حالات خاص معادله کسینوسی

$$\cos x = 0 \Rightarrow x = k\pi + \frac{\pi}{2}$$

$$\cos x = 1 \Rightarrow x = 2k\pi$$

$$\cos x = -1 \Rightarrow x = 2k\pi + \pi$$

معادله تانژانت و کتانژانتی

$$\tan x = \tan\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$$

$$\cot x = \cot\alpha \Rightarrow x = k\pi + \alpha (k \in \mathbb{Z})$$

گروه آموزشی ماز
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

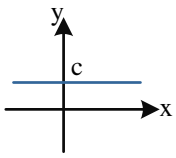
WWW.ArefOnline.ir

مفاهیم پایه

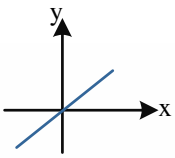
نمایش تابع
- نمودار پیکانی
- زوج مرتبی
- مختصاتی

شرط تابع بودن
به ازای هر x، y متفاوت نداشته باشیم.

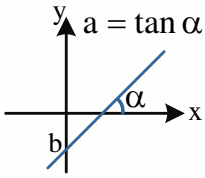
انواع تابع

تابع ثابت


- ضابطه ← $y = c$
- دامنه ← $\mathbb{R}$
- برد ← $\{C\}$

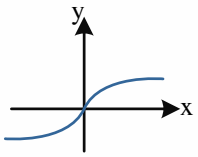
تابع همانی


- ضابطه ← $y = x$
- دامنه ← $\mathbb{R}$
- برد ← برد با دامنه برابر است.

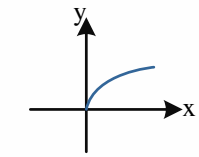
تابع خطی


- ضابطه ← $y = ax + b$
- دامنه ← $\mathbb{R}$
- برد ← $\mathbb{R}$

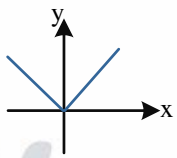
تابع چندجمله‌ای
- ضابطه ← چندجمله‌ای‌های جبری
- دامنه ← $\mathbb{R}$

تابع گویا


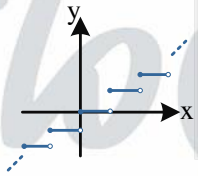
- ضابطه ← $y = \frac{p(x)}{q(x)}$
- دامنه ← $\mathbb{R} - \{x | q(x) = 0\}$

تابع رادیکالی


- با فرجه فرد
  - ضابطه ← $y = \sqrt[n]{x}$
  - دامنه ← $\mathbb{R}$
- با فرجه زوج
  - ضابطه ← $y = \sqrt[n]{x}$
  - دامنه ← $x \geq 0$

تابع قدرمطلقی


- ضابطه ← $y = |x|$
- دامنه ← $\mathbb{R}$

تابع براکت یا جزء صحیح


- ضابطه ← $y = [x]$
- دامنه ← $\mathbb{R}$

تساوی دو تابع
- شرط اول ← برابری دامنه‌ها قبل از ساده کردن
- شرط دوم ← یکسان بودن ضابطه‌ها

جبر توابع
- $(f \pm g)(x) = f(x) \pm g(x), D_{f \pm g} = D_f \cap D_g$
- $(fg)(x) = f(x)g(x),\ D_{fg} = D_f \cap D_g$
- $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)},\ D_{\frac{f}{g}} = D_f \cap D_g - \{x | g(x) = 0\}$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

تغییر تابع

انتقال

- افقی ($k>0$)
  - $f(x+k)$ ← k واحد حرکت به چپ
  - $f(x-k)$ ← k واحد حرکت به راست
- عمودی ($k>0$)
  - $f(x)+k$ ← k واحد حرکت به بالا
  - $f(x)-k$ ← k واحد حرکت به پایین

انبساط و انقباض

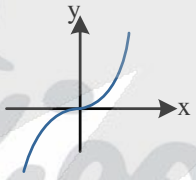
- $f(kx)$ ← افقی
  - $k>1$ ← انقباض (x ها، $\frac{1}{k}$ برابر می‌شوند)
  - $0<k<1$ ← انبساط (x ها، $\frac{1}{k}$ برابر می‌شوند)
- $kf(x)$ ← عمودی
  - $k>1$ ← انبساط (y ها، k برابر می‌شوند)
  - $0<k<1$ ← انقباض (y ها، k برابر می‌شوند)

قرینه‌ها

- $f(-x)$ ← $f(x)$ را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.
- $-f(x)$ ← $f(x)$ را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.

تابع درجه ۳

- فرم کلی: $y=ax^3$
- نمودار تابع $y=x^3$



ترکیب توابع

- $(fog)(x)=f(g(x))$ ← دامنه: $D_{fog}=\{x\in D_g \mid g(x)\in D_f\}$
- $(gof)(x)=g(f(x))$ ← دامنه: $D_{gof}=\{x\in D_f \mid f(x)\in D_g\}$

یکنوایی تابع

- اکیداً صعودی
  - $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$
  - $f(a) \le f(b) \Rightarrow a \le b$
- اکیداً نزولی
  - $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$
  - $f(a) \le f(b) \Rightarrow a \ge b$
- صعودی: $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \le f(x_2)$
- نزولی: $x_1, x_2 \in D_f, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \ge f(x_2)$

تابع وارون و یک‌به‌یک

- شرط یک‌به‌یک بودن: در تابع y تکراری نداشته باشیم.
- توابع اکیداً یکنوا: یک‌به‌یک هستند.
- شرط وارون‌پذیری: یک‌به‌یک بودن
- دامنه وارون تابع f: برد تابع f
- برد وارون تابع f: دامنه تابع f
- $(a,b) \in f$: $(b,a) \in f^{-1}$

تقسیم و بخش‌پذیری

- رابطه تقسیم: $P(x) = B(x)\ Q(x) + R$
  - $P(x)$: مقسوم
  - $B(x)$: مقسوم‌علیه
  - $Q(x)$: خارج‌قسمت
  - R: باقی‌مانده
- باقی‌مانده تقسیم $P(x)$ بر $x - a$: $P(a)$

مفاهیم پایه

- **شرط وجود حد**: برابری حد چپ و راست
- **قضایای حد**:

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)\pm g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\pm\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\big(f(x)g(x)\big)=\lim_{x\to a}f(x)\times\lim_{x\to a}g(x)$$

$$\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right)=\frac{\lim\limits_{x\to a}f(x)}{\lim\limits_{x\to a}g(x)}\quad\left(\lim_{x\to a}g(x)\neq 0\right)$$

- **حد تابع $y=[x]$**:

$$\lim_{x\to a^+}[x]=\big[a^+\big]=a$$
$$\lim_{x\to a^-}[x]=\big[a^-\big]=a-1$$
$$\Leftarrow a\in\mathbb{Z}$$

$$\lim_{x\to a}[x]=[a]\Leftarrow a\notin\mathbb{Z}$$

رفع ابهام $\frac{0}{0}$

- به کمک اتحادهای چاق و لاغر و مزدوج و فاکتورگیری
- به کمک هم‌ارزی‌ها (اگر $u\to 0$):

$$\sin u\sim u$$
$$\tan u\sim u$$
$$\cos u\sim 1-\frac{u^2}{2}$$

حد بی‌نهایت

$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^+}=+\infty$$
$$\frac{\text{عدد مثبت}}{0^-}=-\infty$$
$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^+}=-\infty$$
$$\frac{\text{عدد منفی}}{0^-}=+\infty$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

حد در بی‌نهایت

- $\frac{\infty}{\infty}$ ← مبهم
- $\frac{\text{عدد}}{\infty} = 0$
- اگر $x \to \pm\infty$ ← هم‌ارزی پرتوان ← جمله با بزرگ‌ترین توان را انتخاب می‌کنیم.

مجانب‌ها

قائم

$\lim_{x \to a} f(x) = \infty \leftarrow x = a$

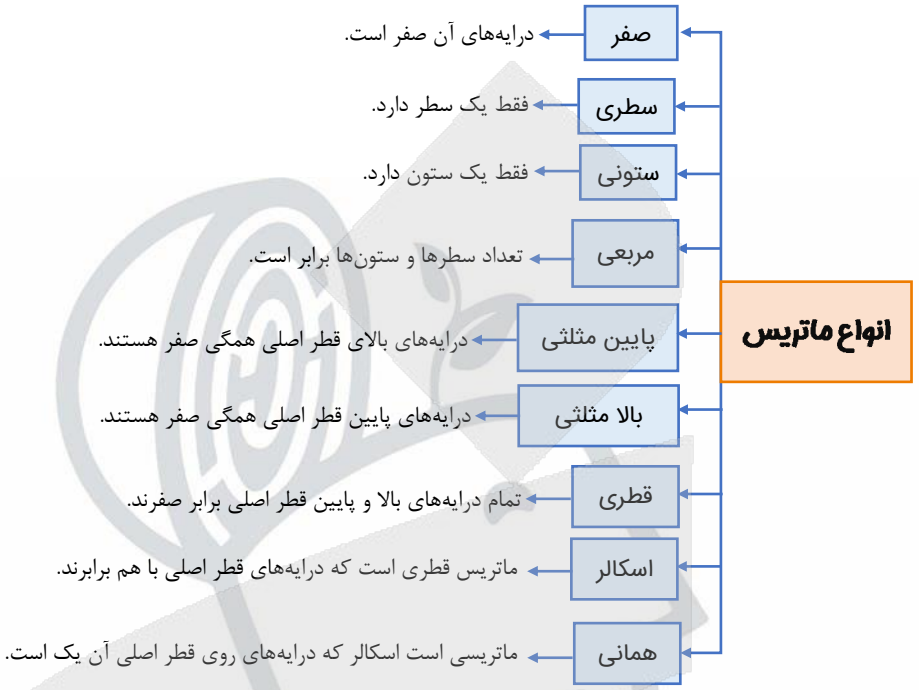
در توابع گویا، ریشه‌های مخرج مجانب قائم هستند، به شرطی که ریشه صورت نباشند.

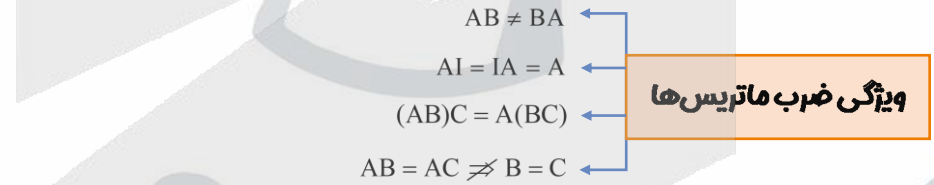
افقی

$\lim_{x \to \infty} f(x) = a \leftarrow y = a$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir





www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

دترمینان و ویژگی‌های آن

دترمینان ماتریس ۲×۲: $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$

رابطه کیلی همیلتون در ماتریس ۲×۲ ← $A^2 - (a+d)A + |A|I = \bar{O}$

دترمینان ماتریس ۳×۳ ← $\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = a(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} e & f \\ h & i \end{vmatrix} + b(-1)^{1+2}\begin{vmatrix} d & f \\ g & i \end{vmatrix} + c(-1)^{1+3}\begin{vmatrix} d & e \\ g & h \end{vmatrix}$

اگر همه درایه‌های یک سطر یا یک ستون ماتریس مربعی صفر باشد، دترمینان آن صفر است.

اگر A و B دو ماتریس مربعی هم‌مرتبه باشند ← $|AB| = |BA| = |A||B|$

دترمینان ماتریس‌های قطری و مثلثی برابر است با حاصل‌ضرب درایه‌های قطر اصلی

آزمون وی ای پی $A_{n\times n}, k \in \mathbb{R} : |kA| = k^n |A|$

وارون ماتریس

وارون ماتریس ۲×۲: $A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \Rightarrow A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$

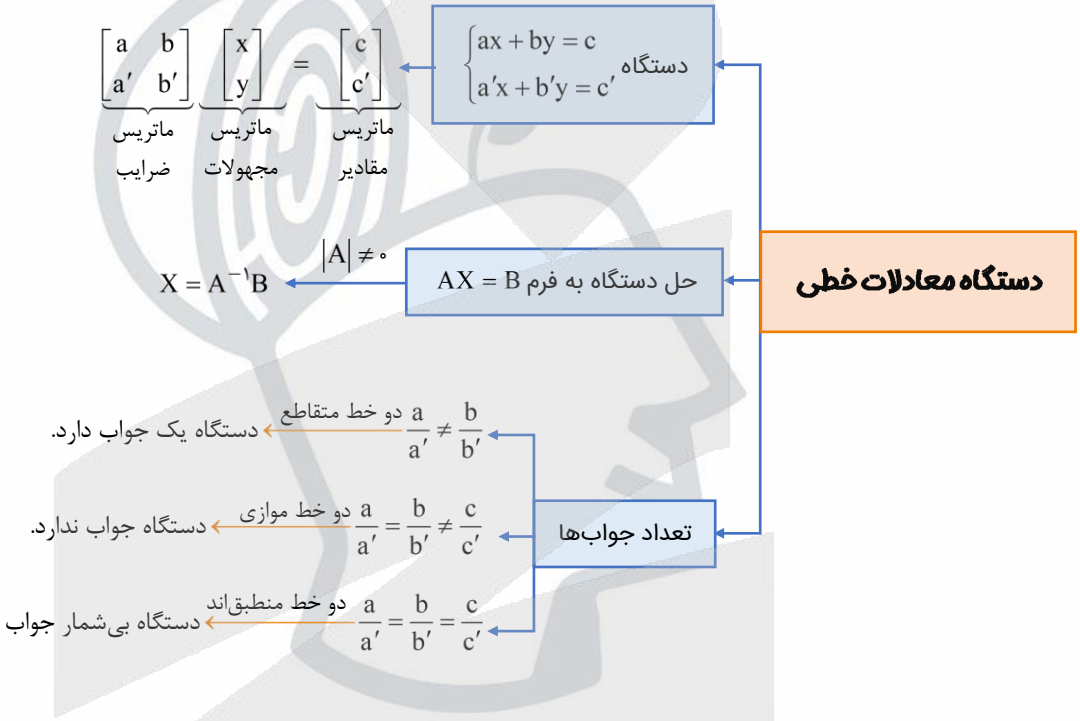
برخی از ویژگی‌ها:

$AA^{-1} = I$

$(A^{-1})^{-1} = A$

$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$

معادله ماتریسی $AX = B$: $A^{-1}AX = A^{-1}B \Rightarrow X = A^{-1}B$



گروه آموزشی ماز

دایره

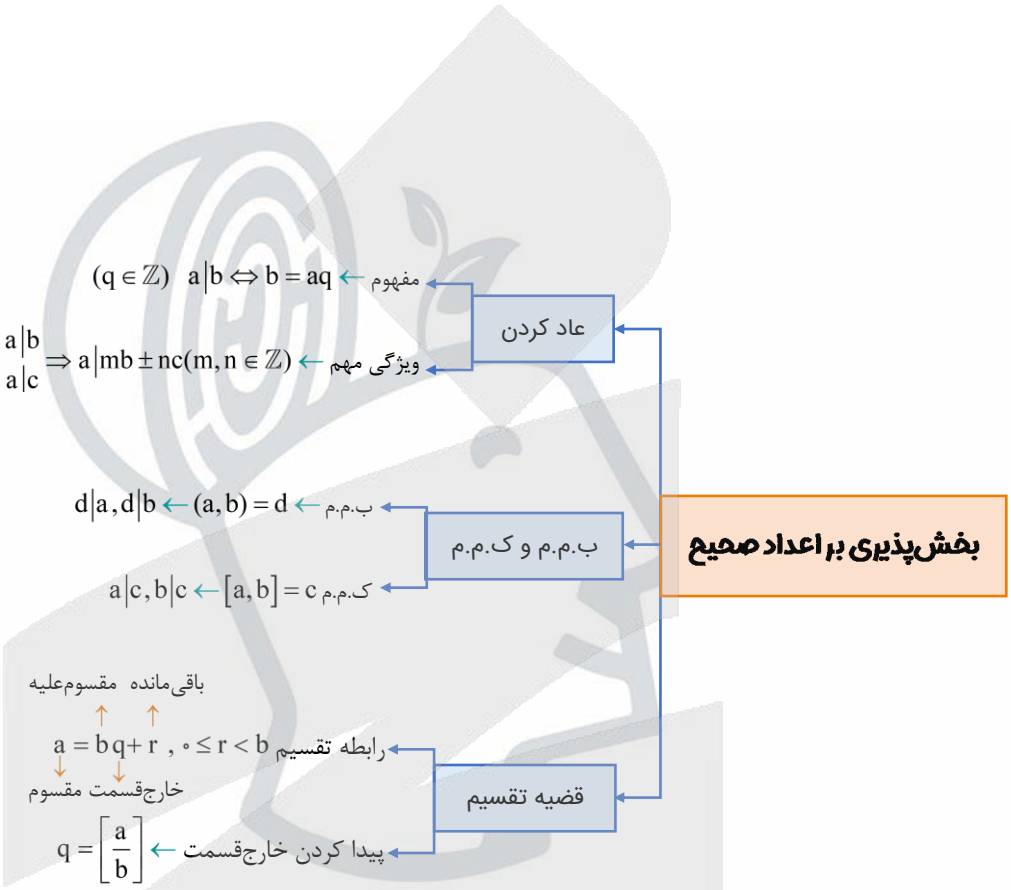
تعریف
- مکان هندسی مجموعه نقاطی از صفحه که از یک نقطه ثابت (مرکز) به فاصله ثابت (شعاع) باشند.

معادله استاندارد به مرکز (α,β) و شعاع R
- $(x-\alpha)^2+(y-\beta)^2=R^2$

معادله گسترده
- $x^2+y^2+ax+by+c=0$
- پیدا کردن مرکز از روی آن ← $O=(\frac{-a}{2},\frac{-b}{2})$
- پیدا کردن شعاع از روی آن ← $R=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2-4c}$
- برای پیدا کردن شعاع و مرکز باید ضریب x^2 و y^2 برابر یک باشد.
- شرط دایره بودن
  - ضریب x^2 و y^2 یکسان باشد.
  - $a^2+b^2-4c>0$

وضعیت نسبی خط و دایره به شعاع R
(OH فاصله مرکز از خط)
- $OH>R$ ← متخارج
- $OH=R$ ← مماس
- $OH<R$ ← متقاطع

وضعیت نسبی دو دایره به شعاع R و R'
(d فاصله بین مرکزها)
- $d>R+R'$ ← متخارج
- $d=R+R'$ ← مماس خارج
- $|R-R'|<d<R+R'$ ← متقاطع
- $d=|R-R'|$ ← مماس داخل



گروه آموزشی ماز

۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

WWW.ArefOnline.ir

همنهشتی

- مفهوم: $a \overset{m}{\equiv} b \Leftrightarrow a-b=mt$ یا $a=mt+b \quad (t\in\mathbb{Z})$
- دو خاصیت مهم
  - مضارب پیمانه را به طرفین همنهشتی می‌توانیم اضافه و یا کم کنیم.
  - ادغام پیمانه‌ها: $\begin{cases} a \overset{m}{\equiv} b \\ a \overset{n}{\equiv} b \end{cases} \Rightarrow a \overset{[m,n]}{\equiv} b$
- تعیین باقی‌مانده اعداد توان‌دار
  - توانی از پایه را می‌یابیم که به پیمانه موردنظر با ۱ یا ۱− هم‌نهشت باشند.
  - به کمک توان پیدا شده، توان اصلی را تولید می‌کنیم.
- تقسیم طرفین همنهشتی: $ac \overset{m}{\equiv} bc \xrightarrow[(c,m)=d]{\div c} a \overset{\frac{m}{d}}{\equiv} b$
- معادله همنهشتی $ax \overset{m}{\equiv} b$
  - اگر $(a,m)\mid b$ ← معادله بی‌شمار جواب دارد.
  - اگر $(a,m)\nmid b$ ← معادله جواب ندارد.
- معادله سیاله خطی
  - فرم کلی ← $ax+by=c$
  - اگر $(a,b)\mid c$ ← معادله بی‌شمار جواب دارد.
  - اگر $(a,b)\nmid c$ ← معادله جواب ندارد.
- تعیین رقم یکان
  - همنهشتی به پیمانه ۱۰

گراف

- **دنباله درجات**
  - مجموع درجات رأس‌ها، دو برابر تعداد یال‌هاست.
  - تعداد رأس‌های درجه فرد، باید زوج باشد.
- **مجموعه همسایه‌های رأس a**
  - باز ← خود a در آن نیست. $N_G(a)$
  - بسته ← خود a در آن موجود است. ← $N_G[a]$
- **گراف r− منتظم**
  - مجموع درجات rp ← $2q = rp$
  - rp نمی‌تواند هیچ‌گاه فرد باشد.
- **گراف کامل K_P**
  - همه رأس‌ها با هم مجاور هستند.
  - حداکثر و حداقل درجه آن $(p-1)$ است.
  - تعداد یال‌ها ← $q = \binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$
- **گراف تهی $(\bar{K}_p)$**
  - هیچ یالی ندارد.
- **مسیر**
  - در گراف از مرتبه P، طول مسیر حداکثر $P-1$ است.
  - در گراف P_n، دو رأس درجه یک و بقیه رأس‌ها از درجه ۲ هستند.
  - در گراف P_n، تعداد کل مسیرهای موجود برابر است با: $\binom{P}{2}$
  - در هر گراف ساده، تعداد مسیرهای به طول صفر همان تعداد رأس‌ها و تعداد مسیرهای به طول یک همان تعداد یال‌ها می‌باشد.
- **دور**
  - گرافی که از تنها یک دور به طول n تشکیل شده است را با C_n نمایش می‌دهند.
  - تعداد دورها به طول n در گراف K_P ← $\binom{P}{n}\frac{(n-1)!}{2}$
- **همبند و ناهمبند**
  - همبند فقط از یک بخش تشکیل شده است.
  - اگر $q \geq \binom{P-1}{2}+1$ گراف قطعاً همبند است.
  - اگر $\Delta = P-1$ گراف قطعاً همبند است.
  - اگر $\delta = P-1$ گراف قطعاً همبند است.

فیزیک

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۵۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۲۴۵ متری سطح زمین رها می‌شود. تندی متوسط گلوله در ۳ ثانیهٔ آخر حرکتش چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$

۱) ۵۵ ۲) ۶۵ ۳) ۵۰ ۴) ۶۰

(آزمون مرحلهٔ ۳ سالیانه – فیزیک)

۵۱- گلوله‌ای در شرایط خلأ از ارتفاع ۱۲۵ متری زمین رها می‌شود. سرعت متوسط گلوله در ۲ ثانیهٔ آخر حرکت، چند متر بر ثانیه است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$

۱) ۳۰ ۲) ۳۵ ۳) ۴۰ ۴) ۴۵

(کنکور تیر ۱۴۰۳ – فیزیک رشته ریاضی)

برای مشاهدهٔ همهٔ مطابقت‌ها اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir یا رو این کلیک کن!

WWW.ArefOnline.ir

دانش‌آموزان عزیز ماز

رسیدیم به یک آزمون بسیار مهم که قراره نتیجهٔ درس خوندن شما در پاییز رو بهتون نشون بده.

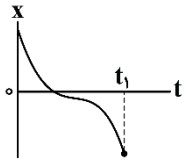
در این آزمون، فصل‌های یک و دو به‌صورت کامل قرار دارن و از فصل سوم هم، قسمت نوسان رو داریم. همهٔ این مباحث، یعنی **حرکت‌شناسی**، **دینامیک** و **نوسان** از مباحث پرسؤال و نسبتاً دشوار کنکور محسوب می‌شن که معمولاً چند سؤال سختی که در کنکور مطرح می‌شه به همین فصل‌ها اختصاص داره. یادتون باشه که از مباحث این آزمون، ۸ تست در کنکور **تجربی** و ۱۰ تست در کنکور **ریاضی** خواهیم داشت که نشون‌دهندهٔ اهمیت بالای این آزمونه.

بیش‌تر سؤالات این آزمون، کاملاً استاندارد و بر مبنای سؤالات کنکور و تمرین‌های کتاب هستن تا متوجه اهمیت کنکورهای گذشته و کتاب درسی بشین. البته حدود ۵ سؤال ایده‌دار هم در آزمون قرار گرفته تا ابتکار و توانایی حل مسائل جدید هم مورد سنجش قرار بگیره.

مثل همیشه فراموش نکنین مهم‌ترین بخش هر آزمون بعد از برگزاری اون انجام می‌شه که همون تحلیل آزمون هست. تلاشمون بر این بوده که با آماده‌سازی یک پاسخ‌نامهٔ جامع، کیفیت تحلیل آزمونتون رو هم بالاتر ببریم.

سعید احمدی و سجاد صادقی‌زاده (رتبهٔ ۱ کنکور ۹۲) ـ مسئولین درس فیزیک پایهٔ دوازدهم آزمون ماز

۴۱- **نمودار مکان ـ زمان متحرکی به شکل مقابل است. در بازهٔ زمانی صفر تا t_1، تندی متحرک چگونه تغییر می‌کند؟**



۱) پیوسته افزایش می‌یابد.

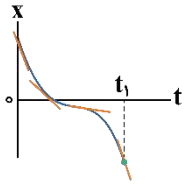
۲) ابتدا افزایش، سپس کاهش می‌یابد.

۳) پیوسته کاهش می‌یابد.

۴) ابتدا کاهش، سپس افزایش می‌یابد.

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

می‌دانیم اندازهٔ شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ موردنظر، همان تندی جسم در آن لحظه است. مطابق شکل، اندازهٔ شیب‌های مماس بر نمودار، ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد. پس تندی جسم ابتدا کاهش و سپس افزایش می‌یابد.



مشاوره

استفاده از شیب مماس بر نمودار مکان ـ زمان برای تحلیل سرعت لحظه‌ای یا تندی لحظه‌ای متحرک هم در کنکور و هم در امتحانات نهایی همواره موردتوجه طراحان هست و حتماً به کمک پاسخ‌نامه سعی کنید تحلیل درست این سؤال رو خوب یاد بگیرید.

نمودار مکان ـ زمان

در مورد نمودار مکان ـ زمان، نکات مهم زیر را باید درنظر بگیریم:

۱- سرعت متوسط برابر است با شیب خط واصل دو نقطه از نمودار مکان ـ زمان:

$$\vec{v}_{av} = \frac{\Delta \vec{x}}{\Delta t}$$

۲- سرعت لحظه‌ای برابر است با شیب خط مماس بر نمودار مکان ـ زمان در لحظهٔ موردنظر:

$v_{\text{لحظه‌ای}}$ = شیب خط مماس

۳- هرجا که نمودار مکان ـ زمان محور زمان را قطع کند و از آن عبور نماید، بُردار مکان تغییر علامت می‌دهد.

۴- هرجا نمودار مکان ـ زمان صعودی باشد $(v > 0)$، متحرک در جهت محور حرکت می‌کند، هرجا نزولی باشد $(v < 0)$، متحرک در خلاف جهت محور حرکت می‌کند.

۵- اگر اندازهٔ شیب‌های مماس بر نمودار مکان ـ زمان افزایش یابد، تندی متحرک افزایش می‌یابد و بالعکس.

گروه آموزشی ماز

۴۲- **متحرکی بر روی محور x درحال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 0s$ تا $t_2 = 6s$ در SI برابر $-2\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_2 = 6s$ تا $t_3 = 15s$ در SI برابر $3\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1 = 0$ تا $t_3 = 15s$ در SI کدام است؟**

۱) $\frac{1}{2}\vec{i}$ ۲) $\vec{i}$ ۳) $-\vec{i}$ ۴) $-\frac{1}{2}\vec{i}$

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

با توجه به رابطهٔ $a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$ داریم:

$$t_1=0\Rightarrow t_2=6s: a_{av_1}=\frac{\Delta v_1}{\Delta t_1}\Rightarrow -2=\frac{\Delta v_1}{6}\Rightarrow \Delta v_1=-12\frac{m}{s}$$

$$t_2=6s\Rightarrow t_3=15s: a_{av_2}=\frac{\Delta v_2}{\Delta t_2}\Rightarrow 3=\frac{\Delta v_2}{9}\Rightarrow \Delta v_2=27\frac{m}{s}$$

$$t_1=0\Rightarrow t_3=15s: a_{av_3}=\frac{\Delta v_3}{\Delta t_3}=\frac{\Delta v_1+\Delta v_2}{\Delta t_3}=\frac{-12+27}{15}=1\frac{m}{s^2}\Rightarrow \vec{a}_{av_3}=\vec{i}(\frac{m}{s^2})$$

بچه‌ها حواستون باشه که بردار تغییر سرعت از $t_1=0s$ تا $t_3=15s$ برابر با مجموع بردار تغییر سرعت $t_1=0s$ تا $t_2=6s$ و بردار تغییر سرعت $t_2=6s$ تا $t_3=15s$ است.

نکته

اگر شتاب متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 برابر a_{av_1}، در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 برابر a_{av_2}، ... و در بازهٔ زمانی t_{n-1} تا t_n برابر a_{av_n} باشد، آن‌گاه در بازهٔ زمانی صفر تا t_n، شتاب متوسط متحرک برابر است با:

$$a_{av_{0\to t_n}}=\frac{(t_2-t_1)a_{av_1}+(t_3-t_2)a_{av_2}+\cdots+(t_n-t_{n-1})a_{av_n}}{t_n}$$

میان‌بُر

$$a_{av_{0\text{ تا }15s}}=\frac{(t_2-t_1)a_{av_1}+(t_3-t_1)a_{av_2}}{t_3-t_1}=\frac{6(-2)+9(3)}{15}=1\frac{m}{s^2}$$

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۰

۴۹- متحرکی روی محور x درحال حرکت است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1=5s$ تا $t_2=10s$ در SI برابر $-4\vec{i}$ و در بازهٔ زمانی $t_2=10s$ تا $t_3=12s$ در SI برابر $2\vec{i}$ است. بردار شتاب متوسط آن در بازهٔ زمانی $t_1=5s$ تا $t_3=12s$ در SI، کدام است؟

۱) $-\frac{2}{7}\vec{i}$ ۲) $-\frac{16}{7}\vec{i}$ ۳) $4\vec{i}$ ۴) $8\vec{i}$

پاسخ تشریحی:

با استفاده از تعریف شتاب متوسط داریم:

$$\left.\begin{array}{l}\frac{v(10s)-v(5s)}{10-5}=-4\Rightarrow v(10s)-v(5s)=-20\\ \frac{v(12s)-v(10s)}{12-10}=2\Rightarrow v(12s)-v(10s)=4\end{array}\right\}\xrightarrow{\text{مجموع طرفین}} v(12s)-v(5s)=-16\xrightarrow{\text{تقسیم طرفین بر 7}}\underbrace{\boxed{\frac{v(12s)-v(5s)}{7}}}_{\text{شتاب متوسط در بازهٔ } t=5s \text{ تا } t=12s}=-\frac{16}{7}\frac{m}{s^2}$$

میان‌بُر:

$$a_{av_{t_1\text{ تا }t_3}}=\frac{-4(10-5)+2(12-10)}{12-5}=\frac{-16}{7}\frac{m}{s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

گروه آموزشی ماز

۴۳- شناگری از ابتدای استخری به طول L، یک بار در بازهٔ زمانی صفر تا t_1 طول استخر را با تندی متوسط s_1 رفته و برمی‌گردد و در بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 طول استخر را با تندی متوسط s_2 طی می‌کند. در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، اندازهٔ سرعت متوسط شناگر کدام است؟

۱) $\frac{s_1s_2}{2(s_1+2s_2)}$ ۲) $\frac{2s_1s_2}{s_2+2s_1}$ ۳) $\frac{s_1s_2}{s_2+2s_1}$ ۴) $\frac{s_1s_2}{s_1+2s_2}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

گام اول:

برای بازهٔ زمانی صفر تا t_1 داریم:

$$s_1=\frac{L_1}{\Delta t_1}=\frac{2L}{t_1}\Rightarrow t_1=\frac{2L}{s_1}\ *$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

گام دوم:

برای بازهٔ زمانی t_1 تا t_2 داریم:

$$s_2=\frac{L_2}{\Delta t_2}=\frac{L}{t_2-t_1}\Rightarrow t_2-t_1=\frac{L}{s_2}\xrightarrow{*}t_2-\frac{2L}{s_1}=\frac{L}{s_2}\Rightarrow t_2=\frac{L}{s_2}+\frac{2L}{s_1}=L(\frac{2}{s_1}+\frac{1}{s_2})$$

۱

با توجه به این‌که در بازهٔ زمانی صفر تا t_2، شناگر یک بار طول استخر را رفته و برگشته و یک بار هم فقط طول استخر را طی کرده است، بنابراین اندازهٔ جابه‌جایی شناگر برابر با طول استخر بوده و داریم:

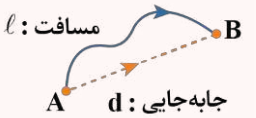
$$v_{av}=\frac{|\Delta x|}{\Delta t}=\frac{L}{t_2}=\frac{L}{L(\frac{2}{s_1}+\frac{1}{s_2})}=\frac{s_1s_2}{2s_2+s_1}$$

دام تستی

صورت این تست خیلی گمراه‌کننده‌ست و شما اگر با دقت به نحوهٔ حرکت و مسیر طی‌شده در هر دو حالت نگاه نکنی، قطعاً به یکی از گزینه‌های (۱)، (۲) یا (۳) می‌رسی.

مقایسهٔ مسافت و جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط

۱- در شکل زیر، متحرک از مسیر نشان‌داده‌شده از A به B می‌رود. در این صورت طول مسیر واقعی برابر مسافت طی‌شده است و طول پاره‌خطی که A را به B وصل می‌کند برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است (درواقع جابه‌جایی کوتاه‌ترین مسافت میان دو نقطه است). به شکل زیر دقت کنید:



۲- مسافت، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که جابه‌جایی، کمیتی برداری است و جهت دارد.

۳- یکای مسافت و جابه‌جایی، هر دو در SI برابر متر (m) است.

۴- اندازهٔ جابه‌جایی همواره کوچک‌تر یا مساوی مسافت طی‌شده است.

$$|\vec{d}|\le \ell$$

۵- در شرایطی جابه‌جایی و مسافت هم‌اندازه هستند که متحرک تغییر جهت ندهد.

مثال

در کدام‌یک از حرکت‌های زیر، مسافت طی‌شده برابر اندازهٔ جابه‌جایی متحرک است؟

الف: اتومبیلی که در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند.

ب: اتومبیلی که ابتدا در مسیر مستقیم به سمت شمال حرکت می‌کند و سپس در مسیر مستقیم به سمت شرق می‌رود.

پ: ماهواره‌ای که در مسیر دایره‌ای دور کرهٔ زمین می‌چرخد.

ت: شناگری که طول استخر را شنا می‌کند و دوباره به مکان اولیهٔ خود برمی‌گردد.

پاسخ: مطابق نکات فوق، برای آن‌که در حرکتی مسافت طی‌شده هم‌اندازهٔ جابه‌جایی باشد، حرکت باید بدون هیچ‌گونه تغییر جهتی انجام شود و در مسیر مستقیم باشد. در بین عبارت‌های داده‌شده، فقط در عبارت «الف» متحرک روی خط راست و بدون تغییر جهت حرکت می‌کند.

۶- با تقسیم مسافت طی‌شده بر زمان حرکت، تندی متوسط حرکت به‌دست می‌آید:

$$s_{av}=\frac{\text{مسافت}}{\text{زمان}}=\frac{\ell}{\Delta t}$$

۷- با تقسیم جابه‌جایی بر زمان حرکت، سرعت متوسط به‌دست می‌آید:

$$\vec{v}_{av}=\frac{\text{بردار جابه‌جایی}}{\text{زمان}}=\frac{\vec{d}}{\Delta t}$$

۸- تندی متوسط، کمیتی نرده‌ای است، درحالی‌که سرعت متوسط، کمیتی برداری است.

۹- اندازهٔ سرعت متوسط همواره کوچک‌تر یا مساوی تندی متوسط است. هنگامی این دو کمیت هم‌اندازه هستند که متحرک روی مسیر مستقیم بدون تغییر جهت حرکت کند.

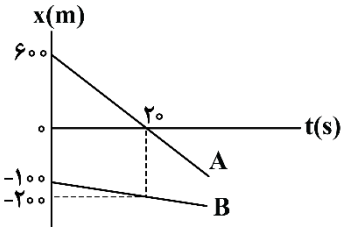
۱۰- در حرکت بر روی محور x برای محاسبهٔ جابه‌جایی و سرعت متوسط داریم:

$$\vec{d}=\Delta\vec{x}=\vec{x}_2-\vec{x}_1$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{av}=\frac{\Delta\vec{x}}{\Delta t}$$

WWW.ArefOnline.ir

۴۴- نمودار مکان ـ زمان دو خودروی A و B که روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. اگر ابتدا در لحظهٔ t_1 و سپس در لحظهٔ t_2 فاصلهٔ دو متحرک از هم ۳۰۰ متر باشد، نسبت $\frac{t_1}{t_2}$ کدام است؟



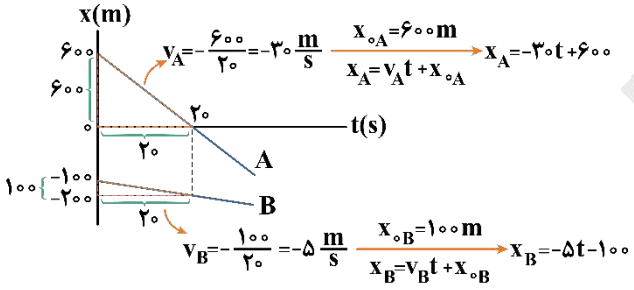
۱) ۰/۴
۲) ۲/۵
۳) ۰/۸
۴) ۱/۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

روش اول:

گام اول:

ابتدا به کمک شیب نمودارها، سرعت هر دو خودرو را به‌دست آورده و سپس معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها را تشکیل می‌دهیم؛ بنابراین داریم:



گام آخر:

می‌دانیم فاصلهٔ دو متحرک A و B از هم به‌صورت $|x_A-x_B|$ به‌دست می‌آید. پس داریم:

$$|x_A-x_B|=۳۰۰\Rightarrow|-۲۵t+۷۰۰|=۳۰۰\Rightarrow\begin{cases}-۲۵t+۷۰۰=۳۰۰\Rightarrow t_1=۱۶s\\-۲۵t+۷۰۰=-۳۰۰\Rightarrow t_2=۴۰s\end{cases}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=۰/۴$$

روش دوم:

می‌توانیم با روش نسبی نیز مسئله را حل کنیم. چون هر دو خودرو در یک جهت حرکت می‌کنند، داریم:

$$v_{نسبی}=|v_A-v_B|=|-۳۰-(-۵)|=۲۵\frac{m}{s}$$

$$|\Delta x_{نسبی}|=v_{نسبی}t=۲۵t\xrightarrow{|\Delta x_{نسبی}|=۴۰۰m\text{ یا }۱۰۰۰m}\begin{cases}۲۵t_1=۴۰۰\Rightarrow t_1=۱۶s\\۲۵t_2=۱۰۰۰\Rightarrow t_2=۴۰s\end{cases}\Rightarrow\frac{t_1}{t_2}=۰/۴$$

امیدوارم حواستون باشه که چون فاصلهٔ دو خودرو از هم در مبدأ زمان برابر ۷۰۰m بود و نیز دو خودرو هم‌جهت حرکت می‌کنند، پس قبل از به‌هم رسیدن با جابه‌جایی ۴۰۰m نسبت به‌هم و بعد از سبقت گرفتن با جابه‌جایی ۱۰۰۰m نسبت به‌هم، فاصلهٔ دو خودرو از یکدیگر برابر با ۳۰۰m می‌شود.

مشاوره

این تست براساس یکی از تمرین‌های کتاب درسی طرح شده و هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور سؤال مهمی محسوب می‌شه. برای همین یک بار به سبک امتحان نهایی و یک بار هم به سبک کاملاً کنکوری براتون حل کردیم تا همه‌جوره خیالتون راحت باشه.

حرکت با سرعت ثابت

حرکتی است که در آن اندازهٔ سرعت (تندی) متحرک و جهت آن در طول مسیر، ثابت است.

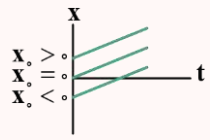
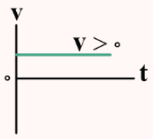
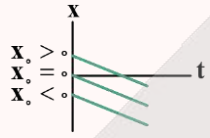
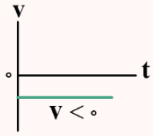
معادلهٔ مکان ـ زمان یک متحرک که با سرعت ثابت حرکت می‌کند، به شکل زیر است:

$x=vt+x_0$; x: مکان نهایی متحرک (m)، v: سرعت متحرک $(\frac{m}{s})$، t: زمان (s)، x_0: مکان اولیهٔ متحرک (m)

در حرکت با سرعت ثابت	
	۱- سرعت لحظه‌ای و سرعت متوسط باهم برابرند: $v_{av}=v$
	۲- شتاب حرکت، صفر است.
	۳- اندازهٔ جابه‌جایی و مسافت باهم برابرند $(|d|=L)$، درنتیجه در این حرکت اندازهٔ سرعت برابر تندی است $(|v|=s)$.

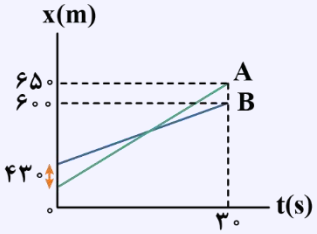
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

به نمودارهای مکان ـ زمان و سرعت ـ زمان در حرکت با سرعت ثابت توجه کنید:

نوع حرکت / معادله	مکان ـ زمان $x = vt + x_0$	سرعت ـ زمان ثابت $v =$
حرکت یکنواخت در جهت محور x		
حرکت یکنواخت در خلاف جهت محور x		

کنکور سراسری خارج از کشور ۱۳۹۴

نمودار مکان ـ زمان دو متحرک A و B به‌صورت شکل زیر است. سرعت متحرک A چند متر بر ثانیه بیش‌تر از سرعت متحرک B است؟



۱) ۱۲

۲) ۱۲/۶

۳) ۱۶

۴) ۱۶/۳

پاسخ تشریحی:

نمودار x-t هر دو متحرک به‌صورت یک تابع خطی است؛ بنابراین معادلهٔ مکان ـ زمان آن‌ها به‌صورت $x = vt + x_0$ است. در لحظهٔ $t = ۳۰s$ متحرک A در مکان $x_A = ۶۵۰m$ و متحرک B در مکان $x_B = ۶۰۰m$ می‌باشد؛ پس:

$$x_A = v_A t + x_{0A} \rightarrow ۶۵۰ = v_A \times ۳۰ + x_{0A} \rightarrow ۶۵۰ = ۳۰v_A + x_{0A} \quad (۱)$$

$$x_B = v_B t + x_{0B} \rightarrow ۶۰۰ = v_B \times ۳۰ + x_{0B} \rightarrow ۶۰۰ = ۳۰v_B + x_{0B} \quad (۲)$$

حال طرفین معادله‌های (۱) و (۲) را از هم کم می‌کنیم:

$$۶۵۰ - ۶۰۰ = (۳۰v_A + x_{0A}) - (۳۰v_B + x_{0B}) \Rightarrow ۵۰ = ۳۰(v_A - v_B) + (x_{0A} - x_{0B}) = ۳۰(v_A - v_B) + (-۴۳۰)$$

$$\Rightarrow ۵۰ = ۳۰(v_A - v_B) - ۴۳۰ \Rightarrow ۵۰ + ۴۳۰ = ۳۰(v_A - v_B) \Rightarrow ۴۸۰ = ۳۰(v_A - v_B) \Rightarrow v_A - v_B = \frac{۴۸۰}{۳۰} = ۱۶\frac{m}{s}$$

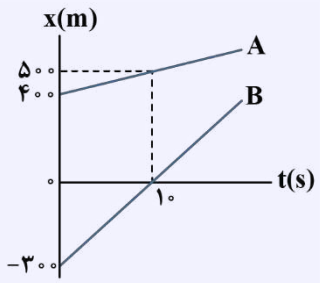
میان‌بُر:

جابه‌جایی نسبی دو متحرک: $\Delta x_{\text{نسبی}} = ۴۳۰ + ۵۰ = ۴۸۰ \Rightarrow v_{\text{نسبی}} = \frac{۴۸۰}{۳۰} = ۱۶\frac{m}{s}$

پاسخ: گزینهٔ ۳

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۰

۵۰- نمودار مکان ـ زمان دو خودرو که روی خط راست حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر، است. در لحظه‌های t_1 و $t_2 > t_1$ فاصلهٔ دو متحرک از هم ۶۰۰m است. $\frac{t_2}{t_1}$



کدام است؟

۱) ۱۵

۲) ۱۳

۳) ۸

۴) ۵

پاسخ تشریحی:

ابتدا در لحظهٔ $t = ۰$، فاصلهٔ دو متحرک ۷۰۰m است و سپس در لحظهٔ $t = ۱۰s$، فاصله به ۵۰۰ m رسیده است؛ بنابراین فاصله با سرعت $۲۰m/s$ کاهش می‌یابد و معادلهٔ فاصلهٔ دو متحرک از هم برابر است با:

فاصله: $d = vt +$ فاصلهٔ اولیه $\rightarrow d = ۲۰t + ۷۰۰$

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

برای آن‌که فاصله برابر $۶۰۰m$ شود، داریم:

$$|d|=۶۰۰m \rightarrow |-۲۰t+۷۰۰|=۶۰۰ \rightarrow \begin{cases} -۲۰t+۷۰۰=۶۰۰ \\ -۲۰t+۷۰۰=-۶۰۰ \end{cases} \rightarrow \begin{cases} t_۱=۵s \\ t_۲=۶۵s \end{cases}$$

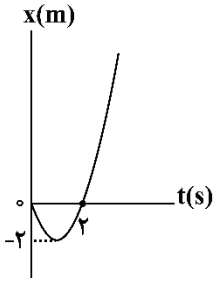
$$\rightarrow \frac{t_۲}{t_۱}=\frac{۶۵}{۵}=۱۳$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

گروه آموزشی ماز

۴۵- نمودار مکان ـ زمان متحرکی که با شتاب ثابت بر روی محور x حرکت می‌کند، مطابق شکل زیر است. سرعت متوسط متحرک در بازهٔ $t_۱=۰$ تا $t_۲=۳s$ چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱
۲) ۲
۳) ۳
۴) ۴



پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

با توجه به نمودار، مکان اولیهٔ متحرک، صفر $(x_۰=۰)$ است و با استفاده از تقارن سهمی، رأس سهمی در لحظهٔ $t=۱s$ قرار دارد.

$$x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t \Rightarrow \begin{cases} t=۱s: -۲=\frac{۱}{۲}a\times ۱^۲+v_۰\times ۱ \\ t=۲s: ۰=\frac{۱}{۲}a\times ۲^۲+v_۰\times ۲ \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} -۲=\frac{۱}{۲}a+v_۰ \\ ۰=۲a+۲v_۰ \end{cases} \xrightarrow{\text{حل دستگاه دو معادله}} a=۴\frac{m}{s^۲},\ v_۰=-۴\frac{m}{s}$$

برای محاسبهٔ سرعت متوسط در بازهٔ $t_۱=۰$ تا $t_۲=۳s$ می‌توان نوشت:

$$\begin{cases} t_۱=۰ \Rightarrow x_۱=۰ \\ t_۲=۳s \Rightarrow x_۲=\frac{۱}{۲}\times ۴\times ۳^۲-۴\times ۳=۶m \end{cases} \Rightarrow v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۶-۰}{۳-۰}=۲\frac{m}{s}$$

حرکت با شتاب ثابت

هرگاه بردار شتاب متحرکی در لحظه‌های مختلف یکسان باشد، حرکت جسم را حرکت با شتاب ثابت می‌نامیم.

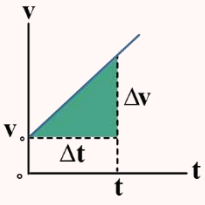
ویژگی‌های حرکت با شتاب ثابت:

۱- سرعت متحرک با زمان به‌صورت خطی تغییر می‌کند پس تغییرات v نسبت به t به‌صورت یک تابع خطی است به همین دلیل سرعت متوسط متحرک در بازهٔ زمانی صفر تا t برابر است با میانگین سرعت متحرک در این دو لحظه، یعنی:

معادلهٔ سرعت متوسط در حرکت با شتاب ثابت:

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t} \xrightarrow{\text{حرکت با شتاب ثابت}} v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲} \Rightarrow v_{av}=v_{(\frac{t_۱+t_۲}{۲})} \xrightarrow{v=at+v_۰} v_{av}=\frac{۱}{۲}a(t_۱+t_۲)+v_۰$$

۲- شیب نمودار سرعت ـ زمان، ثابت است و برابر با شتاب متحرک می‌باشد.



$$\text{شیب نمودار سرعت ـ زمان} = a=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

۳- شتاب متوسط در بازه‌های زمانی مختلف یکسان است.

شتاب متوسط در هر بازهٔ زمانی برابر شتاب لحظه‌ای متحرک است یعنی:

$$a=a_{av}=\frac{\Delta v}{\Delta t}$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۴- معادلهٔ مکان ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادله‌ای که مکان متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0$$

x: مکان متحرک در لحظهٔ t a: شتاب ثابت متحرک

$\vec{v}_0$: سرعت اولیه x_0 : مکان اولیه

در حرکت با شتاب ثابت، مکان متحرک، تابعی درجهٔ دوم از زمان است.

۵- معادلهٔ سرعت ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

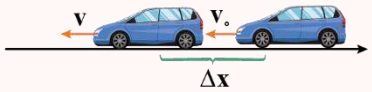
معادله‌ای است که سرعت متحرک را در هر لحظه برای ما مشخص می‌کند:

$$v = at + v_0$$

v: سرعت متحرک در لحظهٔ t a: شتاب ثابت متحرک v_0 : سرعت اولیه

۶- معادلهٔ سرعت ـ جابه‌جایی (مستقل از زمان) در حرکت با شتاب ثابت:

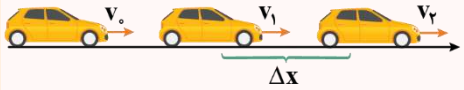
در این معادله زمان وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که زمان را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$v^2 - v_0^2 = 2a(x - x_0)$$

۷- معادلهٔ مستقل از شتاب در حرکت با شتاب ثابت:

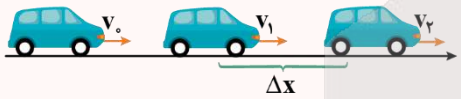
در این معادله شتاب وجود ندارد، پس بهتر است در سؤالاتی که شتاب را نمی‌دهند و نمی‌خواهند از این معادله استفاده کنیم:



$$\Delta x = \frac{v_2 + v_1}{2}\Delta t$$

روش محاسبهٔ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

معادلهٔ جابه‌جایی زمان: (در بازهٔ t_1 تا t_2)



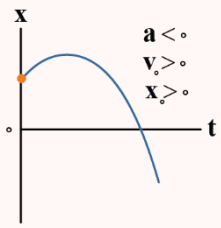
$$\Delta x = \frac{1}{2}a\Delta t^2 + v_1\Delta t$$

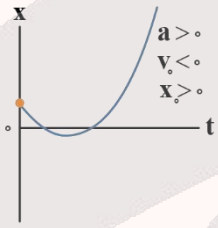
حالت خاص: جابه‌جایی در بازهٔ زمانی $[0, t]$

$$\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$$

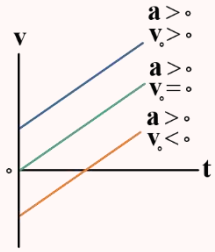
نمودارهای حرکت با شتاب ثابت

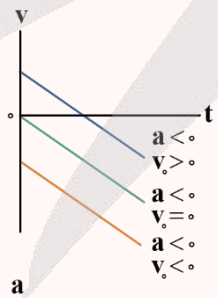
۱- نمودار مکان ـ زمان به شکل یک سهمی است که تقعر آن علامت شتاب را نشان می‌دهد.



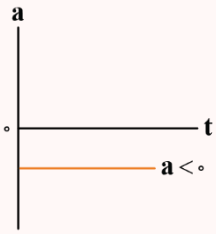


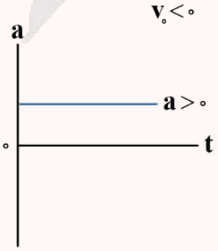
۲- نمودار سرعت ـ زمان به‌صورت یک خط با شیب ثابت است.





۳- نمودار شتاب ـ زمان به‌صورت یک خط افقی است.





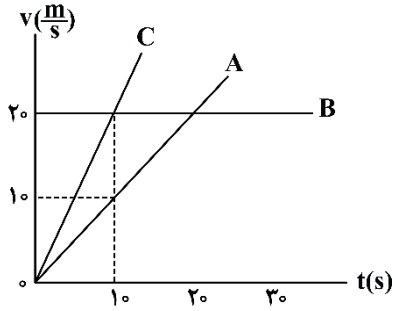
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

نکته

در حرکت با شتاب ثابت اگر برای دو لحظهٔ t_1 و t_2 داشته باشیم $t_{\text{رأس سهمی}} = \frac{t_1 + t_2}{2}$ آن‌گاه $v_{t_1} = -v_{t_2}$ می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۴۶- نمودار سرعت ـ زمان برای سه متحرک A، B و C که بر روی مسیر مستقیم حرکت می‌کنند، مطابق شکل است. کدام گزینه در مورد مقایسهٔ شتاب حرکت این سه متحرک صحیح است؟



۱) $a_C = 2a_A > a_B = 0$

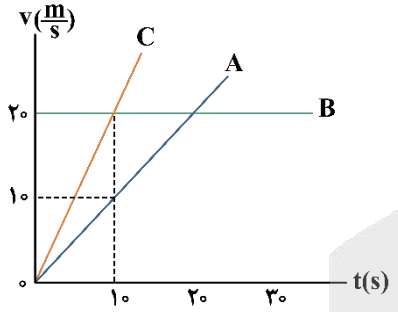
۲) $a_C = \frac{1}{2}a_A > a_B = 0$

۳) $a_B > a_C > a_A$

۴) $a_B = 2a_C = 4a_A$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

شیب نمودار سرعت ـ زمان برابر شتاب متحرک است؛ بنابراین با توجه به نمودار سرعت ـ زمان، شتاب هرکدام از متحرک‌ها برابر است با:



$$\begin{cases} a_A = \frac{10-0}{10-0} = 1\frac{m}{s^2} \\ a_B = 0 \\ a_C = \frac{20-0}{10-0} = 2\frac{m}{s^2} \end{cases} \Rightarrow a_C = 2a_A > a_B = 0$$

دام تستی

در تستی به این سادگی، هستند بچه‌هایی که به‌خاطر عجله و بی‌دقتی در مقایسهٔ نسبت شتاب متحرک C و A به‌اشتباه گزینهٔ (۲) را علامت زدند. برای پرهیز از این نوع سوتی‌ها، حتماً مقادیر به‌دست‌آمده رو در مقایسه‌های مطرح‌شده در گزینه‌ها چک کنین تا به گزینهٔ درست برسین.

جرقهٔ ذهنی

راستی بچه‌ها چون سرعت متحرک B ثابت و درنتیجه شتاب اون صفر هست پس گزینه‌های (۳) و (۴) حذف می‌شن. از طرفی هم چون شیب نمودار C بیش‌تر از شیب نمودار A هست، پس گزینهٔ (۲) هم حذف می‌شه.

گروه آموزشی ماز

۴۷- متحرکی از حال سکون بر روی محور x با شتاب ثابت، شروع به حرکت می‌کند. مسافت طی‌شده در ثانیهٔ سوم حرکت چند برابر مسافت طی‌شده در ۳ ثانیهٔ اول حرکت است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{5}{9}$ ۳) $\frac{5}{7}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

مشاوره

در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی یا در m ثانیه‌های متوالی به‌خاطر نکات و تکنیک‌هایی که در حلش وجود داره همیشه مورد علاقهٔ طراحان است. ما با ۳ روش کاملاً خفن این تست رو براتون ترکوندیم و حسابی سنگ تمام گذاشتیم. پس حتماً یه سر به پاسخ‌نامه بزن و با انواع روش‌های حل آشنا شو.

روش اول:

در حرکت با شتاب ثابت، برای محاسبهٔ جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم و ۳ ثانیهٔ اول حرکت، می‌توان به‌صورت زیر عمل کرد:

جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم:

$$\Delta x_n = \frac{1}{2}a(2n-1) + v_0 \Rightarrow \Delta x_3 = \frac{1}{2}a(2\times 3 - 1) + 0 = \frac{5}{2}a$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ اول:

$$\Delta x = \frac{۱}{۲}at^۲ + v_۰t \Rightarrow \Delta x = \frac{۱}{۲}a \times ۳^۲ + ۰ = \frac{۹}{۲}a$$

$$\Rightarrow \frac{\Delta x_۳}{\Delta x} = \frac{\frac{۵}{۲}a}{\frac{۹}{۲}a} = \frac{۵}{۹}$$

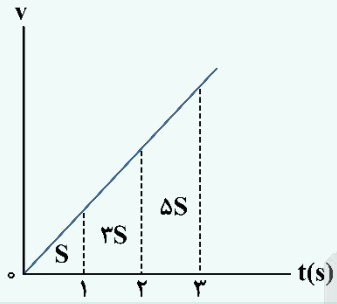
روش دوم:

در حرکت با شتاب ثابت، جابه‌جایی در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک دنبالهٔ حسابی با قدر نسبت شتاب را می‌دهند. اگر متحرک از حال سکون شروع به حرکت کرده باشد، جملات متوالی این دنباله به‌صورت $\underbrace{\frac{۱}{۲}a}_{\text{ثانیهٔ اول}}$ ، $\underbrace{\frac{۳}{۲}a}_{\text{ثانیهٔ دوم}}$ ، $\underbrace{\frac{۵}{۲}a}_{\text{ثانیهٔ سوم}}$ ، $\frac{۷}{۲}a$ و ... خواهد بود؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم}}{\text{جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ اول}} = \frac{\frac{۵}{۲}a}{\frac{۱}{۲}a + \frac{۳}{۲}a + \frac{۵}{۲}a} = \frac{۵}{۹}$$

جرقهٔ ذهنی

چون مساحت سطح بین نمودار سرعت ـ زمان و محور زمان (S) برابر با جابه‌جایی است، پس داریم:



$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم}}{\text{جابه‌جایی در ۳ ثانیهٔ اول}} = \frac{۵S}{S + ۳S + ۵S} = \frac{۵}{۹}$$

محاسبهٔ جابه‌جایی در T ثانیهٔ nام

$$\Delta x_{n,T} = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱)T^۲ + v_۰T$$

جابه‌جایی‌های انجام‌شده توسط متحرک در T ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت $aT^۲$ می‌دهند.

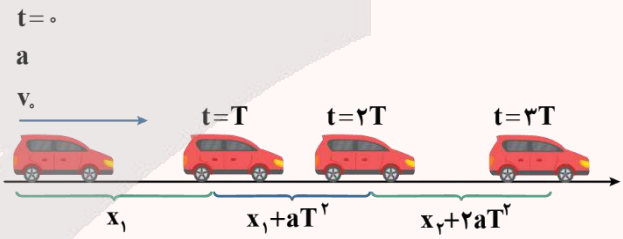
جابه‌جایی در T ثانیهٔ nام $\Delta x_{n,T} = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱)T^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ اول $\Delta x_{T,۱} = ۰/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ دوم $\Delta x_{T,۲} = ۱/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ سوم $\Delta x_{T,۳} = ۲/۵aT^۲ + v_۰T$

جابه‌جایی در T ثانیهٔ چهارم $\Delta x_{T,۴} = ۳/۵aT^۲ + v_۰T$

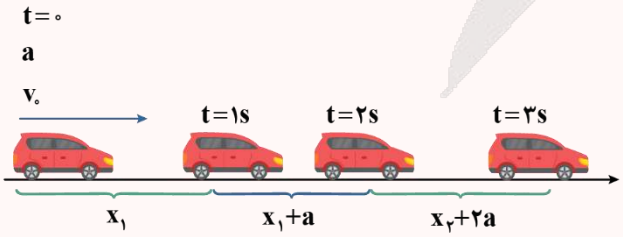


حالت خاص: جابه‌جایی در ثانیهٔ nام:

$$\Delta x_n = \frac{۱}{۲}a(۲n-۱) + v_۰$$

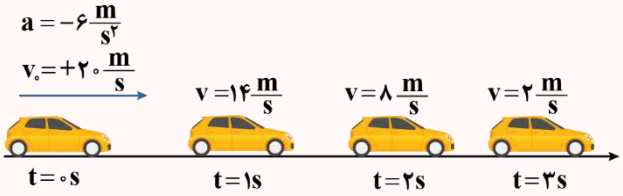
جابه‌جایی‌های انجام‌شده در ثانیه‌های متوالی، تشکیل یک تصاعد حسابی با قدر نسبت a می‌دهند.

۱- در هر ثانیه جابه‌جایی یک a تغییر می‌کند.



www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۲- در هر ثانیه سرعت یک a تغییر می‌کند.



کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۴۷- متحرکی در لحظهٔ $t=0s$ با شتاب ثابت از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. جابه‌جایی این متحرک در n ثانیهٔ سوم، چند برابر جابه‌جایی در n ثانیهٔ دوم است؟

۱) $\frac{5}{3}$ ۲) $\frac{9}{4}$ ۳) $\frac{3}{2}$ ۴) $2n$

پاسخ تشریحی:

روش اول: کافی است n را برابر یک قرار داده و مشخص کنیم جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم چند برابر جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم است. با توجه به این‌که سرعت اولیه صفر است، تصاعد را برای جابه‌جایی‌های متوالی یک ثانیه‌ای می‌نویسیم:

$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم}}{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم}} = \frac{2/5|a|}{1/5|a|} = \frac{5}{3}$$

روش دوم:

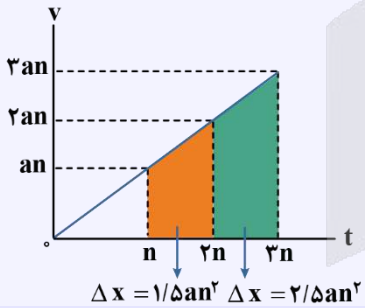
با استفاده از فرمول جابه‌جایی در Δt ثانیهٔ nام، جابه‌جایی را در n ثانیهٔ سوم و n ثانیهٔ دوم به‌دست می‌آوریم:

$$\text{ثانیهٔ سوم } n: \Delta x = (3-0/5)an^2 + 0 \times n$$

$$\text{ثانیهٔ دوم } n: \Delta x = (2-0/5)an^2 + 0 \times n$$

$$\frac{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ سوم n}}{\text{جابه‌جایی در ثانیهٔ دوم n}} = \frac{2/5an^2}{1/5an^2} = \frac{5}{3}$$

می‌توان با نمودار سرعت ـ زمان هم به‌راحتی به جواب رسید:



پاسخ: گزینهٔ ۱

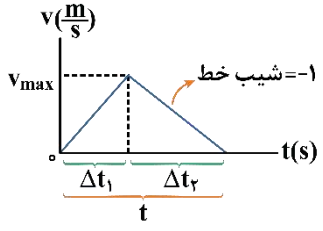
گروه آموزشی ماز

۴۸- متحرکی از حال سکون بر روی محور x و در جهت محور x با شتاب ثابت، شروع به حرکت می‌کند و پس از مدت‌زمان Δt_1 سرعت خود را با شتاب ثابتی به بزرگی $1\frac{m}{s^2}$ کاهش می‌دهد تا در مدت‌زمان Δt_2 متوقف شود. اگر مسافت طی‌شده توسط متحرک در کل ۳۰۰m و تندی متوسط در بازهٔ زمانی Δt_1 برابر $10\frac{m}{s}$ باشد، شتاب متوسط در ۶ ثانیهٔ دوم حرکت چند متر بر مربع ثانیه است؟

۱) ۰/۵ ۲) ۱ ۳) ۱/۵ ۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (سخت ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

نمودار سرعت ـ زمان حرکت متحرک مطابق شکل است:



سرعت متوسط برابر میانگین سرعت‌ها در بازهٔ زمانی Δt_1 است:

$$v_{av} = \frac{v_{max} + v_0}{2} \Rightarrow 10 = \frac{v_{max} + 0}{2} \Rightarrow v_{max} = 20\frac{m}{s}$$

مسافت طی‌شده در کل بازهٔ زمانی ۳۰۰m است:

$$\frac{v_{max} \times t}{2} = 300 \Rightarrow 20 \times t = 600 \Rightarrow t = 30s$$

زمان Δt_2 برابر است با:

$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} \Rightarrow -1 = \frac{-20}{\Delta t_2} \Rightarrow \Delta t_2 = 20s$$

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

درنتیجه Δt_1 برابر است با:

$$\Delta t_1 = ۳۰ - ۲۰ = ۱۰s$$

حال باید سرعت متحرک در لحظات $t_1 = ۶s$ و $t_2 = ۱۲s$ را به‌دست بیاوریم:

$$v = at + v_0 \xrightarrow{a=\frac{\Delta v}{\Delta t}=\frac{۲۰}{۱۰}=۲\frac{m}{s^2}} v_{۶s} = ۲\times۶ + ۰ \Rightarrow v_{۶s} = ۱۲\frac{m}{s}$$

$$v = a't + v'_0 \Rightarrow v_{۱۲s} = -۱\times۲ + ۲۰ \Rightarrow v_{۱۲s} = ۱۸\frac{m}{s}$$

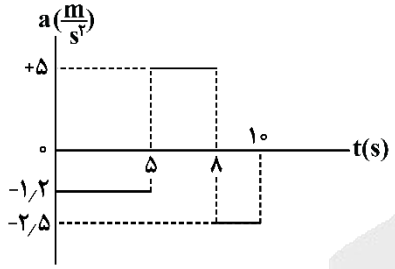
$$a_{av} = \frac{\Delta v}{\Delta t} = \frac{v_{۱۲s} - v_{۶s}}{۱۲-۶} = \frac{۱۸-۱۲}{۶} = \frac{۶}{۶} = ۱\frac{m}{s^2}$$

مشاوره

تحلیل حرکت‌های چندمرحله‌ای از بخش‌های مهم و تستخیز این فصل هست. خیلی از بچه‌ها در این تیپ تست‌ها دچار مشکل تحلیل هستند و عمدهٔ علت آن هم عدم رعایت اصولی مراحل حل است. پس به‌دقت پاسخ‌نامه رو بررسی کنین و ترتیب مراحل حل این تست رو خوب یاد بگیرین.

گروه آموزشی ماز

۴۹- مطابق شکل زیر، نمودار شتاب ـ زمان متحرکی رسم شده که در مبدأ زمان در مکان $x = ۸m$ بوده و دارای سرعت $(-۴\frac{m}{s})\vec{i}$ است. در ۱۰ ثانیهٔ اول حرکت، بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از محل شروع حرکت، چند متر است؟



۱) ۳۷
۲) ۲۹/۵
۳) ۴۵
۴) ۲۹

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ نموداری ـ ۱۴۰۱)

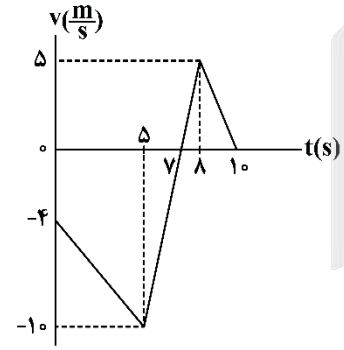
ابتدا سرعت متحرک را در لحظات $t = ۵s$ ، $t = ۸s$ و $t = ۱۰s$ به‌دست می‌آوریم:

$$۰ \le t < ۵ : v_{۵s} = a_1\Delta t_1 + v_0 \Rightarrow v_{۵s} = (-۱/۲\times۵) - ۴ \Rightarrow v_{۵s} = -۱۰\frac{m}{s}$$

$$۵ \le t < ۸ : v_{۸s} = a_2\Delta t_2 + v_{۵s} \Rightarrow v_{۸s} = (۵\times۳) - ۱۰ \Rightarrow v_{۸s} = +۵\frac{m}{s}$$

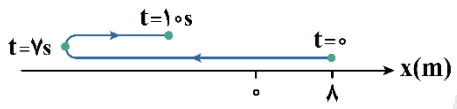
$$۸ \le t < ۱۰ : v_{۱۰s} = a_3\Delta t_3 + v_{۸s} \Rightarrow v_{۱۰s} = (-۲/۵\times۲) + ۵ \Rightarrow v_{۱۰s} = ۰$$

درنتیجه نمودار سرعت ـ زمان برای این متحرک به‌صورت مقابل است:



با توجه به نمودار، متحرک در بازهٔ صفر تا ۷s در حال حرکت در خلاف جهت محور x و دور شدن از مبدأ حرکتش است. از ۷s تا ۱۰s مجدداً به مبدأ نزدیک‌تر می‌شود.

پس کافیست مساحت سطح بین نمودار و محور t را تا لحظهٔ ۷s محاسبه کنیم:



$$\Delta x_{۰-۷s} = \Delta x_{۰-۵s} + \Delta x_{۵s-۷s} = -\left(\frac{(۴+۱۰)(۵)}{۲}\right) - \left(\frac{۲\times۱۰}{۲}\right) = -۴۵m \Rightarrow |\Delta x| = ۴۵m$$

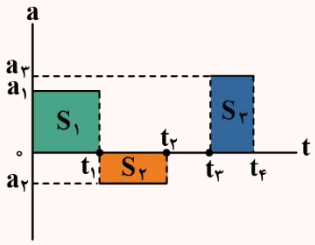
دام تستی

اگر بیش‌ترین فاصلهٔ متحرک از مبدأ مکان را حساب کرده باشید در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید.

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

نمودار شتاب ـ زمان

در حرکت با شتاب ثابت، نمودار شتاب ـ زمان، خطی موازی محور زمان می‌باشد. اگر شتاب ثابت حرکت در هر بازهٔ زمانی با بازهٔ دیگر در طول حرکت متفاوت باشد، نمودار به شکل زیر، پله‌ای خواهد بود و مساحت زیر نمودار در هر بخش، با تغییرات سرعت در آن بازهٔ زمانی برابر است:



$$\Delta v = +S_1 - S_2 + S_3$$

در بازهٔ t_2 تا t_3 شتاب صفر است.

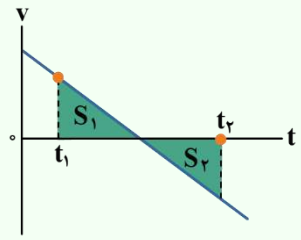
نکته

هنگامی‌که معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت به‌صورت درجهٔ ۲ است، حرکت با شتاب ثابت انجام می‌شود و به‌راحتی می‌توانیم معادلهٔ سرعت ـ زمان حرکت را بنویسیم.

$x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t + x_0 \rightarrow$ از معادلهٔ مکان ـ زمان به‌دست می‌آیند. a و t

با جایگذاری a و t، معادلهٔ سرعت ـ زمان به‌دست می‌آید. $v = at + v_0 \rightarrow$

با داشتن معادلهٔ سرعت ـ زمان و رسم آن، به‌راحتی می‌توان مسافت، جابه‌جایی، تندی متوسط و سرعت متوسط را با کمک مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان به‌دست آورد.



جابه‌جایی در بازهٔ t_1 تا t_2: $\Delta x = |S_1| - |S_2|$

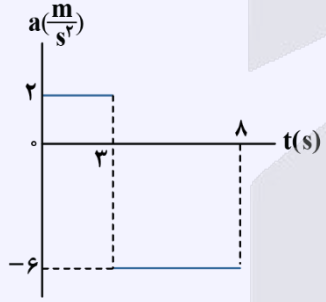
سرعت متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2: $v_{av} = \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{|S_1| - |S_2|}{t_2 - t_1}$

مسافت در بازهٔ t_1 تا t_2: $\ell = |S_1| + |S_2|$

تندی متوسط در بازهٔ t_1 تا t_2: $s_{av} = \frac{\ell}{\Delta t} = \frac{|S_1| + |S_2|}{t_2 - t_1}$

کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۴۶- شکل زیر، نمودار شتاب ـ زمان متحرکی است که در لحظهٔ $t = 0s$ با سرعت $\vec{v} = +(8\frac{m}{s})\vec{i}$ حرکت کرده است. تندی متوسط متحرک در این ۸ ثانیه چند متر بر ثانیه است؟



۱) ۱۲

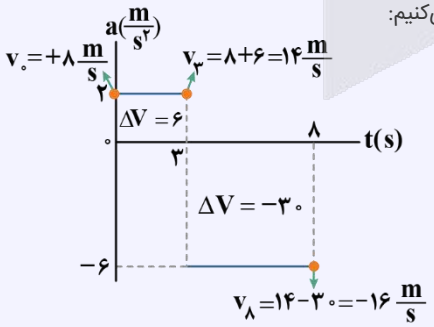
۲) ۱۵

۳) $\frac{۴۳}{۴}$

۴) $\frac{۵۳}{۶}$

پاسخ تشریحی:

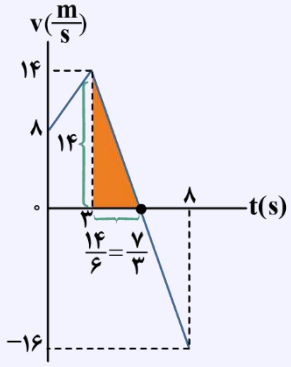
با توجه به این‌که مساحت زیر نمودار شتاب ـ زمان برابر Δv است، سرعت متحرک را در لحظات مرزی محاسبه می‌کنیم:



www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

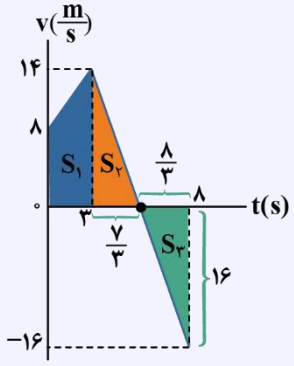
WWW.ArefOnline.ir

حال نمودار سرعت ـ زمان را رسم می‌کنیم:



با توجه به این‌که شیب قسمت دوم نمودار $a=-۶\frac{m}{s^۲}$ است، پس باید در مثلث رنگی، ضلع افقی $\frac{۱}{۶}$ ضلع قائم باشد.

حال مساحت زیر نمودار را به‌دست می‌آوریم:



$$S_۱=\frac{۸+۱۴}{۲}\times ۳=۳۳\,m$$

$$S_۲=\frac{۱}{۲}\times ۱۴\times\frac{۷}{۳}=\frac{۴۹}{۳}m$$

$$S_۳=\frac{۱}{۲}\times\frac{۸}{۳}\times ۱۶=\frac{۶۴}{۳}m$$

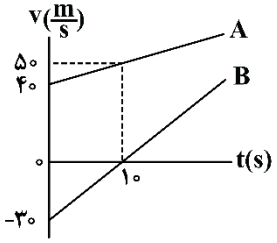
مسافت طی‌شده: $\ell=۳۳+\frac{۴۹}{۳}+\frac{۶۴}{۳}=\frac{۲۱۲}{۳}m$

تندی متوسط: $s_{av}=\frac{\ell}{\Delta t}=\frac{\frac{۲۱۲}{۳}}{۸}=\frac{۵۳}{۶}\frac{m}{s}$

پاسخ: گزینهٔ ۴

گروه آموزشی ماز

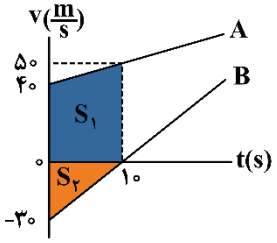
۵۰- نمودار سرعت ـ زمان دو متحرک A و B که از یک مکان بر روی محور x شروع به حرکت می‌کنند، مطابق شکل زیر است. در لحظهٔ $t=۱۰s$، فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر چند متر است؟



۱) ۱۵۰
۲) ۳۰۰
۳) ۴۵۰
۴) ۶۰۰

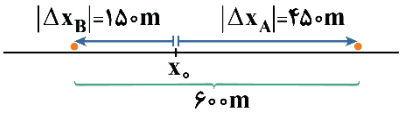
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۲۰۱)

جابه‌جایی هر یک از دو متحرک را از لحظهٔ صفر تا لحظهٔ ۱۰s به کمک مساحت زیر نمودار سرعت ـ زمان به‌دست می‌آوریم:



$$\Delta x_A=S_۱=\frac{۴۰+۵۰}{۲}\times ۱۰=۴۵۰\Rightarrow \Delta x_A=۴۵۰m$$

$$|\Delta x_B|=S_۲=\frac{۳۰\times ۱۰}{۲}=۱۵۰\Rightarrow \Delta x_B=-۱۵۰m$$



چون دو متحرک از یک مکان شروع به حرکت کرده‌اند، در لحظهٔ $t=۱۰s$، فاصلهٔ دو متحرک از یکدیگر برابر $۴۵۰+۱۵۰=۶۰۰m$ است.

مشاوره

در مسائل دو متحرکه، حتماً به علامت سرعت‌ها دقت کنین تا جهت حرکت متحرک رو خوب تشخیص بدین و برمبنای اون و البته مکان اولیهٔ متحرک‌ها، تحلیل درستی از نحوهٔ تغییر فاصلهٔ دو متحرک داشته باشین.

دام طراح

اگر به جهت حرکت دو متحرک تا لحظهٔ ۱۰s دقت نکنید، در دام گزینهٔ (۲) گرفتار می‌شوید.

گروه آموزشی ماز

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

۵۱- خودرویی پشت چراغ‌قرمز ایستاده است. با سبز شدن چراغ، خودرو با شتاب ثابت $۲\frac{m}{s^۲}$ از حال سکون، شروع به حرکت می‌کند. در همین لحظه، کامیونی با سرعت ثابت $۳۶\frac{km}{h}$ از آن سبقت می‌گیرد. پس از گذشت چند ثانیه، خودرو به کامیون می‌رسد؟

۱) ۵ ۲) ۱۰ ۳) ۱۸ ۴) ۳۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

معادلهٔ مکان ـ زمان دو متحرک را نوشته و سپس لحظهٔ رسیدن دو متحرک به یکدیگر را به‌دست می‌آوریم: (مکان اولیهٔ دو متحرک را مبدأ $x=۰$ درنظر می‌گیریم.)

$$\begin{cases} \text{خودرو: } x=\frac{۱}{۲}at^۲+v_۰t+x_۰ \Rightarrow x_۱=\frac{۱}{۲}\times ۲t^۲+۰+۰ \Rightarrow x_۱=t^۲ \\ \text{کامیون: } x=vt+x_۰ \Rightarrow x_۲=۱۰t+۰ \Rightarrow x_۲=۱۰t \end{cases}$$

لحظهٔ به‌هم رسیدن دو متحرک: $x_۱=x_۲ \Rightarrow t^۲=۱۰t \Rightarrow t^۲-۱۰t=۰ \Rightarrow t(t-۱۰)=۰ \Rightarrow \begin{cases} t=۰ \\ t=۱۰s \ \checkmark \end{cases}$

راستی بچه‌ها در مسائل دو متحرکه که دو متحرک در مبدأ زمان در یک مکان هستند، می‌تونیم مکان اولیهٔ اون‌ها رو صفر بگیریم. البته به شرطی که در صورت سؤال جای خاصی رو مبدأ مکان نگفته باشه!

مشاوره

این سؤال خیلی در چهارچوب امتحان نهایی‌تون هست. پس با دقت روند حل این سؤال رو خوب یاد بگیر. البته برای کنکور هم می‌تونه مطرح بشه!

نکته

اگر دو متحرک به‌طور هم‌زمان از یک نقطه با شتاب ثابت شروع به حرکت کنند (یا یکی با سرعت ثابت و دیگری با شتاب ثابت)، آن‌گاه در لحظه‌ای که سرعت دو متحرک یکسان می‌شود، در دو برابر آن لحظه نیز، مکان دو متحرک یکسان می‌شود.

جرقهٔ ذهنی

$$\begin{cases} v_{\text{خودرو}}=۲t \\ v_{\text{کامیون}}=۱۰\frac{m}{s} \end{cases} \Rightarrow ۲t=۱۰s \Rightarrow t=۵s \xrightarrow{\text{۲ برابر این لحظه}} ۲t=۱۰s$$

گروه آموزشی ماز

۵۲- سنگی از صخره‌ای به ارتفاع $۳۱/۲۵m$ نسبت به سطح زمین، در شرایط خلأ رها می‌شود. سرعت متوسط سنگ از لحظهٔ رها شدن تا لحظهٔ رسیدن به سطح زمین چند متر بر ثانیه است؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۷/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۵ ۴) ۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

روش اول:

گام اول:

سرعت سنگ در لحظهٔ رسیدن به سطح زمین برابر است با:

$$v_۲^۲-v_۱^۲=۲g\Delta y \Rightarrow v_۲^۲-۰^۲=۲\times ۱۰\times ۳۱/۲۵=۶۲۵ \Rightarrow v_۲=۲۵\frac{m}{s}$$

گام آخر:

بنابراین سرعت متوسط سنگ در کل مدت‌زمان حرکتش برابر است با:

$$v_{av}=\frac{v_۱+v_۲}{۲}=\frac{۰+۲۵}{۲}=۱۲/۵\frac{m}{s}$$

روش دوم:

$$\Delta y=\frac{۱}{۲}gt^۲ \Rightarrow ۳۱/۲۵=\frac{۱}{۲}\times ۱۰t^۲ \Rightarrow t=۲/۵s$$

$$v_{av}=\frac{\Delta y}{t}=\frac{۳۱/۲۵}{۲/۵}=۱۲/۵\frac{m}{s}$$

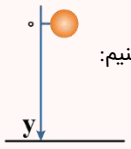
www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

سقوط آزاد

به حرکت جسمی که فقط تحت تأثیر جاذبهٔ گرانشی در نزدیکی سطح زمین سقوط می‌کند درصورتی‌که از مقاومت هوا صرف‌نظر شود، سقوط آزاد گویند.

برای راحتی کار در حل سؤالات سقوط آزاد، نقطهٔ رها شدن جسم را مبدأ مختصات درنظر می‌گیریم و جهت مثبت محور y را به سمت پایین انتخاب می‌کنیم:



در این صورت علامت شتاب و مکان و سرعت در هر لحظه مثبت خواهد شد.

معادله‌های سقوط آزاد درصورت رها شدن جسم بدون سرعت اولیه

۱- معادلهٔ مکان ـ زمان:

$$y=\frac{1}{2}gt^2+v_0t+y_0 \xrightarrow[v_0=0]{y_0=0} y=\frac{1}{2}gt^2$$

۲- معادلهٔ سرعت ـ زمان:

$$v=gt+v_0 \xrightarrow{v_0=0} v=gt$$

۳- معادلهٔ مستقل از زمان:

$$v_2^2-v_1^2=2g\Delta y$$

۴- معادلهٔ سرعت متوسط:

$$v_{av}=\frac{1}{2}gt$$

کنکور سراسری ریاضی ۱۳۹۶

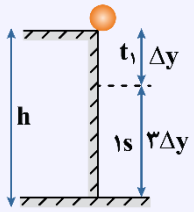
گلوله‌ای در شرایط خلأ بدون سرعت اولیه از ارتفاع h رها می‌شود. اگر این گلوله مسافتی را که در ثانیهٔ آخر حرکت طی کرده، ۳ برابر مسافتی باشد که تا قبل از آن طی کرده است، h چند متر است؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۲۰ ۲) ۲۵ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ تشریحی:

روش اول:

با توجه به شکل مقابل داریم:



$$\begin{cases}\Delta y_1=\frac{-1}{2}gt_1^2\\ \Delta y_{کل}=\Delta y_1+3\Delta y_1=\frac{-1}{2}gt_{کل}^2\end{cases}$$

$$\xrightarrow{v_0=0\ ,\ t_{کل}=t_1+1}\begin{cases}\Delta y_1=\frac{-1}{2}gt_1^2\\ \Delta y_{کل}=\frac{-1}{2}g(t_1+1)^2\end{cases}\xrightarrow[\Delta y_{کل}-\Delta y_1=3\Delta y_1]{\text{تفاضل}}-5(t_1^2+2t_1+1)-(-5t_1^2)=3(-5t_1^2)$$

$$\Rightarrow 15t_1^2-10t_1-5=0\Rightarrow\begin{cases}t_1=1s & \text{ق ق}\\ t_1=-\frac{1}{3} & \text{غ ق ق}\end{cases}$$

پس زمان کل حرکت: $t_{کل}=1+t_1=1+1=2s$ است و بنابراین:

$$h=|\Delta y_{کل}|=|-5t^2|=20m$$

روش دوم:

دنبالهٔ عددی جابه‌جایی (در هر ثانیه) در حرکت سقوط آزاد، با شتاب $g=10\frac{m}{s^2}$ برابر است با:

$$5,15,25,35,...$$

با توجه به دنبالهٔ بالا، جملهٔ دوم سه برابر جملهٔ اول است، بنابراین ارتفاع h برابر است با:

$$h=5+15=20m$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

WWW.ArefOnline.ir

۵۳- دو گلوله از ارتفاع یکسان از سطح زمین و در شرایط خلأ، با اختلاف زمانی چند ثانیه رها شوند تا در لحظهٔ رسیدن گلولهٔ اول به زمین، جابه‌جایی آن ۹ برابر گلولهٔ دوم باشد و حداکثر فاصلهٔ دو گلوله در حین حرکت به ۱۶۰ متر برسد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$

۱) ۲ ۲) ۳ ۳) ۴ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۱)

فرض می‌کنیم از لحظهٔ رها شدن گلولهٔ اول تا رسیدن آن به سطح زمین t_1 ثانیه و از لحظهٔ رها شدن گلولهٔ دوم تا رسیدن گلولهٔ اول به سطح زمین t_2 ثانیه طول بکشد.

$$\frac{h_2}{h_1}=\frac{-\frac{1}{2}gt_2^2}{-\frac{1}{2}gt_1^2}=\frac{1}{9}\Rightarrow\frac{t_2}{t_1}=\frac{1}{3}\Rightarrow t_1=3t_2$$

از طرفی هم می‌دانیم حداکثر فاصلهٔ دو گلوله زمانی رخ می‌دهد که گلولهٔ اول به سطح زمین برسد.

$$\Delta h_{max}=h_1-h_2=5t_1^2-5t_2^2=160\Rightarrow t_1^2-t_2^2=32\xrightarrow{t_1=3t_2}8t_2^2=32$$

$$\Rightarrow t_2=2s\ ,\ t_1=3t_2=6s$$

بنابراین اختلاف زمانی رها شدن دو گلوله:

$$t_1-t_2=4s$$

مشاوره

سقوط آزاد دو متحرکه همواره موردتوجه طراحان است. ما اینجا سقوط آزاد رو با فرض تأخیر یکی از گلوله‌ها ترکیب و یک تست خیلی مهم رو براتون طرح کردیم که نه‌تنها با پاسخ کاملاً تشریحی حلش کردیم بلکه یک روش خیلی خفن هم براتون نوشتیم که حتماً یه سر بهش بزنین.

جرقهٔ ذهنی

به کمک جابه‌جایی ثانیه‌های متوالی داریم:

$$5m,15m,25m,\underbrace{35m,45m,55m}_{135m}$$

پس گلولهٔ اول در لحظهٔ $t=6s$ به زمین رسیده و گلولهٔ دوم نیز تا این لحظه $3s$ جابه‌جا شده که می‌توان نتیجه گرفت اختلاف زمانی رها شدن دو گلوله $6-3=3s$ است.

گروه آموزشی ماز

۵۴- چه تعداد از موارد زیر درست است؟

الف: نیروی وزن سیبی که به یک شاخهٔ درخت آویزان است بر شاخهٔ درخت و واکنش آن بر روی زمین وارد می‌شود.

ب: واکنش نیروی شناوری وارد بر یک کشتی شناور بر سطح آب که درحال تعادل قرار دارد، هم‌اندازه و هم‌جهت با نیروی وزن کشتی است.

پ: واکنش نیرویی که یک قایقران با پارو به آب وارد می‌کند، بر پارو وارد می‌شود.

ت: نیروی اصطکاک وارد بر شخصی که درحال راه رفتن بر روی یک سطح افقی است، در جهت حرکت شخص بوده و واکنش آن بر سطح افقی وارد می‌شود.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

نکته

قانون سوم نیوتون:

هرگاه جسمی به جسم دیگر نیرو وارد کند، جسم دوم نیز به جسم اول نیرویی هم‌اندازه، هم‌راستا اما در خلاف جهت به آن وارد می‌کند:

$$\vec{F}_{12}=-\vec{F}_{21}\Rightarrow F_{12}=F_{21}$$

بررسی موارد:

الف) نیروی وزن سیب، از طرف مرکز زمین بر سیب و واکنش آن از طرف سیب بر مرکز زمین وارد می‌شود. (✗)

ب) نیروی شناوری از طرف آب بر کشتی و واکنش آن از طرف کشتی بر آب وارد می‌شود. ازآنجاکه نیروی شناوری همواره بالاسو است، بنابراین، واکنش آن به سمت پایین (هم‌جهت با نیروی وزن کشتی) است. از طرفی، به‌دلیل تعادل کشتی در راستای قائم، نیروی شناوری و درنتیجه واکنش آن، با نیروی وزن، هم‌اندازه است. (✓)

پ) نیروی قایقران از طرف پارو به آب و واکنش آن از طرف آب بر پارو وارد می‌شود. (✓)

ت) هنگام راه رفتن، شخص بر سطح به سمت عقب، نیرو وارد می‌کند (کنش) و سطح بر شخص به سمت جلو (در جهت حرکت شخص) نیرو وارد می‌کند (واکنش). (✓)

www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۵۵- دو گوی هم‌اندازه با جرم‌های m و ۲m را از بالای برجی به ارتفاع h به‌طور هم‌زمان رها می‌کنیم. با فرض این‌که نیروی مقاومت هوا در طی حرکت دو گوی، یکسان و بزرگی آن برابر ۰/۸mg باشد، تندی برخورد گوی سنگین‌تر با زمین چند برابر تندی برخورد گوی سبک‌تر با زمین است؟

۱) ۱ ۲) $\frac{\sqrt{۳}}{۳}$ ۳) $\sqrt{۳}$ ۴) ۳

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته

۱- قانون دوم نیوتون:

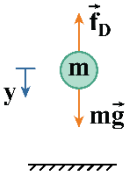
$$F_{net} = ma$$

۲- رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی در حرکت با شتاب ثابت:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta y$$

نیروی مقاومت هوا را با f_D نشان می‌دهیم و برای بررسی ساده‌تر حرکت گوی‌ها، جهت مثبت محور y را به‌طرف پایین انتخاب می‌کنیم:

$$F_{net} = ma \Rightarrow mg - f_D = ma \Rightarrow a = g - \frac{f_D}{m}$$



$$\begin{cases} m_۱ = m \Rightarrow a_۱ = g - \frac{۰/۸mg}{m} = ۰/۲g \\ m_۲ = ۲m \Rightarrow a_۲ = g - \frac{۰/۸mg}{۲m} = ۰/۶g \end{cases}$$

طبق رابطهٔ سرعت ـ جابه‌جایی داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta y \Rightarrow v^۲ - ۰ = ۲ah \Rightarrow v = \sqrt{۲ah}$$

$$\Rightarrow \frac{v_۲}{v_۱} = \sqrt{\frac{a_۲}{a_۱}} = \sqrt{\frac{۰/۶g}{۰/۲g}} = \sqrt{۳}$$

مشاوره

تأثیر جرم گلوله بر اندازهٔ شتاب حرکت آن در حضور مقاومت هوا یکی از بحث‌های خیلی مهم کتاب درسی هست که اتفاقاً هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور موردتوجه طراحان محترم هست. با حل این تست و بررسی روند حل اون در پاسخ‌نامه، یک بار برای همیشه خیالت رو از این تیپ مسائل راحت کن.

گروه آموزشی ماز

۵۶- فنری به جرم ناچیز از سقف آسانسوری آویزان است. وزنه‌ای را از فنر آویزان می‌کنیم و بعد از تعادل مجموعهٔ جرم ـ فنر، طول فنر به ۳۲cm می‌رسد. ناگهان آسانسور با شتاب رو به بالای $۲\frac{m}{s^۲}$ شروع به حرکت می‌کند و طول فنر به ۳۴cm می‌رسد. طول فنر قبل از آویختن وزنه چند سانتی‌متر بوده است؟ $(g = ۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۲۰ ۲) ۲۲ ۳) ۲۴ ۴) ۲۶

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته

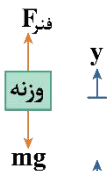
نیروی کشش فنر:

$$F = kx = k(L - L_۰)$$

x: تغییر طول فنر $L_۰$: طول اولیهٔ فنر L: طول نهایی فنر k: ثابت فنر

گام اول:

قبل از حرکت آسانسور، وزنه ساکن است و نیروهای وارد بر وزنه متوازن هستند؛ بنابراین داریم:



$$F_{فنر} = mg \Rightarrow k(L_۱ - L_۰) = mg = ۱۰m \quad (۱)$$

گام دوم:

با حرکت آسانسور، طبق قانون دوم نیوتون داریم:

$$F_{فنر} - mg = ma \Rightarrow F_{فنر} = m(a+g) \Rightarrow k(L_۲ - L_۰) = m(a+g) = ۱۲m \quad (۲)$$

www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

گام آخر:

با جایگذاری مقادیر و تقسیم رابطهٔ (۱) بر (۲) داریم:

$$\frac{۳۲-L_۰}{۳۴-L_۰}=\frac{۱۰\cancel{m}}{۱۲\cancel{m}}=\frac{۵}{۶}\Rightarrow ۱۷۰-۵L_۰=۱۹۲-۶L_۰\Rightarrow L_۰=۲۲cm$$

جرقهٔ ذهنی

در حالت اول که $k(L_۱-L_۰)=mg$ است؛ اما در حالت دوم، صدقه‌سر شتاب آسانسور، طول فنر به‌اندازهٔ ۲cm بیش‌تر از حالت اول شده که داریم:

$$\Delta F_e=k(L_۲-L_۱)=ma\Rightarrow k(۳۴-۳۲)=m(۲)\Rightarrow k=m$$

$$\xrightarrow{\text{برای حالت اول}} m(۳۲-L_۰)=m(۱۰)\Rightarrow L_۰=۲۲cm$$

مشاوره

این تست از دل کتاب درسی طراحی شده و ایدهٔ طراحی این تست به‌شدت موردتوجه کنکورهای اخیر بوده. پس حتماً سعی کنین اولاً حواستون به کتاب درسی باشه و دوماً تأثیر حرکت آسانسور بر تغییر طول فنر رو به کمک این تست حسابی یاد بگیرین.

تعبیر

طول فنر قبل از آویختن وزنه، همان طول عادی فنر است.

اگر؟

اگر آسانسور رو به پایین شروع به حرکت می‌کرد، اون وقت طول فنر کم‌تر از ۳۲cm می‌شد. چرا؟

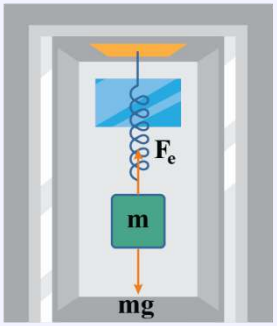
کنکور سراسری تجربی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۵۰- فنری به جرم ناچیز به طول ۳۰cm و ثابت $۴۰۰\frac{N}{m}$ از سقف آسانسوری آویزان است. اگر وزنهٔ ۲kg را از فنر آویزان کنیم و آسانسور با شتاب رو به پایین $۲\frac{m}{s^۲}$ حرکت کند، طول فنر به چند سانتی‌متر می‌رسد؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$

۱) ۲۶ ۲) ۲۸ ۳) ۳۲ ۴) ۳۴

پاسخ تشریحی:

با توجه به این‌که شتاب آسانسور روبه پایین است، می‌توان نوشت:



$$F_e=m(g-a)=۲(۱۰-۲)=۱۶N$$

$$F_e=k\Delta x\Rightarrow ۱۶=۴۰۰\Delta x\Rightarrow \Delta x=۰/۰۴m=۴cm$$

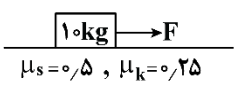
پس طول فنر 4cm افزایش یافته است.

$$x_۲=۳۰+۴=۳۴cm$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

گروه آموزشی ماز

۵۷- مطابق شکل، به جسمی به جرم ۱۰kg که بر روی سطح افقی قرار دارد، نیروی افقی F وارد شده و جسم در آستانهٔ حرکت است. بزرگی نیروی F را چند درصد افزایش دهیم تا نیروی خالص وارد بر جسم برابر ۳۰N شود؟ $(g=۱۰\frac{m}{s^۲})$



۱) ۵ ۲) ۱۰

۳) ۲۰ ۴) ۳۰

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته

۱- وقتی یک جسم که در تماس با یک سطح است، در آستانهٔ حرکت باشد، نیروی اصطکاک ایستایی در حالت بیشینه $(f_{s,max})$ قرار دارد.

۲- بزرگی نیروی اصطکاک ایستایی بیشینه $(f_{s,max})$ و بزرگی نیروی اصطکاک جنبشی برابر است با:

$$f_{s,max}=\mu_s F_N \qquad f_k=\mu_k F_N$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

حالت اول:

جسم در آستانهٔ حرکت است. $\Rightarrow F = f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg$

$\Rightarrow F = ۰/۵ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۵۰N$

حالت دوم:

با افزایش نیروی F، جسم حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک جنبشی به جسم وارد می‌شود و داریم:

$F_{net} = ۳۰N \Rightarrow F' - f_k = ۳۰$

$\Rightarrow F' - \mu_k F_N = ۳۰ \Rightarrow F' - \mu_k mg = ۳۰ \Rightarrow F' - ۰/۲۵ \times ۱۰ \times ۱۰ = ۳۰ \Rightarrow F' = ۵۵N$

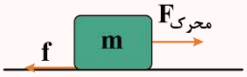
$\Rightarrow$ درصد تغییر بزرگی نیروی $F = \left(\frac{F' - F}{F}\right)۱۰۰ = \left(\frac{۵۵ - ۵۰}{۵۰}\right) \times ۱۰۰ = ۱۰\%$

بنابراین، بزرگی نیروی F باید ۱۰ درصد افزایش یابد.

دام تستی

اگر به‌جای درصد تغییر بزرگی نیروی F، فقط به مقدار افزایش نیروی F توجه کنید اون وقت در دام گزینهٔ (۱) می‌افتید.

حرکت روی سطح دارای اصطکاک



اگر مانند شکل مقابل نیروی خالص متحرکی به جسم ساکن اِعمال شود:

۱- ابتدا مقدار ($F_{محرک}$) را به‌دست می‌آوریم که مساوی با برایند نیروهای در راستای حرکت به‌جز خود اصطکاک می‌شود.

۲- سپس نیروی $f_{s,max}$ را از رابطهٔ $f_{s,max} = \mu_s F_N$ به‌دست می‌آوریم.

۳- مقادیر دو مرحلهٔ قبل را باهم مقایسه می‌کنیم و سه حالت پیش می‌آید:

الف) اگر $f_{s,max} > F_{محرک}$ $\Leftarrow$ جسم ساکن می‌ماند؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_s = F_{محرک}$

ب) اگر $f_{s,max} = F_{محرک}$ $\Leftarrow$ جسم در آستانه حرکت خواهد بود؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_{s,max} = \mu_s F_N = F_{محرک}$

پ) اگر $f_{s,max} < F_{محرک}$ $\Leftarrow$ جسم حرکت خواهد کرد؛ بنابراین:

نیروی اصطکاک: $f = f_k = \mu_k F_N$

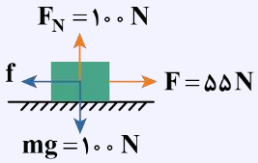
در روابط بالا μ_s و μ_k را به‌ترتیب ضریب اصطکاک ایستایی و ضریب اصطکاک جنبشی می‌نامیم که به ویژگی‌های سطح تماس جسم با زمین بستگی دارند و فاقد یکا هستند. در ضمن همواره: $\mu_s \geq \mu_k$

کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۵۰- جسم ساکنی به جرم $۱۰kg$ روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح ۰/۵ و ۰/۲۵ است. اگر به جسم، نیروی افقی $۵۵N$ وارد شود، نیروی خالص وارد بر جسم چند نیوتون است؟

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵

پاسخ تشریحی:



$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg = ۰/۵ \times ۱۰ \times ۱۰ \rightarrow f_{s,max} = ۵۰N$

چون $F > f_{s,max}$ است پس جسم حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک آن از نوع جنبشی است:

$f_k = \mu_k F_N = ۱۰۰ \times ۰/۲۵ = ۲۵N$

نیروی خالص: $F_{net} = F - f_k = ۵۵ - ۲۵ = ۳۰N$

پاسخ: گزینهٔ ۳

گروه آموزشی ماز

۵۸- رانندهٔ خودرویی با دیدن مانعی که در فاصلهٔ ۵۰ متری آن قرار دارد بلافاصله ترمز می‌کند و بعد از ۴ ثانیه می‌ایستد. اگر ضریب اصطکاک جنبشی بین لاستیک‌ها و سطح جاده برابر ۰/۲ باشد، خودرو در فاصلهٔ چند متری مانع می‌ایستد؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^2})$

۱) صفر ۲) ۲ ۳) ۱۶ ۴) ۳۴

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

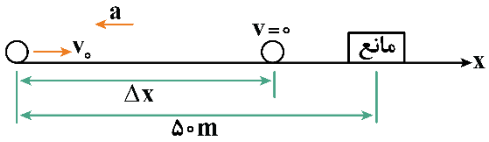
پاسخ: گزینهٔ ۴ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته

معادلات سرعت ـ زمان و جابه‌جایی ـ زمان در حرکت با شتاب ثابت:

معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان: $\Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t$ و $\Delta x = \left(\frac{v_0 + v}{2}\right)t$ معادلهٔ سرعت ـ زمان: $v = at + v_0$

هنگامی‌که خودرو ترمز می‌کند تنها نیروی مؤثر بر خودرو، نیروی اصطکاک جنبشی است.



ابتدا شتاب خودرو را به‌دست می‌آوریم:

قانون دوم نیوتون: $F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma \Rightarrow -\mu_k F_N = ma$

$$\Rightarrow -\mu_k \cancel{m}g = \cancel{m}a \Rightarrow a = -\mu_k . g = -۰/۲ \times ۱۰ = -۲\frac{m}{s^2}$$

با نوشتن معادلات سرعت ـ زمان و جابه‌جایی ـ زمان داریم:

$$\left.\begin{array}{l} v = at + v_0 \Rightarrow ۰ = -۲ \times ۴ + v_0 \Rightarrow v_0 = ۸\frac{m}{s} \\ \Delta x = \frac{1}{2}at^2 + v_0 t = \frac{1}{2} \times (-۲) \times ۱۶ + ۸ \times ۴ = ۱۶m \end{array}\right\}$$

یا $\Delta x = \frac{-1}{2}at^2 + \cancel{v_0 t} = \frac{-1}{2}(-۲)(۴)^2 = ۱۶m$ (معادلهٔ جابه‌جایی ـ زمان به کمک سرعت نهایی)

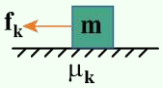
فاصله تا مانع $= ۵۰ - ۱۶ = ۳۴m$

تعبیر

وقتی می‌گه راننده بلافاصله ترمز می‌کند، یعنی زمان واکنش راننده و مسافت واکنش ناچیز هست و کل ماجرا شتاب ثابت تحلیل می‌شه.

نکتهٔ طلایی

هنگامی‌که یک جسم را روی سطح با سرعت افقی پرتاب می‌کنیم تا فقط تحت تأثیر اصطکاک متوقف شود، شتاب حرکت برابر است با:



$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma$$
$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

بچه‌ها به کمک این نکته می‌شه شتاب توقف رو سریع‌تر هم حساب کرد.

مشاوره

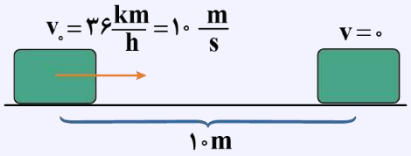
ما طراحان آزمون، همیشه دوست داریم از این تیپ تست داشته باشیم. اولاً مربوط به یکی از مسئله‌های کتاب درسی هست و به درد کنکور و نهایی‌تون می‌خوره. دوماً اینجا خیلی می‌شه روی تست مانور داد. مثلاً در این سؤال، ما زمان واکنش راننده رو ناچیز گرفتیم ولی گاهی وقت‌ها هم توی طراحی‌هامون زمان واکنش راننده رو هم لحاظ می‌کنیم. خلاصه که دست طراحان حسابی توی این سؤال باز هست و نگاه ویژه‌ای به این تست و انواع حالت‌های اون داشته باش.

کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۵۱- رانندهٔ خودرویی که در یک روز بارانی با سرعت $۳۶\frac{km}{h}$ در حرکت است، با دیدن مانعی ترمز می‌کند و بعد از طی مسافت ۱۰ متر می‌ایستد. اگر جرم خودرو $۱۶۰۰kg$ باشد، نیروی اصطکاک بین لاستیک‌ها و سطح جاده چند نیوتون است؟

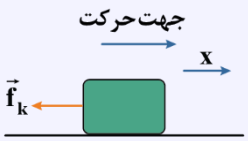
۱) ۳۲۰۰ ۲) ۴۰۰۰ ۳) ۶۴۰۰ ۴) ۸۰۰۰

پاسخ تشریحی:



$$v^2 - v_0^2 = ۲a\Delta x \rightarrow ۰^2 - ۱۰^2 = ۲ \times a \times ۱۰ \rightarrow a = -۵\frac{m}{s^2}$$

چون خودرو ترمز کرده، نیروی پیشران نداریم و تنها نیروی وارد بر خودرو در راستای افق، نیروی اصطکاک است.

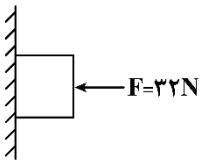


$$F_{net} = ma \rightarrow ۰ - f_k = ۱۶۰۰ \times (-۵) \rightarrow f_k = ۸۰۰۰N$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

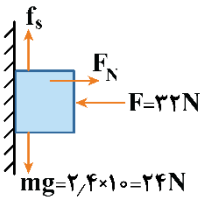
۵۹- در شکل زیر، جسمی به جرم ۲/۴kg توسط نیروی افقی F، به دیواری فشرده شده است و در حالت سکون قرار دارد. نیرویی که از طرف سطح به جسم وارد می‌شود، چند برابر وزن جسم است؟ $(g=10\frac{m}{s^2}\ ,\ \mu_s=0/8)$



۱) $\sqrt{3}$
۲) $\frac{4}{3}$
۳) $\frac{5}{3}$
۴) $\sqrt{2}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

چون جسم درحال سکون قرار دارد، برایند نیروهای وارد بر آن صفر است؛ بنابراین می‌توان نوشت:



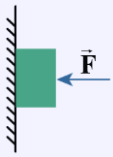
$$\begin{cases} F_{net,x}=0\Rightarrow F_N-F=0\Rightarrow F_N=F=32N \\ F_{net,y}=0\Rightarrow f_s-mg=0\Rightarrow f_s=mg=24N \end{cases}$$

نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند: $R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}=\sqrt{32^2+24^2}=40N$

$$\Rightarrow \frac{R}{mg}=\frac{40}{24}=\frac{5}{3}$$

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

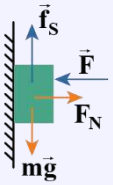
۷۵- جسمی را مطابق شکل با نیروی افقی به دیوار قائمی فشرده و ثابت نگه داشته‌ایم. اگر نیروی F را ۲ برابر کنیم، کدام نیرو ۲ برابر می‌شود؟



۱) نیرویی که سطح به جسم وارد می‌کند.
۲) نیرویی که جسم به سطح وارد می‌کند.
۳) نیروی عمودی سطح
۴) نیروی اصطکاک

پاسخ تشریحی:

مطابق شکل، نیروهای وارد بر جسم را ترسیم می‌کنیم. چون جسم ساکن و درحال تعادل است، پس هم در راستای افق و هم در راستای قائم برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است، پس:



$$\begin{cases} \text{در راستای افقی}: F=F_N \\ \text{در راستای قائم}: f_s=mg \end{cases}$$

با دو برابر شدن نیروی F چون $F=F_N$ است، پس قطعاً F_N هم دو برابر می‌شود. پس گزینهٔ (۳) صحیح است.

با دو برابر شدن F چون F_N هم دو برابر می‌شود، پس $f_{s,max}$ دو برابر شده به همین علت mg هنوز کوچک‌تر از $f_{s,max}$ خواهد ماند و همین باعث می‌شود جسم بازهم ساکن بماند و f_s برابر mg باشد، یعنی نیروی اصطکاک تغییری نخواهد کرد.

در مورد نیروی واکنش سطح می‌توان نوشت:

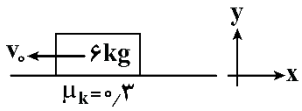
$$R=\sqrt{F_N^2+f_s^2}\xrightarrow[f_s=mg]{F_N=F}R=\sqrt{F^2+(mg)^2}$$

چون F دو برابر شده، ولی mg ثابت مانده، پس R افزایش می‌یابد، ولی نمی‌توان گفت دو برابر می‌شود.

پاسخ: گزینهٔ ۳

گروه آموزشی ماز

۶۰- مطابق شکل زیر، وزنه‌ای را در مبدأ زمان با تندی اولیهٔ $12\frac{m}{s}$ روی سطح افقی به سمت چپ پرتاب می‌کنیم تا تحت تأثیر نیروی اصطکاک متوقف شود. اگر از لحظهٔ توقف جسم، نیروی ثابت $\vec{F}=20(N)\vec{i}$ به آن وارد شود. در چه لحظه‌ای برحسب ثانیه، وزنه به مکان اولیه‌اش برمی‌گردد؟ $(g=10\frac{m}{s^2})$



۱) ۲۰
۲) ۸
۳) ۱۲
۴) ۱۶

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

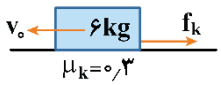
پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

مشاوره

اکثر بچه‌ها در تحلیل این تیپ تست‌ها که بعد از مدتی یک نیرویی حذف یا اضافه می‌شه و ادامهٔ داستان حرکت جسم رو تغییر می‌ده مشکل دارن. ما اومدیم کاملاً قدم‌به‌قدم و ریزبه‌ریز روند حل این سؤال رو برات نوشتیم. پس حسابی با دقت پاسخ‌نامه رو بخون تا نحوهٔ تحلیل این تیپ تست‌ها کاملاً توی مشتت باشه. راستی این تیپ تست رو می‌شه با تغییر تکانه هم ترکیب کرد و خیلی حواست جمع باشه بهش.

گام اول:

از لحظهٔ پرتاب تا لحظهٔ توقف، فقط نیروی اصطکاک به جسم وارد می‌شود، بنابراین داریم:



$$f_k = ma \ , \ F_N = mg \Rightarrow a = \mu_k g = ۰/۳ \times ۱۰ = ۳ \frac{m}{s^۲}$$

$$v = at + v_۰ \Rightarrow ۰ = ۳t - ۱۲ \Rightarrow t = ۴s$$

گام دوم:

پس ۴s ثانیه طول می‌کشد تا وزنه متوقف شود. در این ۴ ثانیه جسم، مسافت d را طی می‌کند و داریم:

$$v^۲ - v_۰^۲ = ۲a\Delta x \Rightarrow ۰ - ۱۴۴ = ۶\Delta x \Rightarrow \Delta x = -۲۴m \Rightarrow d = |\Delta x| = ۲۴m$$

گام سوم:

بلافاصله در لحظهٔ توقف نیروی $F = ۲۰N$ به سمت راست وارد می‌شود:

$$F_{net} = ma \Rightarrow F - f_k = ma'$$

$$\Rightarrow ۲۰ - ۰/۳ \times ۶ \times ۱۰ = ۶a' \Rightarrow a' = \frac{۱}{۳} \frac{m}{s^۲}$$

گام آخر:

باید محاسبه شود که چند ثانیه طول می‌کشد تا وزنه فاصلهٔ ۲۴ متری را طی کرده و به نقطهٔ اولیه برمی‌گردد:

$$\Delta x' = \frac{۱}{۲} a' t'^۲ + v'_۰ t' \xrightarrow{a' = \frac{۱}{۳} \frac{m}{s^۲} \ , \ \Delta x' = ۲۴m \ , \ v'_۰ = ۰ \frac{m}{s}} ۲۴ = \frac{۱}{۲} \times \frac{۱}{۳} t^۲ + ۰ \Rightarrow t' = ۱۲s$$

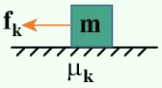
بنابراین درمجموع بعد از $۱۶ = ۴ + ۱۲$ ثانیه، یعنی در لحظهٔ $t = ۱۶s$ وزنه به مکان اولیه برمی‌گردد.

دام تستی

اگر گزینهٔ (۳) رو زدی، به‌خاطر اینه که فقط به زمان برگشت وزنه توجه کردی و حواست به کل مدت‌زمان خواسته‌شده نبوده!

نکات طلایی

۱- هنگامی‌که یک جسم را روی سطح با سرعت افقی پرتاب می‌کنیم تا فقط تحت تأثیر اصطکاک متوقف شود، شتاب حرکت برابر است با:



$$F_{net} = ma \Rightarrow -f_k = ma$$

$$\Rightarrow -\mu_k mg = ma \Rightarrow a = -\mu_k g$$

۲- زمان توقف جسم برابر است با:

$$t_{\text{توقف}} = \frac{v_۰}{|a|} = \frac{v_۰}{\mu_k g}$$

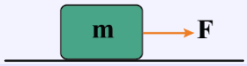
۳- مسافتی که جسم طی می‌کند تا متوقف شود برابر است با:

$$\ell_{\text{توقف}} = \frac{v_۰^۲}{|۲a|} = \frac{v_۰^۲}{۲\mu_k g}$$

۴- شتاب حرکت، زمان توقف و مسافت طی‌شده، هیچ‌کدام به جرم جسم ربطی ندارند.

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۵۶- مطابق شکل به جسمی روی سطح افقی دارای اصطکاک، نیروی افقی F وارد می‌شود و جسم از حال سکون شروع به حرکت می‌کند. پس‌ازآن‌که به‌اندازهٔ Δx جابه‌جا شد، نیروی F در یک لحظه قطع می‌شود و پس از آن جسم با طی مسافت $۴\Delta x$ متوقف می‌شود. نیروی F چند برابر نیروی اصطکاک است؟



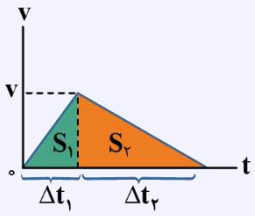
۱) ۲ ۲) ۳

۳) ۴ ۴) ۵

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

پاسخ تشریحی:

با توجه به این‌که مساحت محصور بین نمودار $v-t$ و محور زمان برابر جابه‌جایی متحرک است و با توجه به اطلاعات مسئله، نمودار $v-t$ حرکت جسم را رسم می‌کنیم:



$$\Delta x_2 = 4\Delta x_1 \rightarrow S_2 = 4S_1 \rightarrow \frac{v \times \Delta t_2}{2} = 4\frac{v \times \Delta t_1}{2} \rightarrow \Delta t_2 = 4\Delta t_1 \quad (*)$$

با توجه به نسبت بزرگی شیب $v-t$ در دو حالت، نسبت شتاب و درنتیجه نسبت نیروی خالص در دو حالت را داریم:

$$\left|\frac{F_1}{F_2}\right| = \left|\frac{a_1}{a_2}\right| = \frac{\frac{\Delta t_1}{\cancel{\Delta v}}}{\frac{\Delta t_2}{\cancel{\Delta v}}} = \frac{\Delta t_2}{\Delta t_1} \xrightarrow{(*)} \left|\frac{F_1}{F_2}\right| = 4$$

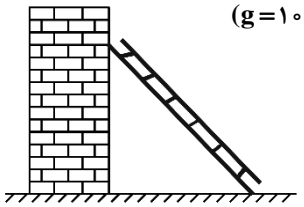
در مرحلهٔ اول حرکت، نیروی خالص وارد بر جسم برابر $F_1 = F - f_k$ است و در مرحلهٔ دوم حرکت، نیروی خالص برابر $F_2 = -f_k$ است. حال می‌توان نوشت:

$$\left|\frac{F_1}{F_2}\right| = \frac{F - f_k}{f_k} = 4 \rightarrow F - f_k = 4f_k \rightarrow F = 5f_k$$

پاسخ: گزینهٔ ۴

گروه آموزشی ماز

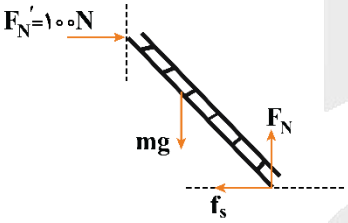
۶۱- مطابق شکل، نردبان ساکنی به جرم ۲۰ کیلوگرم به دیوار قائم بدون اصطکاکی تکیه داده شده است و دیوار، نیروی ۱۰۰ نیوتون بر آن وارد می‌کند. ضریب اصطکاک ایستایی بین زمین و پای نردبان ۰/۷۵ است. نیروی اصطکاک بین نردبان و زمین چند نیوتون است؟ $\left(g = 10\frac{m}{s^2}\right)$



۱) ۱۰۰
۲) ۱۵۰
۳) ۲۰۰
۴) ۲۵۰

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

ابتدا نمودار نیروهای وارد بر نردبان را رسم می‌کنیم:



چون نردبان ساکن است؛ بنابراین، طبق قانون اول نیوتون، نیروهای وارد بر نردبان باید متوازن باشند؛ بنابراین داریم:

$$\begin{cases} F_N = mg = 200N \\ f_s = F'_N = 100N \end{cases}$$

دام تستی

بعید نیست در تستی تا این حد ساده، بعضی‌ها زخم‌خوردهٔ گزینهٔ (۲) باشند. چرا؟ از بس توی مسائل نردبان، نردبان در آستانهٔ حرکت بوده، خیلی‌ها عادت کردند که نردبان رو در آستانهٔ حرکت بگیرن و نسبت به این مسئله دچار یکنواختی شدند. خواستیم یه تلنگر مشتی بزنیم تا حواسشون بیش‌تر جمع بشه.

گروه آموزشی ماز

۶۲- جرم جسم A، ۵۰ درصد کم‌تر از جرم جسم B است. اگر هر دو جسم با تندی ثابت حرکت کنند، طوری که تکانهٔ جسم A، ۴ برابر تکانهٔ جسم B باشد، انرژی جنبشی جسم B چند برابر انرژی جنبشی جسم A است؟

۱) $\frac{1}{8}$
۲) $\frac{1}{16}$
۳) $\frac{1}{32}$
۴) $\frac{1}{64}$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

رابطهٔ انرژی جنبشی برحسب تکانه به‌صورت $K = \frac{p^2}{2m}$ است. پس داریم:

$$\frac{K_B}{K_A} = \left(\frac{p_B}{p_A}\right)^2 \times \left(\frac{m_A}{m_B}\right) \xrightarrow[p_A = 4p_B]{m_A = \frac{1}{2}m_B} \frac{K_B}{K_A} = \frac{1}{16} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{32}$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

دام تستی

اگر حواستون نباشه که در رابطهٔ $K=\frac{p^۲}{۲m}$، انرژی جنبشی با مربع تکانه رابطهٔ مستقیم و با جرم جسم رابطهٔ معکوس داره به‌احتمال خیلی بالایی در دام گزینهٔ (۱) یا گزینهٔ (۴) گرفتار می‌شوید.

گروه آموزشی ماز

۶۳- معادلهٔ تکانه ـ زمان متحرکی که بر روی محور x حرکت می‌کند، در SI به‌صورت $p=۲t^۲-۴t+۶$ است. نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازهٔ $t_۱=۲s$ تا $t_۲=۴s$ چند نیوتون است؟

۱) $۸\vec{i}$ ۲) $-۸\vec{i}$ ۳) $۴\vec{i}$ ۴) $-۴\vec{i}$

پاسخ: گزینهٔ ۱ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۴۰۲)

با استفاده از قانون دوم نیوتون با بیان تکانه داریم:

$$p=۲t^۲-۴t+۶\Rightarrow\begin{cases}t_۱=۲s: p=۲\times۲^۲-۴\times۲+۶=۶\frac{kg.m}{s}\\ t_۲=۴s: p=۲\times۴^۲-۴\times۴+۶=۲۲\frac{kg.m}{s}\end{cases}$$

$$F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{۲۲-۶}{۴-۲}=\frac{۱۶}{۲}=۸N$$

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۵۷- معادلهٔ تکانه ـ زمان جسمی در SI به‌صورت $p=(t^۲-۵t+۶)\vec{i}$ است. بزرگی نیروی خالص متوسط وارد بر جسم در بازه $t_۱=۱s$ تا $t_۲=۲/۵s$ چند نیوتون است؟

۱) $\frac{۵}{۴}$ ۲) $\frac{۷}{۴}$ ۳) $\frac{۳}{۲}$ ۴) $\frac{۷}{۳}$

پاسخ تشریحی:

با توجه به معادلهٔ $p-t$، تکانهٔ جسم در دو لحظه را به‌دست می‌آوریم:

$$\begin{cases}p_۱=(۱)^۲-۵(۱)+۶=۲\frac{kg.m}{s}\\ p_۲=(۲/۵)^۲-۵(۲/۵)+۶=-۰/۲۵\frac{kg.m}{s}\end{cases}$$

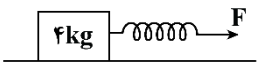
حال به کمک رابطهٔ نیروی خالص متوسط با تغییر تکانه، داریم:

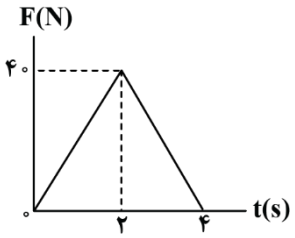
$$F_{av}=\frac{\Delta p}{\Delta t}\Rightarrow F_{av}=\frac{-۰/۲۵-۲}{۲/۵-۱}=\frac{-۲/۲۵}{۱/۵}=-۱/۵N\Rightarrow|F_{av}|=۱/۵N=\frac{۳}{۲}N$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

گروه آموزشی ماز

۶۴- جسمی ساکن به جرم ۴kg به یک فنر با طول اولیهٔ ۳۰cm و ثابت فنر $۴۰۰\frac{N}{m}$ بسته شده است. نمودار تغییرات نیروی فنر (F) برحسب زمان، مطابق شکل زیر داده شده است. چه تعداد از موارد زیر درست است؟ $(g=۱۰\frac{N}{kg})$





الف: در لحظهٔ شروع حرکت، طول فنر ۳۵cm است.

ب: در لحظه‌ای که طول فنر به ۳۳cm می‌رسد، نیروی خالص وارد بر جسم، صفر است.

پ: به مدت ۲/۴ ثانیه، حرکت جسم تندشونده است.

۱) صفر

۲) ۱

۳) ۲

۴) ۳

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۴ (خیلی سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

بررسی موارد:

الف

$f_{s,max} = \mu_s F_N = ۰/۵ \times ۴۰ = ۲۰N$

آستانهٔ حرکت: $F = f_{s,max} = ۲۰N \Rightarrow k(L - L_۰) = ۲۰ \Rightarrow ۴(L - ۳۰) = ۲۰ \Rightarrow L = ۳۵cm$ (✓)

ب

$L = ۳۳cm \Rightarrow F = k(L - L_۰) = ۴(۳۳ - ۳۰) = ۱۲N$

دو بار نیروی F به ۱۲N می‌رسد. بار اول، جسم هنوز به آستانهٔ حرکت نرسیده است؛ بنابراین جسم ساکن است و $F_{net} = ۰$ است.

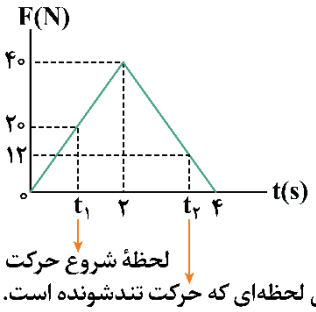
بار دوم، بعد از شروع حرکت جسم و پس از لحظهٔ ۲s که بزرگی $\vec{F}$ کاهش یافته و به ۱۲N می‌رسد:

$f_k = \mu_k F_N = ۰/۳ \times ۴۰ = ۱۲N \Rightarrow F = f_k \Rightarrow F_{net} = ۰$ (✓)

پ

از لحظهٔ شروع حرکت تا زمانی که نیروی F بزرگ‌تر از f_k باشد، حرکت تندشونده است:

$f_k = ۱۲N$ و $f_{s,max} = ۲۰N$



از تشابه مثلث‌ها داریم:

$$\begin{cases} \frac{t_۱}{۲} = \frac{۲۰}{۴۰} \Rightarrow t_۱ = ۱s \\ \frac{۴ - t_۲}{۴ - ۲} = \frac{۱۲}{۴۰} \Rightarrow t_۲ = ۳/۴s \end{cases}$$

$\Delta t = t_۲ - t_۱ = ۲/۴s$ (✓)

دام تستی

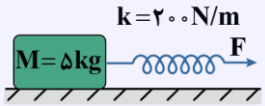
در قسمت «پ» که زمان برابر با ۳/۴s می‌شود، اگر حواستان به لحظهٔ شروع حرکت $(t_۱ = ۱s)$ نباشد، آن‌گاه به‌اشتباه فکر می‌کنید به مدت ۳/۴s حرکت تندشونده بوده و مورد «پ» رو نادرست می‌گیرید و گزینهٔ (۳) رو انتخاب می‌کنید.

مشاوره

ترکیب تغییر نیروی فنر با تأثیر اون بر نوع حرکت متحرک، همیشه مورد علاقهٔ طراحان محترم بوده؛ اما ما توی ماز براتون یک تست فوق خفن از حرفه‌ای‌ترین حالت ممکن براتون طراحی کردیم تا کا رو تمام کنیم. به‌نظرمون این تست از اوناست که باید هایلایت و توی ایام جمع‌بندی حتماً مرورش کنین.

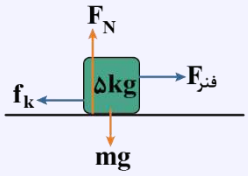
کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۳۹۸

۵۱- جسمی روی یک سطح افقی تحت تأثیر نیروی افقی F با سرعت ثابت کشیده می‌شود. اگر افزایش طول فنر در ضمن حرکت ۵ سانتی‌متر باشد، ضریب اصطکاک جنبشی بین جسم و سطح کدام است؟ $(g = ۱۰ \frac{m}{s^۲})$



۱) ۰/۲ ۲) ۰/۲۵

۳) ۰/۳ ۴) ۰/۴



پاسخ تشریحی:

چون حرکت جسم با سرعت ثابت است، پس برایند نیروهای وارد بر جسم صفر است:

پاسخ: گزینهٔ ۱

گروه آموزشی ماز

۶۵- یک تلسکوپ فضایی در ارتفاع تقریبی ۱۶۰۰ کیلومتری از سطح زمین به دور زمین می‌چرخد. شتاب گرانشی در این فاصله چند واحد SI است؟

$(g_۰ = ۱۰ \frac{m}{s^۲}, R_e = ۶۴۰۰km)$

۱) ۷/۶ ۲) ۵/۶ ۳) ۶/۴ ۴) ۸/۴

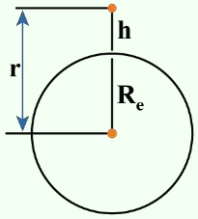
www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته

شتاب گرانش در فاصلهٔ r از مرکز زمین برابر است با:



$$\begin{cases} g=\frac{GM_e}{r^2} \\ r=R_e+h \end{cases} \xrightarrow{\text{شتاب گرانش در فاصلهٔ h از سطح زمین}} g=\frac{GM_e}{(R_e+h)^2} \xrightarrow[\text{سطح زمین}]{\text{با تغییر فاصله از}} \frac{g_2}{g_1}=(\frac{r_1}{r_2})^2=\left(\frac{R_e+h_1}{R_e+h_2}\right)^2$$

شتاب گرانش در ارتفاع $h=1600km$ را با شتاب گرانش در سطح زمین مقایسه می‌کنیم.

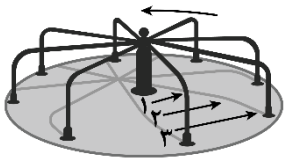
$$g=G\frac{M_e}{(R_e+h)^2} \Rightarrow \frac{g_h}{g_0}=\left(\frac{R_e}{R_e+h}\right)^2$$

$$\Rightarrow \frac{g_h}{10}=\left(\frac{6400}{6400+1600}\right)^2=(\frac{4}{5})^2=\frac{16}{25}$$

$$\Rightarrow g_h=10\times\frac{16}{25}=6/4\frac{m}{s^2}$$

گروه آموزشی ماز

۶۶- یک دیسک گردان در شهربازی را درنظر بگیرید که توسط یک موتور الکتریکی می‌چرخد. فرض کنید سه فرد (۱)، (۲) و (۳) در فاصله‌های d، ۲d و ۳d از مرکز آن قرار دارند. کدام‌یک از مقایسه‌های زیر در مورد دورهٔ تناوب، بسامد، تندی حرکت و شتاب مرکزگرا برای این افراد نادرست است؟



۱) $T_1=T_2=T_3$

۲) $f_1=f_2=f_3$

۳) $v_1=2v_2=3v_3$

۴) $a_1=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{3}a_3$

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

هر سه فرد باهم دور می‌زنند، بنابراین مدت‌زمانی که طول می‌کشد که هرکدام از آن‌ها یک دور بزنند، باهم برابر است. درنتیجه $T_1=T_2=T_3$ و $f_1=f_2=f_3$ است. در مقایسهٔ تندی حرکت و شتاب مرکزگرا برای این سه فرد می‌توان نوشت:

$$v=\frac{2\pi r}{T} \xrightarrow[r_1=\frac{1}{2}r_2=\frac{1}{3}r_3]{T:\text{یکسان}} v_1=\frac{1}{2}v_2=\frac{1}{3}v_3$$

$$a=\frac{v^2}{r}=\frac{(\frac{2\pi r}{T})^2}{r}=\frac{4\pi^2}{T^2}r \xrightarrow[r_1=\frac{1}{2}r_2=\frac{1}{3}r_3]{T:\text{یکسان}} a_1=\frac{1}{2}a_2=\frac{1}{3}a_3$$

مشاوره

این سؤال که از دل کتاب درسی طرح شده، هدفش این بود که تأثیر یا عدم تأثیر شعاع چرخش رو در تمام کمیت‌های مورد بحث برای حرکت دایره‌ای با شما مطرح کنه و درواقع یک دید جامع برای این موضوع بهتون بده.

حرکت دایره‌ای یکنواخت

۱- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، مدت‌زمان لازم برای پیمودن یک دور محیط دایره دورهٔ تناوب (دوره) نامیده می‌شود.

$$T=\frac{2\pi r}{v} \xrightarrow{T=\frac{2\pi}{\omega}} v=r\omega \quad \text{(دوره)}$$

ω : بسامد زاویه‌ای برحسب $\frac{rad}{s}$

۲- در حرکت دایره‌ای یکنواخت، اندازهٔ سرعت، ثابت است اما جهت آن دائماً تغییر می‌کند. بنا به همین دلیل این حرکت شتابدار است. جهت شتاب همواره به سمت مرکز دایره است.

$$a_C=\frac{v^2}{r} \xrightarrow{v=r\omega} a_C=r\omega^2$$

a_C : شتاب مرکزگرا برحسب $\frac{m}{s^2}$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۳- براساس قانون دوم نیوتون: $(F = ma)$ خواهیم داشت:

$$F_{net} = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{v=r\omega} F_{net} = mr\omega^2$$

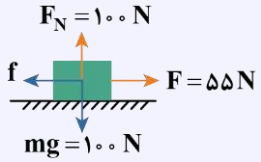
F_{net} : نیروی مرکزگرا برحسب N

کنکور سراسری ریاضی اردیبهشت‌ماه ۱۴۰۳

۵۰- جسم ساکنی به جرم $10\,kg$ روی سطح افقی قرار دارد و ضریب اصطکاک ایستایی و جنبشی بین جسم و سطح ۰/۵ و ۰/۲۵ است. اگر به جسم نیروی افقی $55N$ وارد شود، نیروی خالص وارد بر جسم چند نیوتون است؟ $(g = 10\frac{N}{kg})$

۱) ۱۵ ۲) ۲۰ ۳) ۳۰ ۴) ۵

پاسخ تشریحی:



$$f_{s,max} = \mu_s F_N = \mu_s mg = 0/5 \times 10 \times 10 \rightarrow f_{s,max} = 50N$$

چون $F > f_{s,max}$ است پس جسم حرکت می‌کند و نیروی اصطکاک آن از نوع جنبشی است:

$$f_k = \mu_k F_N = 100 \times 0/25 = 25N$$

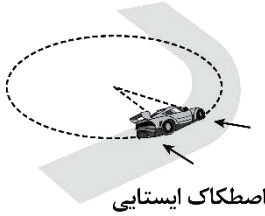
نیروی خالص: $F_{net} = F - f_k = 55 - 25 = 30N$

پاسخ: گزینهٔ ۳

گروه آموزشی ماز

۶۷- مطابق شکل، خودرویی به جرم $1500kg$ را درنظر بگیرید که می‌خواهد در یک پیچ مسطح افقی به شعاع $50m$ بدون آن‌که بلغزد، دور بزند. اگر ضریب اصطکاک ایستایی بین لاستیک و سطح جاده ۱ باشد، حداکثر تندی خودرو چند متر بر ثانیه می‌تواند باشد؟ $(g = 10\frac{m}{s^2})$

۱) $5\sqrt{2}$
۲) $10\sqrt{5}$
۳) ۲۵
۴) ۵۰



نیروهای اصطکاک ایستایی

پاسخ: گزینهٔ ۲ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

نکته

حداکثر تندی خودرویی که می‌خواهد در یک پیچ مسطح افقی به شعاع r و ضریب اصطکاک ایستایی μ_s، بدون لغزش دور بزند برابر است با:

$$v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$$

در این مثال نیروی اصطکاک $(f_{s,max})$ نقش نیروی مرکزگرا (F_c) را دارد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$F_C = \frac{mv^2}{r} \xrightarrow{F_C = f_{s,max} = \mu_s F_N} \mu_s F_N = \frac{mv_{max}^2}{r}$$

$$\Rightarrow \mu_s \cancel{m} g = \frac{\cancel{m} v_{max}^2}{r} \Rightarrow v_{max} = \sqrt{\mu_s rg}$$

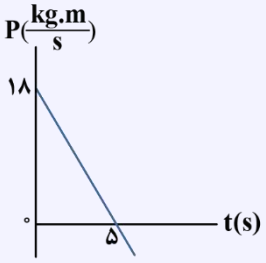
$$\Rightarrow v = \sqrt{1 \times 50 \times 10} = 10\sqrt{5}\,\frac{m}{s}$$

راستی بچه‌ها جرم خودرو به دردمون نخورد و بد نیست بگی مرگ $v_{max} = \sqrt{}$ (م: μ_s / ر: r / گ: g)

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

کنکور سراسری ریاضی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۳

۵۴- شکل زیر، نمودار تکانه ـ زمان متحرکی است که در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. اگر جرم متحرک ۴۵۰ گرم باشد، بزرگی شتاب آن در لحظهٔ $t = 5s$ چند متر بر مربع ثانیه است؟



۱) ۸
۲) ۶
۳) ۴
۴) ۳

پاسخ تشریحی:

چون نمودار تکانه ـ زمان خط راست است، پس نیرو و شتاب ثابت هستند، بنابراین:

$$F_{av} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \frac{0-18}{5-0} = -3/6N$$

$$F = ma \Rightarrow a = \frac{F}{m} = \frac{-3/6}{0/45} = -8\frac{m}{s^2}$$

$$\Rightarrow |a| = 8\frac{m}{s^2}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

گروه آموزشی ماز

۶۸- تندی گردش ماهوارهٔ **A** به دور زمین، ۲۰ درصد کم‌تر از تندی گردش ماهوارهٔ **B** به دور زمین است. شعاع مدار ماهوارهٔ **A**، چند برابر شعاع مدار ماهوارهٔ **B** است؟

۱) $\frac{4}{5}$
۲) $\frac{5}{4}$
۳) $\frac{16}{25}$
۴) $\frac{25}{16}$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۲)

تندی گردش ماهواره به دور زمین از رابطهٔ $v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}}$ به‌دست می‌آید؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$v_A = v_B - 20\%v_B = 80\%v_B = 0/8v_B$$

$$v = \sqrt{\frac{GM_e}{r}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \xrightarrow{v_A = 0/8v_B} \frac{4}{5} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}}$$

$$\Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = \frac{16}{25} \Rightarrow \frac{r_A}{r_B} = \frac{25}{16}$$

دام تستی

اگر خدایی نکرده حواستون به این‌که $v \propto \frac{1}{\sqrt{r}}$ نباشه، یا نسبت خواسته شده رو برعکس بگیرین، در دام گزینهٔ (۳) می‌افتید.

کنکور سراسری ریاضی تیرماه ۱۴۰۳

۵۵- اگر تندی ماهوارهٔ A، دو برابر تندی ماهوارهٔ B باشد، دورهٔ آن چند برابر دورهٔ ماهوارهٔ B است؟

۱) $\frac{1}{2}$
۲) $\frac{1}{4}$
۳) $\frac{1}{8}$
۴) $\frac{\sqrt{2}}{2}$

پاسخ تشریحی:

می‌دانیم که تندی ماهواره با جذر شعاع، رابطهٔ عکس دارد:

$$v = \sqrt{G\frac{M}{r}} \Rightarrow \frac{v_A}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{2v_B}{v_B} = \sqrt{\frac{r_B}{r_A}} \Rightarrow \frac{r_B}{r_A} = 4$$

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{(\frac{r_A}{r_B})^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \sqrt{(\frac{1}{4})^3} \Rightarrow \frac{T_A}{T_B} = \frac{1}{8}$$

پاسخ: گزینهٔ ۳

گروه آموزشی ماز

۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
www.biomaze.ir
WWW.ArefOnline.ir

۶۹- معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگری که حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد، در SI به‌صورت $x = ۰/۴\cos ۴\pi t$ است. از لحظهٔ صفر تا لحظه‌ای که مسافت طی‌شده توسط نوسانگر برابر ۱۴۰cm می‌شود، اندازهٔ سرعت متوسط نوسانگر چند واحد SI است؟

۱) ۰/۴۸ ۲) ۰/۲۴ ۳) ۰/۱۸ ۴) ۰/۱۲

پاسخ: گزینهٔ ۱ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

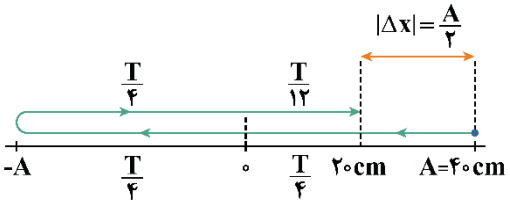
ابتدا با توجه به معادلهٔ مکان ـ زمان نوسانگر، دامنهٔ حرکت و دورهٔ آن را می‌یابیم:

$$A = ۰/۴m = ۴۰cm$$

$$\omega = ۴\pi(\frac{rad}{s}) \Rightarrow \frac{۲\pi}{T} = ۴\pi \Rightarrow T = \frac{۱}{۲}s$$

گام دوم:

با توجه به مقدار مسافت طی‌شده از شروع حرکت نوسانگر، اندازهٔ جابه‌جایی و مدت‌زمان حرکت آن را می‌یابیم:



$$L = ۱۴۰cm = ۳A + \frac{A}{۲}$$

$$\Delta t = \frac{۳T}{۴} + \frac{T}{۱۲} = \frac{۱۰T}{۱۲} = \frac{۵T}{۶} = \frac{۵}{۶} \times \frac{۱}{۲} = \frac{۵}{۱۲}s$$

$$|\Delta x| = \frac{A}{۲} = ۲۰cm$$

گام آخر:

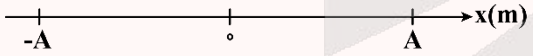
اندازهٔ سرعت متوسط نوسانگر در این مدت را می‌یابیم:

$$|v_{av}| = \frac{|\Delta x|}{\Delta t} = \frac{۰/۲}{\frac{۵}{۱۲}} = \frac{۲\times ۱۲}{۵\times ۱۰} = ۰/۴۸\frac{m}{s}$$

حرکت هماهنگ ساده

در یک حرکت هماهنگ ساده که معادلهٔ مکان ـ زمان آن به‌صورت $x = A\cos \omega t$ است، دانستن نکات زیر، ضروری است:

۱- پاره‌خط نوسان: اگر مکان نوسان‌کننده در زمان‌های مختلف را بر روی یک محور، نمایش دهیم ملاحظه می‌کنیم که مکان نوسان‌کننده بین دو مقدار $+A$ و $-A$ قرار می‌گیرد:

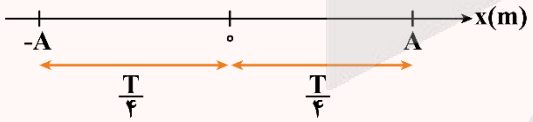


۲- نقطهٔ تعادل: در وسط پاره‌خطی که جسم بر روی آن نوسان می‌کند، قرار دارد؛ یعنی نقطهٔ O، در این نقطه تندی نوسانگر دارای بیش‌ترین مقدار ممکن است:

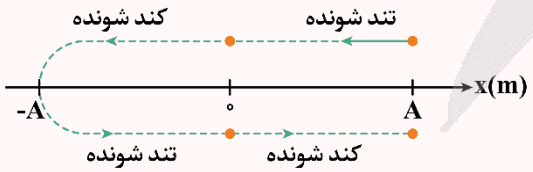
$$v_{max} = A\omega$$

۳- نقاط بازگشت: در دو انتهای پاره‌خط نوسان یعنی در مکان‌های $x = \pm A$ سرعت نوسانگر صفر شده و تغییر جهت می‌دهد، برای همین به این نقاط، نقاط بازگشت می‌گوییم.

۴- کم‌ترین مدت‌زمان لازم برای آن‌که نوسانگر فاصلهٔ بین نقاط بازگشت و تعادل را بپیماید برابر $\frac{T}{۴}$ است و مقدار مسافت پیموده‌شده توسط نوسانگر برابر A است:



۵- در یک حرکت هماهنگ ساده، هرچه نوسانگر به نقطهٔ تعادل نزدیک‌تر شود، تندی آن بیش‌تر و هرچه نوسانگر به نقاط بازگشت نزدیک‌تر شود، تندی آن کم‌تر می‌شود:



www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۶- بیشینهٔ هریک از کمیت‌های مربوط به نوسانگر از روابط زیر به‌دست می‌آید:

مکان بیشینه: $x_{max} = A$

تندی بیشینه: $v_{max} = A\omega$

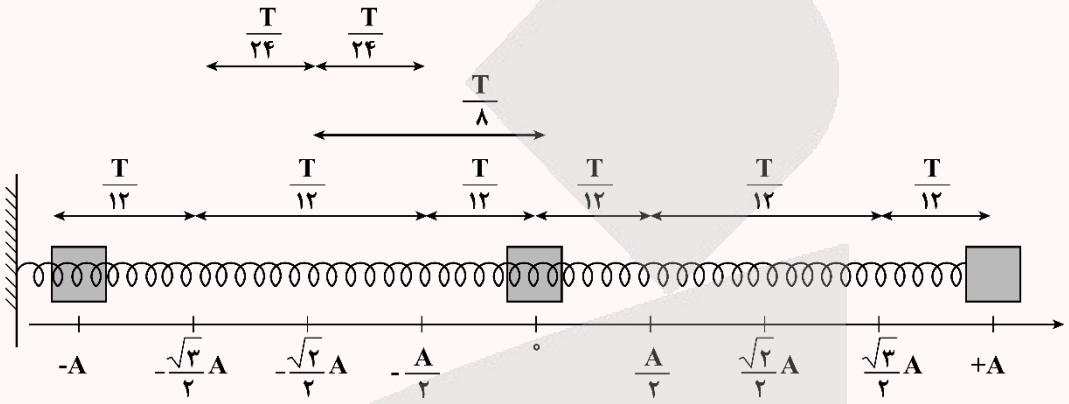
شتاب بیشینه: $a_{max} = A\omega^{۲}$

نیروی بیشینه: $F_{max} = mA\omega^{۲}$

تکانهٔ بیشینه: $p_{max} = mv_{max} = mA\omega$

جدول جمع‌بندی حرکت هماهنگ ساده

برای حل این سؤال جدول زیر را به‌خاطر بسپارید!



مکان	A	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$	$\frac{A}{۲}$	۰	$\frac{-A}{۲}$	$\frac{-\sqrt{۲}}{۲}A$	$\frac{-\sqrt{۳}}{۲}A$	$-A$
سرعت	۰	$\pm\frac{۱}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}v_{max}$	$\pm v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۳}}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}v_{max}$	$\pm\frac{۱}{۲}v_{max}$	۰
شتاب	$-a_{max}$	$-\frac{\sqrt{۳}}{۲}a_{max}$	$-\frac{\sqrt{۲}}{۲}a_{max}$	$-\frac{۱}{۲}a_{max}$	۰	$\frac{۱}{۲}a_{max}$	$\frac{\sqrt{۲}}{۲}a_{max}$	$\frac{\sqrt{۳}}{۲}a_{max}$	a_{max}
انرژی جنبشی	۰	$\frac{۱}{۴}K_{max}$	$\frac{۱}{۲}K_{max}$	$\frac{۳}{۴}K_{max}$	K_{max}	$\frac{۳}{۴}K_{max}$	$\frac{۱}{۲}K_{max}$	$\frac{۱}{۴}K_{max}$	۰
انرژی پتانسیل	U_{max}	$\frac{۳}{۴}U_{max}$	$\frac{۱}{۲}U_{max}$	$\frac{۱}{۴}U_{max}$	۰	$\frac{۱}{۴}U_{max}$	$\frac{۱}{۲}U_{max}$	$\frac{۳}{۴}U_{max}$	U_{max}
انرژی مکانیکی	E	E	E	E	E	E	E	E	E

گروه آموزشی ماز

۷۰- نوسانگری بر روی پاره‌خطی به طول ۲۰cm حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد و در هر بازهٔ زمانی دلخواهی به مدت ۱ ثانیه، ۱۰ بار به بیشینهٔ تندی خود می‌رسد. اندازهٔ بیش‌ترین تندی متوسط نوسانگر در یک بازهٔ زمانی $\frac{۱}{۳۰}$ ثانیه‌ای، چند متر بر ثانیه بیش‌تر از کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در یک بازهٔ زمانی $\frac{۱}{۲۰}$ ثانیه‌ای می‌باشد؟

۱) $۴\sqrt{۲}$ ۲) $۲\sqrt{۲}$ ۳) $۳-۲\sqrt{۲}$ ۴) $۲\sqrt{۲}-۱$

پاسخ: گزینهٔ ۴ (سخت ـ مفهومی/محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

مشاوره

این تیپ تست در کنکور ۱۴۰۳ هم مطرح شد و نشون می‌ده ایدهٔ این تست خیلی مورد علاقهٔ طراح کنکور هست. چرا؟ چون یک بار حداکثر مسافت طی‌شده در یک مدت‌زمان معیّن بحث می‌شه و یک بار هم حداقل مسافت طی‌شده در یک مدت‌زمان معیّن! ما اینجا حسابی به این موضوع حواسمون بوده و برای همین یک تست جامع از این موضوع براتون طرح کردیم تا خیالتون رو راحت کنیم.

گام اول:

ابتدا دامنهٔ نوسان و دورهٔ نوسان را به‌دست می‌آوریم:

طول پاره‌خط نوسان (L) دو برابر دامنهٔ نوسان (A) می‌باشد، پس داریم:

$$L = ۲A \xrightarrow{L=۲۰cm} ۲۰ = ۲A \Rightarrow A = ۱۰cm$$

WWW.ArefOnline.ir
www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

در هر نوسان کامل، نوسانگر ۲ بار به بیشینهٔ تندی خود می‌رسد. پس در این سؤال نوسانگر در مدت‌زمان ۱s، پنج نوسان کامل انجام داده است. پس داریم:

$$n=\frac{\Delta t}{T}\xrightarrow{n=5\ ,\ \Delta t=1s}5=\frac{1}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{5}s$$

گام دوم:

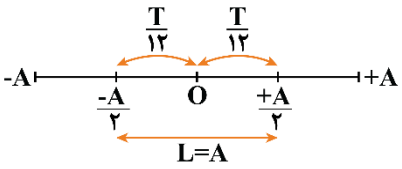
بازه‌های زمانی داده‌شده را برحسب این‌که چه کسری از دورهٔ تناوب (T) می‌باشند مشخص می‌کنیم:

$$\Delta t_1=\frac{1}{30}s\Rightarrow\frac{\Delta t_1}{T}=\frac{\frac{1}{30}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{6}\Rightarrow\Delta t_1=\frac{T}{6}$$

$$\Delta t_2=\frac{1}{20}s\Rightarrow\frac{\Delta t_2}{T}=\frac{\frac{1}{20}}{\frac{1}{5}}=\frac{1}{4}\Rightarrow\Delta t_2=\frac{T}{4}$$

گام سوم:

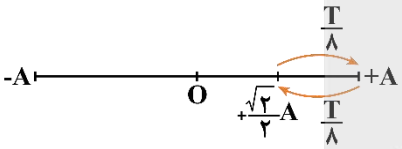
بیش‌ترین تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $\frac{T}{6}$ را باید به‌صورت متقارن (دو بازهٔ $\frac{T}{12}$) در طرفین نقطهٔ وسط (مرکز نوسان) درنظر بگیریم:



$$\left.\begin{matrix}L=A=10cm=0/1m\\ \Delta t_1=\frac{T}{6}=\frac{1}{30}s\end{matrix}\right\}\Rightarrow s_{av_1}=\frac{L}{\Delta t_1}=\frac{0/1}{\frac{1}{30}}=3\frac{m}{s}\qquad (I)$$

گام چهارم:

کم‌ترین تندی متوسط نوسانگر در بازهٔ زمانی $\frac{T}{4}$ را باید به‌صورت متقارن (دو تا $\frac{T}{8}$) در موقع رفت‌وبرگشت به یکی از نقاط بازگشت درنظر گرفت.



$$L=2(A-\frac{\sqrt{2}}{2}A)=A(2-\sqrt{2})\xrightarrow{A=0/1m}L=0/1(2-\sqrt{2})\,m$$

$$\left.\begin{matrix}L=0/1(2-\sqrt{2})m\\ \Delta t_2=\frac{T}{4}=\frac{1}{20}s\end{matrix}\right\}\Rightarrow s_{av_2}=\frac{L}{\Delta t_2}=\frac{0/1(2-\sqrt{2})}{\frac{1}{20}}=2(2-\sqrt{2})=(4-2\sqrt{2})\frac{m}{s}\qquad (II)$$

گام آخر:

اختلاف بیش‌ترین و کم‌ترین تندی متوسط در بازه‌های خواسته‌شده را به‌دست می‌آوریم:

$$s_{av_1}-s_{av_2}=3-(4-2\sqrt{2})=(2\sqrt{2}-1)\frac{m}{s}$$

نکتهٔ ۱

اگر در مدت‌زمان معیّن Δt، بخواهیم نوسانگر حداکثر مسافت طی‌شده را داشته باشد باید دو بازهٔ زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ را به‌صورت متقارن در طرفین مرکز نوسان درنظر بگیریم.

نکتهٔ ۲

اگر در مدت‌زمان معیّن Δt، بخواهیم نوسانگر حداقل مسافت طی‌شده را داشته باشد باید دو بازهٔ زمانی $\frac{\Delta t}{2}$ را به‌صورت متقارن در موقع رفت‌وبرگشت به یکی از نقاط بازگشتی درنظر بگیریم.

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۳

۵۴- معادلهٔ حرکت هماهنگ سادهٔ نوسانگری در SI به‌صورت $x=0/02\cos 6\pi t$ است. بیش‌ترین سرعت متوسط نوسانگر در مدت $0/5\,s$ چند سانتی‌متر بر ثانیه است؟

۱) ۲ ۲) ۸ ۳) $2\sqrt{2}$ ۴) $4\sqrt{2}$

پاسخ تشریحی:

$$x=0/02\cos 6\pi t\Rightarrow\omega=6\pi\frac{rad}{s}\ \text{و}\ A=0/02m=2cm$$

$$\omega=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow 6\pi=\frac{2\pi}{T}\Rightarrow T=\frac{1}{3}s$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

ابتدا محاسبه می‌کنیم زمان موردنظر چه مضربی از دوره است:

$$\frac{\Delta t}{T}=\frac{۰/۵}{\frac{۱}{۳}}=۱/۵\Rightarrow \Delta t=۱/۵T$$

Δt ثابت است، پس بیش‌ترین سرعت متوسط زمانی رخ می‌دهد که جابه‌جایی حداکثر شود:

$$\uparrow v_{av}=\frac{\Delta x\uparrow}{\Delta t\xrightarrow{\text{ثابت}}}$$

بازهٔ زمانی موردنظر $\Delta t=۱/۵T$ است چون در مدت یک دوره دوباره به مکان اول باز می‌گردیم و جابه‌جایی در مدت یک دوره صفر است، پس ما باید حداکثر جابه‌جایی را در $۰/۵T$ به‌دست آوریم، و در این مدت حداکثر جابه‌جایی زمانی است که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ بازگشت طی شود.

$$\Delta x=۲A=۲\times ۲=۴cm$$

$$v_{av}=\frac{\Delta x}{\Delta t}=\frac{۴cm}{۰/۵s}=۸\frac{cm}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۲

گروه آموزشی ماز

۷۱- جرم خودرویی همراه با سرنشینان آن ۱۶۰۰kg است. این خودرو روی چهار فنر که ثابت هرکدام $۱۰^۵\frac{N}{m}$ می‌باشد، سوار شده است. بسامد ارتعاش خودرو وقتی از چاله‌ای می‌گذرد، چند هرتز است؟ (فرض کنید وزن خودرو به‌طور یکنواخت روی فنرهای چهارچرخ توزیع شده است و $\pi=\sqrt{۱۰}$)

۱) ۱/۲۵ ۲) ۰/۴ ۳) ۲/۵ ۴) ۵

پاسخ: گزینهٔ ۳ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

جرم خودرو به‌طور یکسان بر روی ۴ فنر تقسیم شده است؛ بنابراین جرم روی هر فنر $\frac{۱۶۰۰}{۴}=۴۰۰kg$ است و با توجه به رابطهٔ زیر، می‌توان نوشت:

$$T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}=۲\pi\sqrt{\frac{۴۰۰}{۱۰^۵}}=۲\pi\sqrt{\frac{۴}{۱۰^۳}}=۲\pi\times\frac{۲}{۱۰\sqrt{۱۰}}=\frac{۴}{۱۰}s$$

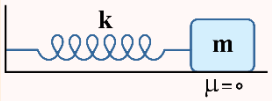
$$f=\frac{۱}{T}=\frac{۱}{\frac{۴}{۱۰}}=\frac{۱۰}{۴}=۲/۵Hz$$

دام تستی

اگر حواستون نباشه که برای هر فنر، $\frac{۱}{۴}$ برابر جرم کل رو درنظر بگیرین، در دام گزینهٔ (۱) گرفتار می‌شوید.

نوسان هماهنگ سادهٔ سامانهٔ جرم ـ فنر

۱- بسامد زاویه‌ای نوسان برابر است با:



$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۲- دورهٔ تناوب و بسامد نوسان برابر است با:

$$T=\frac{۲\pi}{\omega}\rightarrow T=۲\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

$$f=\frac{۱}{T}\rightarrow f=\frac{۱}{۲\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}$$

۳- برای مقایسهٔ دوره و بسامد دو نوسانگر می‌توان نوشت:

$$\frac{T_۲}{T_۱}=\sqrt{\frac{m_۲}{m_۱}\times\frac{k_۱}{k_۲}}\qquad \frac{f_۲}{f_۱}=\sqrt{\frac{m_۱}{m_۲}\times\frac{k_۲}{k_۱}}$$

مشاوره

به قول آقای دکتر فرهمندنیا، و علیکم بالمتن الکتاب الدرسی! چون این سؤال دقیقاً از مسائل آخر فصل طرح شده و به‌قدری مهمه که هم برای امتحان نهایی و هم برای کنکور، حسابی حواست بهش باشه.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۷۲- وزنه‌ای به جرم ۹۰۰ گرم به انتهای فنری با ثابت $۴/۵\frac{N}{cm}$ بسته شده است و روی سطح افقی بدون اصطکاک به نوسان درمی‌آید. اگر بیش‌ترین و کم‌ترین طول فنر به‌ترتیب ۶۰cm و ۴۰cm باشد، بیشینهٔ تندی نوسانگر چند متر بر ثانیه است؟

۱) ۱ ۲) $\sqrt{۵}$ ۳) ۲ ۴) $\sqrt{۱۰}$

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

نکته

در نوسان هماهنگ ساده اگر بیشینه و کمینهٔ طول فنر به‌ترتیب برابر با L_{max} و L_{min} باشد داریم:

$$\begin{cases} L_{\circ} = \frac{L_{max}+L_{min}}{۲} \\ A = \frac{L_{max}-L_{min}}{۲} \end{cases}$$

گام اول:

با استفاده از طول max و min داده‌شده برای فنر می‌توانیم دامنهٔ نوسان (A) و طول عادی فنر $(L_{\circ})$ را به‌دست بیاوریم:

$$A = \frac{L_{max}-L_{min}}{۲} = \frac{۶۰-۴۰}{۲} = ۱۰cm = ۰/۱m$$

$$L_{\circ} = \frac{L_{max}+L_{min}}{۲} = \frac{۶۰+۴۰}{۲} = ۵۰cm = ۰/۵m$$

توجه کنید که هنگامی‌که فنر طول عادی $(L_{\circ})$ خود را دارد، نوسانگر در مرکز نوسان است.

گام دوم:

با استفاده از رابطهٔ $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ می‌توان نوشت:

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow \xrightarrow[m=۹۰۰g=۰/۹kg]{k=۴/۵\frac{N}{cm}=۴۵۰\frac{N}{m}} \omega = \sqrt{\frac{۴۵۰}{۰/۹}} = ۱۰\sqrt{۵}\frac{rad}{s}$$

گام آخر:

تندی بیشینهٔ نوسانگر برابر است با:

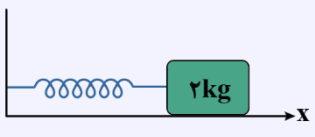
$$v_{max} = A\omega = ۰/۱\times ۱۰\sqrt{۵} = \sqrt{۵}\frac{m}{s}$$

مشاوره

استفاده از طول بیشینه و طول کمینهٔ فنر برای محاسبهٔ طول عادی فنر و دامنهٔ نوسان در کنکورهای اخیر موردتوجه قرار گرفت و بعید نیست که حالا حالاها این نکته موردتوجه طراح کنکور بموند.

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۴۰۲

۶۰- مطابق شکل، وزنه‌ای به جرم ۲kg به فنری که ثابت آن $۲۰۰\frac{N}{m}$ است بسته شده و روی سطح افقی بدون اصطکاک، حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر کم‌ترین و بیش‌ترین طول فنر در حین نوسان به‌ترتیب ۴۰cm و ۵۰cm باشد، در لحظه‌ای که شتاب نوسانگر $\vec{a} = \left(۲\frac{m}{s^۲}\right)\vec{i}$ است، طول فنر چند سانتی‌متر است؟

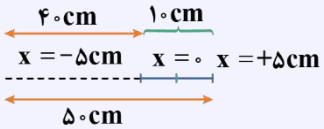


۱) ۴۲ ۲) ۴۳
۳) ۴۷ ۴) ۴۸

پاسخ تشریحی:

با توجه به کم‌ترین و بیش‌ترین طول فنر، طول پاره‌خط نوسان و دامنهٔ (A) را به‌دست می‌آوریم:

طول پاره‌خط نوسان = ۱۰cm → A = ۵cm



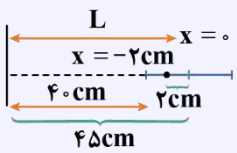
حال با داشتن شتاب نوسانگر، مکان نوسانگر را به‌دست می‌آوریم:

$$a = -\omega^۲x \xrightarrow{\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\Rightarrow\omega^۲=\frac{k}{m}} a = -\frac{k}{m}x \xrightarrow[k=۲۰۰\frac{N}{m},m=۲kg]{a=۲\frac{m}{s^۲}} ۲ = \left(-\frac{۲۰۰}{۲}\right)x \Rightarrow x = -۰/۰۲m = -۲cm$$

۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

WWW.ArefOnline.ir

درنهایت با داشتن مکان نوسانگر، طول فنر را به‌دست می‌آوریم:

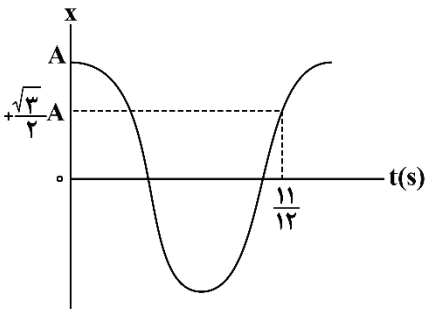


$L = ۴۵ - ۲ = ۴۳cm$

پاسخ: گزینهٔ ۲

گروه آموزشی ماز

۷۳- نمودار مکان ـ زمان آونگ ساده‌ای که به‌صورت هماهنگ ساده نوسان می‌کند به‌صورت زیر است. اگر طول آونگ ۱۲/۵cm کاهش یابد، دورهٔ تناوب آن چند برابر می‌شود؟ $(\pi^۲ = g)$



۱) $\frac{۱}{۲}$

۲) $\frac{\sqrt{۲}}{۲}$

۳) $\sqrt{۲}$

۴) ۲

پاسخ: گزینهٔ ۲ (متوسط ـ نموداری ـ ۱۴۰۳)

نکته

۱- دورهٔ تناوب یک آونگ ساده از رابطهٔ $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$ به‌دست می‌آید. در این رابطه، L طول آونگ و g شتاب گرانش است.

۲- در ساعت آونگ‌دار، هرگاه از عقب یا جلو افتادن ساعت صحبت شد، باید دورهٔ آونگ را مدنظر گرفته و به‌صورت زیر با آن برخورد کنیم:

الف) اگر دوره افزایش یابد ← ساعت عقب می‌افتد.

ب) اگر دوره کاهش یابد ← ساعت جلو می‌افتد.

گام اول:

با استفاده از نمودار مکان ـ زمان داده‌شده و معادلهٔ مکان ـ زمان حرکت هماهنگ ساده که به‌صورت $x = A\cos(\omega t)$ می‌باشد، می‌توان نوشت:

$$(\omega = \frac{۲\pi}{T})$$

$$\left.\begin{matrix} t = \frac{۱۱}{۱۲}s \\ x = +\frac{\sqrt{۳}}{۲}A \end{matrix}\right\} \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲}A = A\cos(\frac{۲\pi}{T}\times\frac{۱۱}{۱۲}) \Rightarrow \frac{\sqrt{۳}}{۲} = \cos(\frac{۱۱\pi}{۶T}) \Rightarrow \frac{۱۱\pi}{۶T} = \begin{cases} \frac{\pi}{۶} \times \\ \frac{۱۱\pi}{۶} \checkmark \end{cases}$$

دومین بار، مکان $\frac{\sqrt{۳}}{۲}A$ شده است.

$$\Rightarrow \frac{۱۱\pi}{۶T} = \frac{۱۱\pi}{۶} \Rightarrow T = ۱s \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{T} \Rightarrow \omega = \frac{۲\pi}{۱} = ۲\pi(\frac{rad}{s})$$

گام دوم:

با استفاده از رابطهٔ $\omega = \sqrt{\frac{g}{L}}$ می‌توان طول آونگ را به‌دست آورد:

$$\left.\begin{matrix} \omega = \sqrt{\frac{g}{L}} \\ \omega = ۲\pi \end{matrix}\right\} \xrightarrow{g=\pi^۲} ۲\pi = \sqrt{\frac{\pi^۲}{L}} \Rightarrow ۴ = \frac{۱}{L} \Rightarrow L = \frac{۱}{۴}m = ۲۵cm$$

گام آخر:

با کاهش طول آونگ به‌اندازهٔ ۱۲/۵cm طول آن نصف می‌شود. پس طبق رابطهٔ $T = ۲\pi\sqrt{\frac{L}{g}}$، داریم:

$$\frac{T_۲}{T_۱} = \sqrt{\frac{L_۲}{L_۱}} = \sqrt{\frac{۲۵-۱۲/۵}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱۲/۵}{۲۵}} = \sqrt{\frac{۱}{۲}} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
www.biomaze.ir

WWW.ArefOnline.ir

ترفند

برای محاسبهٔ دورهٔ تناوب اولیه می‌تونیم این‌طور هم عمل کنیم:

$$\frac{۳T}{۴}+\frac{T}{۸}=\frac{۱۱}{۱۲}\Rightarrow\frac{۱۱T}{۱۲}=\frac{۱۱}{۱۲}\Rightarrow T=۱s$$

مشاوره

برای این‌که بتوانید به این تیپ تست‌ها پاسخ بدهید، باید به کمک معادلهٔ مکان ـ زمان و زمان داده‌شده، دورهٔ تناوب و بالطبع طول اولیهٔ آونگ رو به‌دست بیارین و سپس با تغییر طول آونگ، نسبت دوره‌ها رو حساب کنین. البته اگر زمان‌های مشهور رو حفظ باشین می‌تونین دورهٔ تناوب اولیه رو سریع‌تر هم حساب کنین.

کنکور سراسری تجربی تیرماه ۱۴۰۲

۵۵- آونگ ساده‌ای در مدت ۳۶ ثانیه، ۲۰ نوسان انجام می‌دهد. اگر طول آونگ $۱۷cm$ کاهش یابد، در مدت ۴۰ ثانیه چند نوسان انجام می‌دهد؟ ($g=\pi^۲$)

۱) ۲۵ ۲) ۲۸ ۳) ۳۰ ۴) ۳۲

پاسخ تشریحی:

طول اولیهٔ آونگ برابر است با:

$$T_۱=۲\pi\sqrt{\frac{L_۱}{g}}\Rightarrow\frac{۳۶}{۲۰}=۲\pi\sqrt{\frac{L_۱}{\pi^۲}}\Rightarrow ۱/۸=۲\sqrt{L_۱}\Rightarrow L_۱=۰/۸۱m$$

با کم کردن $۱۷cm$ از طول آونگ، طول آن به $L_۲=۰/۶۴m$ می‌رسد و دورهٔ آن برابر می‌شود با:

$$T_۲=۲\pi\sqrt{\frac{L_۲}{g}}=۲\pi\sqrt{\frac{۰/۶۴}{\pi^۲}}=۱/۶s$$

بنابراین تعداد نوسان‌ها در مدت $۴۰s$ برابر است با:

$$\xrightarrow{T=\frac{t}{n}}\frac{۴۰}{n}=۱/۶\Rightarrow n=۲۵$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

گروه آموزشی ماز

۷۴- نوسانگری به جرم ۲۰۰ گرم بر روی پاره‌خطی به طول $۱۰cm$ حرکت هماهنگ ساده انجام می‌دهد. اگر بسامد نوسانگر برابر $۵Hz$ باشد، بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر چند میلی‌ژول است؟ ($\pi=۳$)

۱) ۴۵ ۲) ۴۵۰ ۳) ۲۲/۵ ۴) ۲۲۵

پاسخ: گزینهٔ ۴ (آسان ـ محاسباتی ـ ۱۲۰۳)

طول پاره‌خط نوسان برابر $۱۰cm$ است؛ بنابراین دامنهٔ نوسانگر برابر $A=\frac{۱۰}{۲}=۵cm$ است، از طرفی می‌دانیم بیشینهٔ انرژی جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است؛ بنابراین می‌توان نوشت:

$$\omega=۲\pi f\Rightarrow\omega=۲\times۳\times۵=۳۰\frac{rad}{s}$$

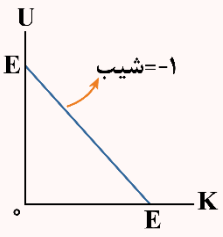
$$K_{max}=E=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲=\frac{۱}{۲}\times۰/۲\times(۵\times۱۰^{-۲})^۲\times۳۰^۲=۲۲۵\times۱۰^{-۳}J=۲۲۵mJ$$

انرژی در حرکت هماهنگ ساده

یک نوسانگر وزنه ـ فنر را درنظر بگیرید. این دستگاه دارای انرژی پتانسیل کشسانی (U) و انرژی جنبشی (K) است. در مورد انرژی نوسانگر به نکات زیر توجه کنید.

۱- مجموع انرژی پتانسیل و جنبشی نوسانگر برابر انرژی مکانیکی آن است که مقدار ثابتی است:

$$U+K=\overset{ثابت}{E}$$

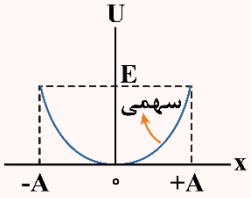


۲- انرژی پتانسیل کشسانی ذخیره‌شده در فنر برابر است با:

$$U=\frac{۱}{۲}kx^۲\xrightarrow{k=m\omega^۲}U=\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

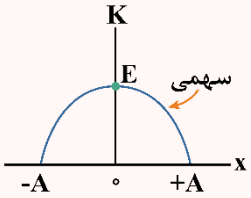
البته توجه داشته باشید که رابطهٔ $U=\frac{۱}{۲}kx^۲$ از کتاب درسی حذف شده است و طرح سؤال مستقیم از آن در کنکور مجاز نمی‌باشد، اینجا برای این‌که موضوع را بهتر متوجه شوید از این رابطه استفاده کرده‌ایم.



۳- بیشینهٔ انرژی پتانسیل کشسانی همان انرژی مکانیکی نوسانگر است.

$$E=U_{max}=\frac{۱}{۲}kA^۲=\frac{۱}{۲}m\omega^۲A^۲=۲\pi^۲A^۲f^۲m$$

۴- اگر انرژی پتانسیل را از انرژی مکانیکی کم کنیم، انرژی جنبشی نوسانگر به‌دست می‌آید:



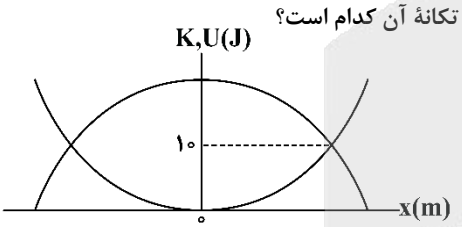
$$\begin{cases}K=E-U\\U=\frac{۱}{۲}kx^۲\end{cases}\rightarrow K=E-\frac{۱}{۲}kx^۲=E-\frac{۱}{۲}m\omega^۲x^۲$$

البته اگر سرعت نوسانگر را بدانیم، می‌توانیم از رابطهٔ $K=\frac{۱}{۲}mv^۲$ هم برای محاسبهٔ انرژی جنبشی کمک بگیریم.

۵- هنگامی‌که متحرک در $x=۰$ (مرکز نوسان) است، همهٔ انرژی به‌صورت جنبشی است. هنگامی‌که متحرک در $x=\pm A$ (نقاط بازگشتی) قرار دارد، همهٔ انرژی به‌صورت انرژی پتانسیل کشسانی است. هنگامی‌که متحرک در مکان $x=\pm\frac{\sqrt{۲}}{۲}A$ است، انرژی‌های جنبشی و پتانسیل برابرند و هریک نصف انرژی مکانیکی هستند.

گروه آموزشی ماز

۷۵- نمودار انرژی‌های جنبشی (K) و پتانسیل کشسانی (U) یک نوسانگر هماهنگ ساده برحسب مکان آن مطابق شکل زیر است. اگر مسافت طی‌شدهٔ نوسانگر در هر دورهٔ نوسان ۴۰cm باشد، نیروی خالص وارد بر نوسانگر در لحظهٔ تغییر جهت بردار تکانهٔ آن کدام است؟



۱) ۸۰۰
۲) ۲۰۰
۳) ۴۰۰
۴) ۱۶۰۰

پاسخ: گزینهٔ ۳ (سخت ـ نموداری ـ ۱۲۰۳)

گام اول:

می‌دانیم نوسانگر در هر دورهٔ نوسان (T)، مسافت ۴A را طی می‌کند. پس می‌توان نوشت:

$$L=۴A\xrightarrow{L=۴۰cm}۴۰=۴A\Rightarrow A=۱۰cm=۰/۱m$$

گام دوم:

با استفاده از نمودار داده‌شده متوجه می‌شویم که در محل تقاطع دو نمودار $K=U=۱۰J$ می‌باشد و همچنین می‌دانیم که $E=K_{max}$، پس:

$$\left.\begin{aligned}E&=K+U=۲۰J\\E&=K_{max}=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲\end{aligned}\right\}\Rightarrow ۲۰=\frac{۱}{۲}mA^۲\omega^۲\Rightarrow mA^۲\omega^۲=۴۰$$

گام آخر:

نیروی وارد بر نوسانگر در لحظهٔ تغییر جهت بردار تکانه، همان $F_{max}=mA\omega^۲$ می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\left.\begin{aligned}mA^۲\omega^۲&=۴۰\\A&=۰/۱\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{mA^۲\omega^۲}{A}=\frac{۴۰}{۰/۱}\Rightarrow mA\omega^۲=۴۰۰\xrightarrow{F_{max}=mA\omega^۲}F_{max}=۴۰۰N$$

مشاوره

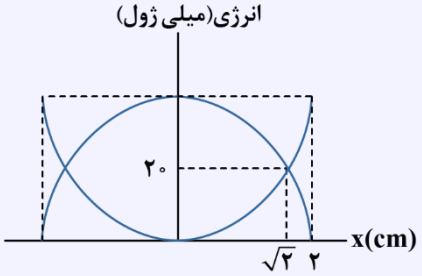
این تست خیلی جامع طرح شده و اومدیم چندین مورد مهم از بحث نوسان رو باهم ترکیب کردیم. اگر نتونستی این تست رو بزنی، خیلی واجبه که به کمک پاسخ‌نامه بری دقیقاً نگاه کنی که توی کدوم بخش مشکل داری و سعی کنی اون بخش رو حسابی تمرین کنی. راستی این تست برای کنکور خیلی شانس طرح شدن داره!

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴

WWW.ArefOnline.ir

کنکور سراسری تجربی خارج از کشور تیرماه ۱۳۹۹

۵۴- شکل زیر، نمودار تغییرات انرژی جنبشی و پتانسیل سامانهٔ جرم - فنری را برحسب مکان نشان می‌دهد. اگر حداقل زمانی که طول می‌کشد که انرژی جنبشی نوسانگر از صفر به $۴۰mJ$ برسد برابر $۰/۰۵s$ باشد، بزرگی سرعت نوسانگر در لحظهٔ عبور از مکان $x=۰$ چند متر بر ثانیه است؟



۱) $\frac{\pi}{۵}$

۲) $\frac{\pi}{۱۰}$

۳) ۲π

۴) ۱۰π

پاسخ تشریحی:

با توجه به نمودار داده‌شدهٔ سؤال:

$$K_{max}=۲\times۲۰=۴۰mJ$$

درنتیجه حداقل زمانی که انرژی جنبشی از صفر به $۴۰mJ$ می‌رسد، یعنی نوسانگر از نقطهٔ بازگشت به مکان تعادل خواهد رسید و مدت‌زمان سپری‌شده برابر خواهد بود با $\frac{T}{۴}$:

$$\frac{T}{۴}=۰/۰۵\rightarrow T=۰/۲s$$

بزرگی سرعت نوسانگر در مکان تعادل، بیشینهٔ سرعت است:

$$|v_{max}|=A\omega=A\left(\frac{۲\pi}{T}\right)=۲\times۱۰^{-۲}\times\frac{۲\pi}{۰/۲}=\frac{\pi}{۵}\frac{m}{s}$$

پاسخ: گزینهٔ ۱

گروه آموزشی ماز

شیمی

یکی از مطابقت‌های آزمون سال گذشته ماز با کنکور ۱۴۰۳

۸۴- بر اثر سوختن اوره، گازهای کربن دی‌اکسید و نیتروژن به همراه بخار آب تولید می‌شود. ضریب آب در معادله موازنه شده سوختن اوره، با ضریب این ماده در معادله موازنه شده کدام‌یک از واکنش‌های زیر برابر است؟

۱) $PH_3 + O_2 \rightarrow P_4O_{10} + H_2O$

۲) $CH_4 + NH_3 + O_2 \rightarrow HCN + H_2O$

۳) $H_2SO_4 + HI \rightarrow H_2S + H_2O + I_2$

۴) $H_2S + O_2 \rightarrow SO_2 + H_2O$

(مرحله ۴ آزمون‌های سالیانه ـ شیمی رشته ریاضی)

۸۱- مجموع ضرایب استوکیومتری مواد در واکنش زیر، پس از موازنهٔ معادلهٔ آن، کدام است؟

$$CH_4(g) + NH_3(g) + O_2(g) \rightarrow HCN(g) + H_2O(g)$$

۱) ۱۲ ۲) ۱۳ ۳) ۱۴ ۴) ۱۵

(کنکور اردیبهشت ۱۴۰۳ـ شیمی رشته ریاضی)

برای مشاهدهٔ
همهٔ مطابقت‌ها
اینجا رو اسکن کن!

biomaze.ir

یا رو این کلیک کن!

WWW.ArefOnline.ir

دانش‌آموزان عزیز ماز
خب این هم از آزمون جمع‌بندی نیمسال اول شیمی دوازدهم! در این آزمون، مطالب مربوط به یک فصل مسئله‌محور (فصل یک شیمی دوازدهم) و یک فصل کاملاً مفهومی (فصل دو شیمی دوازدهم) براتون مرور شد و امیدوارم که نتیجه خیلی خوبی ازش گرفته باشید. اگه احیاناً در قسمت کوچکی از مطالب این دو فصل اشکال دارید و به این اشکالات در این آزمون پی بردید، حتماً یک لیست از اون‌ها تهیه کنید تا سر فرصت مناسب (مثلاً ایام طلایی نوروز) بتونید این اشکالات رو رفع کنید.
و اما آزمون بعد! در آزمون بعد، باید مطالب شیمی دهم رو مرور و جمع‌بندی کنید و این یعنی حدود ۳۰٪ از مطالبی که در کنکور میاد! از بین این سه فصل، قطعاً فصل‌های دوم و سوم اهمیت بیشتری دارن و اغلب تعداد سؤالات بیشتری از اون‌ها توی کنکور مطرح میشه، پس این دو فصل رو بیشتر بخونید! سعی کنید از همه قسمت‌های فصل ۱، ۲ و ۳ شیمی دهم تست مروری بزنید تا در نهایت در این آزمون هم درصد خیلی خوبی رو به‌دست بیارید.
دکتر فرشاد هادیان‌فرد ـ رتبهٔ ۲۸ کنکور ۹۴ و مسئول درس شیمی آزمون ماز

۷۶- کدام مطلب زیر درست است؟

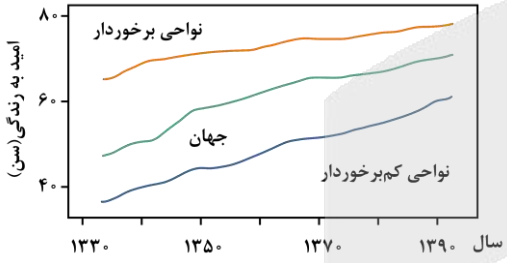
۱) میانگین جهانی شاخص امید به زندگی، بیشتر از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.
۲) صابون مایع را از گرم کردن مخلوط روغن‌های مایع مثل روغن زیتون با سدیم هیدروکسید تهیه می‌کنند.
۳) اگر ظروف چرب را به خاکستر آغشته کرده و با آب گرم شست‌وشو بدهیم، چربی‌ها آسان‌تر تمیز می‌شوند.
۴) اتیلن گلیکول، الکلی است که به عنوان ضدیخ کاربرد داشته و در هر مولکول آن، ۷ پیوند اشتراکی وجود دارد.

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ صابون ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۲۰۱)

خاکستر حاوی برخی از **مواد قلیایی** و **اکسیدهای فلزی** بوده و در واکنش با چربی‌ها، این مواد را به ترکیب‌های محلول در آب تبدیل می‌کند. بر این اساس، اگر ظرف‌های چرب را به خاکستر آغشته کرده و سپس با **آب گرم** شست‌وشو بدهیم، این ظروف آسان‌تر تمیز می‌شوند. نیاکان ما از این روش برای پاک‌کردن راحت‌تر چربی‌ها از ظروف استفاده می‌کردند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ نمودار مقابل، روند تغییر شاخص امید به زندگی در مناطق مختلف جهان را نشان می‌دهد: با توجه به داده‌های موجود در این نمودار، میانگین جهانی شاخص امید به زندگی حدودا برابر با ۶۵ سال است؛ درحالی که شاخص امید به زندگی در مناطق برخوردار جهان بیشتر از ۷۵ سال است. بر این اساس، می‌توان گفت در حال حاضر میانگین جهانی شاخص امید به زندگی **کمتر** از مقدار این شاخص در نواحی برخوردار جهان است.

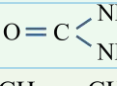


شاخص امید به زندگی
میزان شاخص امید به زندگی به عوامل مختلفی بستگی داشته و به همین خاطر، مقدار آن در کشورهای گوناگون و حتی در شهرهای گوناگون یک کشور نیز با هم تفاوت دارد. در طول ۶۰ سال اخیر، میزان امید به زندگی هم برای مناطق برخوردار جهان و هم برای مناطق کم‌برخوردار جهان **افزایش** پیدا کرده است. هر چند که میزان این افزایش برای مناطق کم‌برخوردار، بیشتر از مناطق برخوردار بوده است، اما هنوز هم میزان امید به زندگی در نواحی برخوردار جهان در حدود ۲۰ سال بیشتر از مناطق کم‌برخوردار است.

۲ حالت فیزیکی صابون‌ها، ربطی به حالت فیزیکی مواد مصرف شده برای تولید آن‌ها نداشته و وابسته به نوع کاتیون موجود در ساختار آن‌ها است. در واقع، **صابون جامد** را از گرم کردن مخلوط روغن‌های گوناگون(استرهای سنگینی که حالت مایع دارند) یا چربی‌ها(استرهای سنگینی که حالت جامد دارند) مانند روغن زیتون، نارگیل و پیه با **سدیم هیدروکسید** تهیه می‌کنند. **صابون‌های مایع نیز نمک پتاسیم یا آمونیوم اسیدهای چرب هستند.**

بیماری وبا
بیماری وبا که یک بیماری واگیردار است، به دلیل آلوده‌شدن آب‌ها و نبودن بهداشت در جامعه، بارها در جهان همه‌گیر شده و جان میلیون‌ها انسان را گرفته است. در طول زمان، استفاده از صابون و توجه به نظافت و بهداشت در جامعه گسترش یافت و سبب شد تا مقدار آلودگی‌ها، میکروب‌ها و عوامل بیماری‌زا در محیط‌های فردی و همگانی کاهش یافته و سطح بهداشت جامعه افزایش پیدا کند. بر این اساس، می‌توان گفت احتمال بروز وبا در طول زمان کاهش یافته است. البته، توجه داریم که این بیماری هنوز هم می‌تواند برای هر جامعه‌ای تهدیدکننده باشد. ساده‌ترین و مؤثرترین راه پیشگیری از این بیماری، **رعایت بهداشت فردی** و **همگانی** است.

۴ اتیلن گلیکول، یک الکل دوعاملی است که به عنوان **ضدیخ** کاربرد دارد. در هر مولکول از این ماده، **۹ پیوند اشتراکی** بین اتم‌ها برقرار شده است. جدول زیر، اطلاعات مربوط به اوره، بنزین و اتیلن گلیکول را نشان می‌دهد:

نام ماده	فرمول شیمیایی	ساختار	نوع ماده	حلال مناسب
بنزین	C_8H_{18}		مولکول ناقطبی	حلال ناقطبی (هگزان)
اوره	$CO(NH_2)_2$		مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)
اتیلن گلیکول	CH_2OHCH_2OH	$HO-CH_2-CH_2-OH$	مولکول قطبی	حلال قطبی (آب)

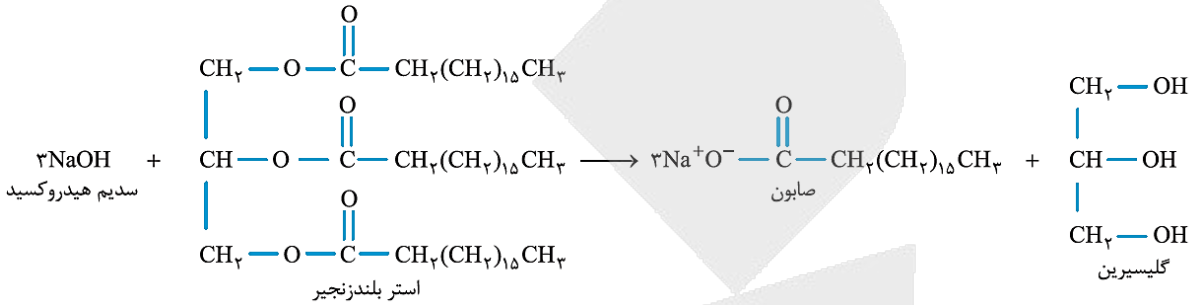
۷۷- تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرف شده در فرایند تولید ۰/۱ مول پاک‌کننده صابونی جامد با استفاده از یک اسید چرب، برابر با ۲۰/۲ گرم است. اگر همه پیوندهای کربن-کربن موجود در این پاک‌کننده یگانه باشند، شمار اتم‌های کربن موجود در هر مول از این پاک‌کننده کدام است؟ ($H = ۱ : g.mol^{-۱}$ و $C = ۱۲$ و $O = ۱۶$ و $Na = ۲۳$)

معادله واکنش : اسید چرب + محلول سدیم هیدروکسید → پاک‌کننده صابونی + آب

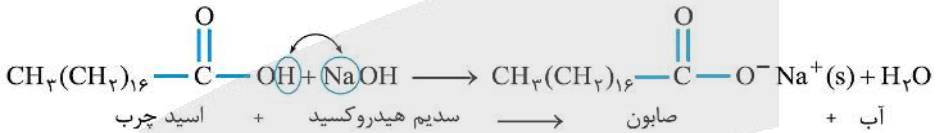
۱) $۳/۰۱ \times ۱۰^{۲۴}$ ۲) $۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۴}$ ۳) $۱/۲۰۴ \times ۱۰^{۲۴}$ ۴) $۹/۰۳ \times ۱۰^{۲۴}$

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ صابون ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

صابون‌ها یا طی واکنش اسیدهای چرب و یا استرهای سنگین با سدیم هیدروکسید تولید می‌شوند. معادله واکنش تولید این مواد با استفاده از استرهای سنگین سه‌عاملی(چربی‌ها و روغن‌ها) به‌صورت زیر است:



معادله واکنش تولید صابون‌ها با استفاده از اسیدهای چرب نیز به‌صورت زیر است:



همانطور که مشخص است، این پاک‌کننده صابونی طی واکنش اسیدهای چرب با سدیم هیدروکسید تولید شده است. معادله نمادی واکنش تولید یک پاک‌کننده صابونی جامد با زنجیره کربنی کاملا سیرشده با فرمول شیمیایی $C_nH_{۲n-۱}O_۲Na$ از اثر میان سدیم هیدروکسید($NaOH$) و یک اسید چرب کاملا سیرشده($C_nH_{۲n}O_۲$) به‌صورت زیر است:

$$C_nH_{۲n}O_۲ + NaOH \rightarrow C_nH_{۲n-۱}O_۲Na + H_۲O$$

با توجه به معادله مورد نظر، به ازای تولید ۱ مول پاک‌کننده صابونی، یک مول سدیم هیدروکسید(معادل با ۴۰ گرم سدیم هیدروکسید) و یک مول اسید چرب(معادل با $۱۴n + ۳۲$ گرم اسید چرب) مصرف می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$\text{تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌ها} = \text{جرم اسید چرب} - \text{جرم سدیم هیدروکسید} = (۱۴n + ۳۲) - (۴۰) = ۱۴n - ۸$$

پس می‌توان گفت به ازای تولید ۱ مول پاک‌کننده صابونی در این واکنش، تفاوت جرم واکنش‌دهنده‌های مصرف شده برابر با $۱۴n - ۸$ گرم خواهد بود. بر این اساس، به کمک اطلاعات داده شده در صورت سوال، مقدار n را محاسبه می‌کنیم.

$$\text{تفاوت جرم } ۲۰/۲\ g = \text{پاک‌کننده صابونی } ۰/۱\ mol \times \frac{\text{تفاوت جرم } ۱۴n - ۸\ g}{\text{پاک‌کننده صابونی } ۱\ mol} \Longrightarrow ۱۰۱ = ۷n - ۴ \Longrightarrow n = ۱۵$$

با توجه به مقدار n، هر مول از این پاک‌کننده صابونی شامل ۱۵ مول اتم کربن می‌شود؛ پس داریم:

$$\text{اتم } C = ۱\ mol \text{ پاک‌کننده صابونی} \times \frac{۱۵\ mol\ C}{۱\ mol \text{ پاک‌کننده صابونی}} \times \frac{\text{اتم } ۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}}{۱\ mol\ C} = \text{اتم } ۹/۰۳ \times ۱۰^{۲۴} \quad ?$$

گروه آموزشی ماز

۷۸- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار را می‌توان به کمک صابون‌ها پاک کرد.
۲) در ساختار بخش قطبی اسیدهای چرب، همانند استرهای سنگین، پیوند دوگانه کربن-اکسیژن یافت می‌شود.
۳) شربت معده، نمونه‌ای از مخلوط‌های ناپایدار بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن مشخص است.
۴) با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، بخش قطبی ذرات صابون در کنار هم قرار می‌گیرد.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ صابون ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

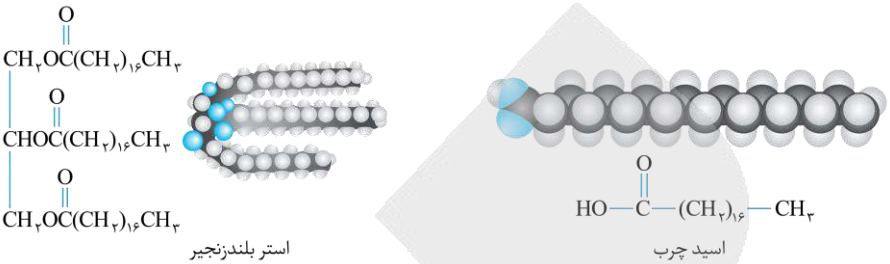
رسوب تشکیل شده بر روی دیواره کتری، لوله‌ها، آب‌راه‌ها و دیگ‌های بخار، آن چنان به این سطوح می‌چسبند که با صابون و پاک‌کننده‌های غیرصابونی **زدوده نمی‌شوند**. برای زدودن این رسوب‌ها، به پاک‌کننده‌هایی نیاز است که بتوانند با آن‌ها **واکنش شیمیایی** داده و آن‌ها را به فراورده‌هایی تبدیل کنند که با آب

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

شسته شوند. موادی مانند هیدروکلریک اسید(جوهر نمک)، سدیم هیدروکسید(محلول سود) و سفیدکننده‌ها از جمله این پاک‌کننده‌ها هستند. به این مواد، **پاک‌کننده خورنده** گفته می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ **چربی‌ها**، مخلوطی از **اسیدهای چرب** (کربوکسیلیک اسیدهایی با زنجیر بلند کربنی و جرم مولکولی زیاد) و **استرهای بلندزنجیر** (استرهایی با جرم مولی زیاد) هستند. تصویر زیر، ساختار مولکولی انواع چربی‌ها را نشان می‌دهد:



بخش قطبی مولکول چربی‌ها، دارای تعدادی اتم اکسیژن در ساختار خود است. همانطور که مشخص است، در ساختار بخش قطبی این دو ماده، پیوند اشتراکی $C=O$ یافت می‌شود.

پاک کردن چربی‌ها

هر یک از مولکول‌های سازنده چربی‌ها(اسیدهای چرب و استرهای با جرم مولی زیاد)، از یک بخش قطبی(بخش آب‌دوست) و یک بخش ناقطبی(بخش چربی‌دوست و یا آبگریز) تشکیل شده است. از آن‌جا که بخش اعظم این مولکول‌ها از جنس هیدروکربن بوده و ناقطبی است، پس بخش ناقطبی مولکول به راحتی بر بخش قطبی آن غلبه کرده و در نتیجه مولکول‌های چربی در مجموع، **ناقطبی** به حساب می‌آیند و در حلال‌های قطبی مانند آب حل نمی‌شوند. به خاطر نامحلول بودن چربی‌ها در حلال‌های قطبی، آب به تنهایی نمی‌تواند چربی‌های موجود بر روی پوست و لباس‌ها را پاک کند و به همین دلیل، برای پاک‌کردن چربی‌ها باید از سایر پاک‌کننده‌ها کمک بگیریم.

۳ جدول زیر، برخی از ویژگی‌های کلوئیدها و مخلوط‌های همگن و ناهمگن را در مقایسه با یکدیگر نشان می‌دهد.

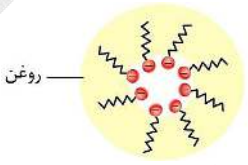
ویژگی	مخلوط ناهمگن (سوسپانسیون)	کلوئید	مخلوط همگن (محلول)
عبور نور	نور را پخش می‌کند.	نور را پخش می‌کند.	نور را عبور می‌دهد.
ظاهر	ناهمگن	همگن	همگن
همگن‌بودن	ناهمگن	ناهمگن	همگن
پایداری	ناپایدار است.	پایدار است.	پایدار است.
نوع ذره	ذره‌ها و قطعات مجزا	مولکول‌های بزرگ یا توده‌های مولکولی	یون‌ها یا مولکول‌ها

شربت معده، نوعی **سوسپانسیون** است. سوسپانسیون‌ها نمونه‌ای از مخلوط‌های **ناپایدار** بوده و مسیر حرکت نور در یک نمونه از آن‌ها مشخص است.

کلوئیدها

کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به‌صورت **مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی** هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. چون ذرات موجود در کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها **قابل مشاهده** است. سطح ذرات موجود در ساختار کلوئیدها باردار بوده و به همین خاطر، این مواد با ماندن در یک موقعیت ثابت **ته‌نشین نمی‌شوند**.

۴ **روغن زیتون**، نوعی ترکیب آلی است که با استفاده از مولکول‌های **ناقطبی** ساخته شده است. با ریختن مقداری صابون در روغن زیتون، یک **کلوئید پایدار** ایجاد می‌شود که در آن، بخش قطبی ذرات صابون(گروه $-COO^-$) در کنار هم و در وسط توده‌های مولکولی قرار گرفته و بخش ناقطبی ذرات صابون(دم هیدروکربنی) در مجاورت با روغن زیتون قرار می‌گیرد. تصویر زیر، نمایی از فرایند قرارگیری مولکول‌های صابون(یا همان بخش آنیونی صابون) در کنار هم در مخلوطی از صابون و روغن زیتون را نشان می‌دهد:



گروه آموزشی ماز

۷۹- جرم یک نمونه اوره، برابر با جرم متانول موجود در ۶ لیتر محلول ۰/۱ مولار این ماده است. در ساختار این نمونه از اوره، تقریبا چند اتم هیدروژن وجود دارد؟ ($H=1$ و $C=12$ و $N=14$ و $O=16$: $g.mol^{-1}$)

۱) $۱/۵۴ \times ۱۰^{۲۴}$ ۲) $۷/۷ \times ۱۰^{۲۳}$ ۳) $۱/۳۲ \times ۱۰^{۲۴}$ ۴) $۶/۶ \times ۱۰^{۲۳}$

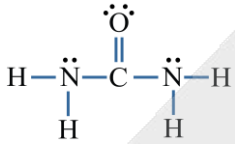
WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینه ۲ (آسان ـ صابون ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

متانول، نوعی الکل یک‌کربنی با فرمول شیمیایی CH_3OH است. در قدم اول، جرم متانول موجود در محلول این ماده را محاسبه می‌کنیم:

$$?\,g\,CH_3OH = ۶\,L\ \text{محلول} \times \frac{۰/۱\,mol\,CH_3OH}{۱\,L\ \text{محلول}} \times \frac{۳۲\,g\,CH_3OH}{۱\,mol\,CH_3OH} = ۱۹/۲\,g$$

ساختار اوره به‌صورت زیر است:



با توجه به فرض سوال، جرم اوره و متانول با هم برابر است. پس یک نمونه ۱۹/۲ گرمی اوره با فرمول شیمیایی $CO(NH_2)_2$ در اختیار داریم. باید شمار اتم‌های هیدروژن موجود در ساختار این نمونه از اوره را محاسبه کنیم. در هر مولکول اوره، ۴ اتم هیدروژن وجود دارد، پس در ساختار هر مول از این ماده نیز ۴ مول اتم هیدروژن یافت می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\,atom\,H = ۱۹/۲\,g\,CO(NH_2)_2 \times \frac{۱\,mol\,CO(NH_2)_2}{۶۰\,g\,CO(NH_2)_2} \times \frac{۴\,mol\,atom\,H}{۱\,mol\,CO(NH_2)_2} \times \frac{۶/۰۲ \times ۱۰^{۲۳}\,atom\,H}{۱\,mol\,atom\,H} \simeq ۷/۷ \times ۱۰^{۲۳}\,atom$$

گروه آموزشی ماز

۸۰- اگر ثابت یونش اسید HA در محلول ۰/۵ مولار از این ماده برابر ۱/۱۲۵ مول بر لیتر باشد، درصد یونش این اسید در محلول مورد نظر چند برابر درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید در محلولی از این ماده با غلظت ۱ مولار و $pH = ۲$ خواهد بود؟

۱) ۵۰ ۲) ۶۰ ۳) ۷۵ ۴) ۸۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ اسیدها و بازها ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

اگر درجه یونش و غلظت این اسید را به ترتیب برابر با α و M در نظر بگیریم، داریم:

$$Ka = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{\alpha^2 \times M^2}{(1-\alpha) \times M} = \frac{\alpha^2 \times M}{1-\alpha} \Longrightarrow ۱/۱۲۵ = \frac{\alpha^2 \times ۰/۵}{1-\alpha} \Longrightarrow ۲/۲۵ = \frac{\alpha^2}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{حل معادله‌ی درجه دو}} \alpha = ۰/۷۵$$

با توجه به مقدار آلفا، می‌توان گفت درصد یونش اسید مورد نظر در محلول داده شده برابر با ۷۵٪ است. در قدم بعد، به سراغ محلول هیدروفلوئوریک اسید می‌رویم که غلظت آن برابر با ۱ مول بر لیتر است. در این رابطه، داریم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

در قدم بعد، درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید را محاسبه می‌کنیم:

$$[H^+] = \text{غلظت اولیه اسید} \times \alpha \Longrightarrow ۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱} = ۱\,mol.L^{-۱} \times \alpha \Longrightarrow \alpha = ۰/۰۱ \Longrightarrow \text{درصد}\ \alpha = ۱$$

با توجه به محاسبات انجام شده، درصد یونش اسید اول ۷۵ برابر درصد یونش هیدروفلوئوریک اسید است.

گروه آموزشی ماز

۸۱- اگر pH محلول یک اسید آلی تک‌پروتون‌دار با درصد جرمی ۰/۷۸٪ و چگالی ۱ گرم بر میلی‌لیتر برابر با ۱/۵ باشد، جرم مولی ذرات سازنده این اسید برابر با چند گرم بر مول می‌شود؟ (ثابت یونش این اسید ۹×۱۰^{-۳} است.)

۱) ۴۶ ۲) ۶۰ ۳) ۷۴ ۴) ۷۸

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ اسیدها وبازها ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

ابتدا غلظت مولی یون هیدرونیوم را در محلول این اسید حساب می‌کنیم:

$$[H^+] = ۱۰^{-pH} = ۱۰^{-۱/۵} = ۱۰^{۰/۵} \times ۱۰^{-۲} = ۳ \times ۱۰^{-۲}\,mol.L^{-۱}$$

ثابت یونش اسید تک پروتون‌دار HA از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} = \frac{[H^+]^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - [H^+]} \Rightarrow ۹ \times ۱۰^{-۳} = \frac{(۳ \times ۱۰^{-۲})^2}{[HA]_{\text{اولیه}} - ۰/۰۳} \Rightarrow ۹ \times ۱۰^{-۳} = \frac{۹ \times ۱۰^{-۴}}{[HA]_{\text{اولیه}} - ۰/۰۳} \Rightarrow$$

$$[HA]_{\text{اولیه}} - ۰/۰۳ = ۰/۱ \Rightarrow [HA]_{\text{اولیه}} = ۰/۱۳\,mol.L^{-۱}$$

با توجه به محاسبات انجام شده، غلظت مولی اولیه اسید($[HA]_{\text{اولیه}}$) در محلول مورد نظر برابر با ۰/۱۳ مول بر لیتر بوده است، در نتیجه جرم مولی اسید برابر خواهد بود با:

$$\text{غلظت مولی اسید}\ HA = \frac{۱۰ad}{M} \Rightarrow ۰/۱۳ = \frac{۱۰ \times ۰/۷۸ \times ۱}{M} \Rightarrow M = \frac{۷/۸}{۰/۱۳} = ۶۰\,g.mol^{-۱}$$

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۸۲- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها واکنش داده و آن‌ها را به مواد محلول در آب تبدیل می‌کنند.
۲) در ساختار یک پاک‌کننده غیرصابونی، برخلاف پاک‌کننده‌های صابونی، به یقین پیوند دوگانه بین اتم‌ها وجود دارد.
۳) در ساختار هر پاک‌کننده صابونی، به یقین ذره‌هایی یافت می‌شوند که در تشکیل هیچ پیوند اشتراکی شرکت نکرده‌اند.
۴) شیر، حاوی توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت بوده و مسیر حرکت نور، همانند محلول آبی شکر، در آن مشخص است.

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ صابون ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۲۰۱)

پاک‌کننده‌های خورنده برخلاف صابون‌ها با آلودگی‌ها **واکنش داده** و آن‌ها را به **مواد محلول در آب** تبدیل می‌کنند؛ درحالی که صابون‌ها **فقط** به کمک **برهمکنش‌های بین مولکولی** موجب پاک‌شدن آلودگی‌ها می‌شوند. **سفیدکننده‌ها**، محلول حاصل از انواع اسیدهای قوی مثل هیدروکلریک اسید(جوهر نمک) و محلول حاصل از انواع **بازهای قوی** مثل سدیم هیدروکسید، از جمله مواد خورنده هستند.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ در ساختار **بخش قطبی پاک‌کننده‌های صابونی** (گروه $-COO^-$)، پیوند دوگانه بین اتم‌ها برقرار شده است. در ساختار **حلقه بنزنی پاک‌کننده‌های غیرصابونی** نیز پیوندهای دوگانه وجود دارد.

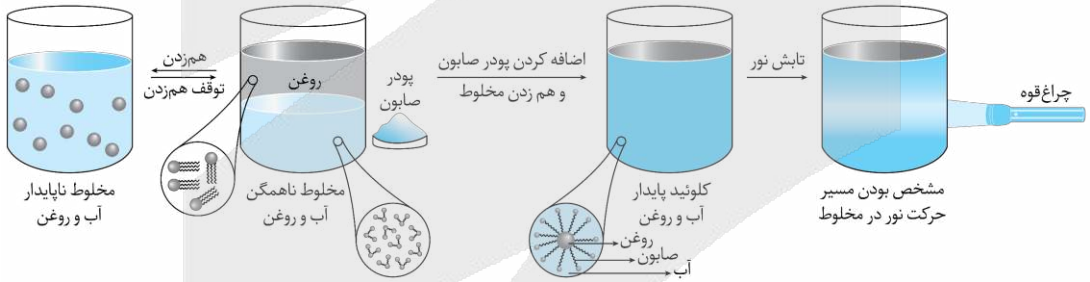
۳ در ساختار برخی از پاک‌کننده صابونی **مایع**، یون **آمونیوم** در کنار بخش آنیونی قرار گرفته است. چون در ساختار این مواد هیچ یون تک‌اتمی یافت نمی‌شود، پس می‌توان گفت در این مواد هر اتم به یقین در تشکیل تعدادی پیوند اشتراکی شرکت کرده است.

۴ شیر نوعی **کلوئید** است که از توده‌های مولکولی با اندازه متفاوت ساخته شده است. در ساختار این ماده، توده‌های چربی در میان ذرات آب قرار گرفته‌اند. **مسیر حرکت نور** در **همه کلوئیدها** از جمله شیر **مشخص** است.

کلوئیدها

در سال ۱۸۶۰ میلادی، دانشمندی به نام توماس گراهام برای توصیف ویژگی‌های برخی از مواد مثل چسب‌ها، ژلاتین و نشاسته، از واژه «کلوئید» استفاده کرد. کلوئیدها مخلوط‌هایی از دو یا چند ماده به حساب می‌آیند که در برخی از ویژگی‌های خود، به محلول‌ها شباهت دارند و در برخی از ویژگی‌های خود، با محلول‌ها تفاوت داشته و به مخلوط‌های ناهمگن شبیه هستند. ذره‌های سازنده کلوئیدها عموماً به‌صورت مولکول‌های بزرگ و یا توده‌های مولکولی هستند که اندازه آن‌ها بزرگ‌تر از اندازه حل‌شونده‌های موجود در محلول‌های همگن است. چون ذرات موجود در کلوئیدها بزرگ‌تر از اندازه ذرات موجود در محلول‌ها است، اگر پرتوی نوری از درون کلوئیدها بگذرد، توسط ذره‌های سازنده کلوئید پخش شده و به چشم بازتابیده می‌شود و به همین خاطر است که مسیر عبور نور در کلوئیدها قابل مشاهده است. توجه داریم که توده‌های مولکولی موجود در کلوئیدها اندازه‌های متفاوتی دارند. توجه داریم که کلوئیدها نوعی مخلوط ناهمگن بوده و پایدار هستند.

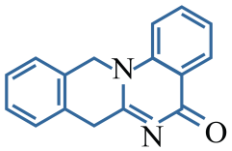
مخلوط آب، صابون روغن نیز نوعی **کلوئید** است. تصویر زیر، **خاصیت پخش نور** در این کلوئید را نشان می‌دهد:



بدون حضور صابون، این مخلوط پایدار باقی نمانده و اجزای سازنده آن از هم تفکیک می‌شوند.

گروه آموزشی ماز

۸۳- شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از ترکیب مقابل، چند برابر شمار این پیوندها در ساختار یون استات است؟



۱) ۵
۲) ۶
۳) ۷
۴) ۸

گزینه ۲ (آسان ـ اسیدها و بازها ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

فرمول شیمیایی ترکیب مورد نظر به‌صورت $C_{16}H_{12}N_2O$ است. در رابطه با این ماده، داریم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{(\text{تعداد اتم‌های } N \times ۳) + (\text{تعداد اتم‌های } H \times ۱) + (\text{تعداد اتم‌های } O \times ۲) + (\text{تعداد اتم‌های } C \times ۴)}{۲}$$

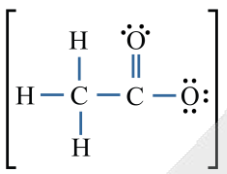
$$= \frac{(۴ \times ۱۶) + (۲ \times ۱) + (۱ \times ۱۲) + (۳ \times ۲)}{۲} = ۴۲ \text{ پیوند}$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

با یونیده شدن برخی از اسیدهایی که طی واکنش تعادلی در محلول یونش می‌یابند، یک آنیون چنداتمی ایجاد می‌شود. برای مثال، فرایند یونش استیک اسید به‌صورت زیر خواهد بود:

$$CH_۳COOH(aq) \rightleftharpoons CH_۳COO^-(aq) + H^+(aq)$$

طی این فرایند، یون هیدرونیوم به همراه آنیون چنداتمی استات تولید شده است. ساختار یون استات به‌صورت زیر است:



در ساختار این یون چنداتمی، ۷ پیوند اشتراکی برقرار شده است. همانطور که مشخص است، شمار پیوندها در ترکیب آلی داده شده در صورت سوال، ۶ برابر شمار این پیوندها در ساختار یون استات است.

گروه آموزشی ماز

۸۴- مقدار pH محلول حاصل از افزودن ۴۰۰ میلی‌لیتر آب خالص به ۱۰۰ میلی‌لیتر محلول هیدروکلریک اسید با $pH = ۲/۳$، چقدر بوده و غلظت یون کلرید در محلول حاصل از این فرایند برابر با چند ppm می‌شود؟(چگالی محلول را برابر با ۱/۲۵ گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $Cl = ۳۵/۵\ g.mol^{-۱}$)

۱) ۲/۷ – ۴۴/۳ ۲) ۳ – ۴۴/۳ ۳) ۲/۷ – ۲۸/۴ ۴) ۳ – ۲۸/۴

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ اسیدها و بازها ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

غلظت یون هیدروژن در محلولی با $pH = ۲/۳$، برابر با ۰/۰۰۵ مول بر لیتر است. اضافه کردن آب به یک محلول، موجب رقیق شدن آن محلول می‌شود. با افزودن ۴۰۰ میلی‌لیتر آب خالص به این محلول، حجم آن ۵ برابر شده و غلظت اسید موجود در محلول نیز $\frac{۱}{۵} = ۰/۲$ برابر می‌شود؛ پس غلظت نهایی اسید برابر با $۱۰^{-۳}$ مول بر لیتر است. در این شرایط، داریم:

$$pH = -log[H^+] = -log(۱۰^{-۳}) = ۳$$

رابطهٔ تغییر غلظت محلول‌ها با PH

به عنوان یک قاعده اگر غلظت محلول یک اسید یا یک باز قوی m برابر شود، pH آن محلول به اندازه $|\log(m)|$ به سمت pH ناحیه خنثی($pH = ۷$) نزدیک می‌شود. به عنوان مثال، اگر حجم یک محلول اسیدی با $pH = ۲$ را افزودن آب خالص به آن ۱۰ برابر کنیم، غلظت اسید موجود در این محلول ۰/۱ برابر شده و pH آن به اندازه $|\log(۰/۱)| = ۱$ واحد به سمت pH ناحیه خنثی نزدیک‌تر می‌شود.

طی این فرایند، حجم محلول اسیدی مورد نظر(محلولی با $pH = ۲/۳$) را با افزودن ۴۰۰ میلی‌لیتر آب خالص به آن، از ۱۰۰ میلی‌لیتر به ۵۰۰ میلی‌لیتر رسانده و ۵ برابر کرده‌ایم؛ پس غلظت اسید موجود در این محلول ۰/۲ برابر شده و pH آن به اندازه $|\log(۰/۲)| = ۰/۷$ واحد به سمت pH ناحیه خنثی نزدیک‌تر شده و به ۳ می‌رسد. با توجه به اطلاعات داده شده در صورت سوال، جرم هر لیتر از محلول مورد نظر برابر با ۱۲۵۰ گرم بوده و در این مقدار از محلول، $۱۰^{-۳}$ مول یون کلرید(معادل با $۱۰^{-۳} \times ۳۵/۵$ گرم یون کلرید) نیز وجود دارد، پس داریم:

$$ppm = \frac{\text{گرم حل شونده}}{\text{گرم محلول}} \times ۱۰^۶ = \frac{۳۵/۵ \times ۱۰^{-۳}}{۱۲۵۰} \times ۱۰^۶ = ۲۸/۴$$

گروه آموزشی ماز

۸۵- اگر مجموع غلظت مولی یون‌ها در محلول حاصل از حل کردن مقداری فورمیک اسید($K_a = ۱/۸ \times ۱۰^{-۴} mol.L^{-۱}$) در ۴۰۰ میلی‌لیتر آب در دمای معین برابر ۰/۰۳ مول بر لیتر باشد، pH محلول و جرم تقریبی فورمیک اسید حل شده در محلول به ترتیب کدام است؟ (از تغییر حجم محلول صرف‌نظر کنید. $g.mol^{-۱}$: $H = ۱$ و $C = ۱۲$ و $O = ۱۶$)

۱) ۱/۳ – ۲۷/۶ ۲) ۱/۳ – ۲۳/۳ ۳) ۱/۸ – ۲۷/۶ ۴) ۱/۸ – ۲۳/۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ اسیدها و بازها ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

فورمیک اسید، یک **اسید ضعیف** به شمار می‌رود. این اسید، به هنگام گزش مورچه سرخ وارد بدن شده و سبب ایجاد حس سوزش می‌شود. واکنش یونش فورمیک اسید در آب به‌صورت زیر است:

$$HCOOH(aq) + H_۲O(l) \leftrightharpoons H_۳O^+(aq) + HCOO^-(aq)$$

در محلول ایجاد شده طی این فرایند، غلظت مولی یون‌ها $H_۳O^+$ و $HCOO^-$ با هم برابر است و با توجه به داده‌های سوال، مجموع غلظت مولی این یون‌ها برابر با $۰/۰۳\ mol.L^{-۱}$ است؛ در نتیجه داریم:

$$[H_۳O^+] = \frac{۰/۰۳}{۲} mol.L^{-۱} = ۰/۰۱۵\ mol.L^{-۱}$$

$$pH = -log\ ۰/۰۱۵ = -log\ (۳ \times ۵ \times ۱۰^{-۳}) = -log\ ۳ - log\ ۵ + ۳ = -۰/۵ - ۰/۷ + ۳ = ۱/۸$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

با توجه به رابطهٔ ثابت یونش اسید مورد نظر، می‌توانیم بنویسیم:

$$K_a = \frac{[H_3O^+][HCOO^-]}{[HCOOH]} = \frac{[H_3O^+]^2}{M - [H_3O^+]} = \frac{(0/015)^2}{M - 0/015} = 1/8 \times 10^{-4} \Rightarrow 225 \times 10^{-6} = 1/8 \times 10^{-4} M - 2/7 \times 10^{-6}$$

$$\Rightarrow M = \frac{225 \times 10^{-6} + 2/7 \times 10^{-6}}{1/8 \times 10^{-4}} = 1/265\ mol.L^{-1}$$

در نهایت جرم دقیق فورمیک اسید حل شده در محلول را به‌دست می‌آوریم:

$$?\ g\ HCOOH = 400\ mL\ \text{محلول} \times \frac{1\ L\ \text{محلول}}{1000\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{1/265\ mol\ HCOOH}{1\ L\ \text{محلول}} \times \frac{46\ g\ HCOOH}{1\ mol\ HCOOH} = 23/276\ g$$

البته، چون درجه یونش فورمیک اسید در محلول مورد نظر خیلی کوچک است، با استفاده از رابطه زیر نیز می‌توانستیم مقدار اسید حل شده در محلول را به طور تقریبی محاسبه کنیم:

$$[H^+] = \sqrt{K_a \times M} \Longrightarrow 0/015 = \sqrt{1/8 \times 10^{-4} \times M} \Longrightarrow M = 1/25\ mol.L^{-1}$$

$$?\ g\ HCOOH = 400\ mL\ \text{محلول} \times \frac{1\ L\ \text{محلول}}{1000\ mL\ \text{محلول}} \times \frac{1/25\ mol\ HCOOH}{1\ L\ \text{محلول}} \times \frac{46\ g\ HCOOH}{1\ mol\ HCOOH} = 23\ g$$

توجه داریم که جرم اسید محاسبه شده با این روش، به‌صورت **تقریبی** است.

گروه آموزشی ماز

۸۶- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) با افزودن سدیم هیدروژن کربنات به شوینده‌ها، قدرت این مواد برای پاک‌کردن چربی‌ها بیشتر می‌شود.
۲) مقدار $[H_3O^+]$ در شیره ترشح شده از معده انسان، بیشتر از غلظت این یون در محلولی با $pH = 2$ است.
۳) دیواره داخلی معده انسان، به طور طبیعی مقدار کمی از یون‌های هیدرونیوم موجود در معده را جذب می‌کند.
۴) منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضداسیدها بوده و هر مول از آن، یک مول اسید معده را خنثی می‌کند.

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ خنثی شدن ـ مفهومی ـ ۱۴۰۱)

منیزیم هیدروکسید، یکی از مواد موجود در ضداسیدها است. **هر مول از این ماده با ۲ مول اسید معده**(هیدروکلریک اسید) واکنش داده و آن را خنثی می‌کند. واکنش انجام شده طی این فرایند به‌صورت مقابل است:

$$Mg(OH)_2(s) + 2HCl(aq) \rightarrow MgCl_2(aq) + 2H_2O(l)$$

در این واکنش، اسید معده خنثی شده و منیزیم کلرید تولید می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱) با افزودن **سدیم هیدروژن کربنات(جوش شیرین)** به شوینده‌ها، **قدرت** این مواد برای پاک‌کردن چربی‌ها **بیشتر** می‌شود. در واقع، جوش شیرین خاصیت بازی داشته و موجب افزایش قدرت بازی پاک‌کننده‌ها می‌شود. با افزایش خاصیت بازی پاک‌کننده‌ها، قدرت پاک‌کنندگی این مواد نیز افزایش پیدا می‌کند.

۲) غلظت یون هیدروژن در محلولی با $pH = 2$، برابر با ۰/۰۱ مول بر لیتر است؛ درحالی که غلظت یون هیدروژن در شیره معده انسان برابر با ۰/۰۳ مول بر لیتر است. در این شرایط، pH **شیره معده انسان برابر با ۱/۵** می‌شود.

۳) درون معده، یک محیط بسیار اسیدی است که حتی می تواند فلز روی را در خود حل کند! دیواره داخلی معده به طور طبیعی مقدار **کمی** از یون‌های هیدرونیوم را دوباره **جذب** می‌کند. این جذب سبب نابودی سلول‌های سازنده دیواره معده می‌شود. حال اگر مقدار اسید معده به هر دلیل بیش از اندازه باشد، شمار یون‌های جذب شده افزایش یافته و سبب ایجاد مشکلات معده‌ای می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۸۷- مقدار $25mL$ محلول هیدروبرمیک اسید با $pH = 1$ به $175mL$ محلول KOH اضافه می‌شود. اگر pH محلول نهایی برابر ۱۳/۴ باشد، جرم تقریبی یون K^+ در محلول بازی اولیه برابر با چند گرم بوده و درصد جرمی یون Br^- در محلول پایانی چقدر است؟ (چگالی محلول‌ها را برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر در نظر بگیرید. $K = 39 : g.mol^{-1}$ و $Br = 80$)

$$HBr(aq) + KOH(aq) \rightarrow H_2O(l) + KBr(aq)$$

۱) ۲/۰۵ ، ۰/۸ ۲) ۲/۰۵ ، ۰/۱ ۳) ۴/۱ ، ۰/۸ ۴) ۴/۱ ، ۰/۱

www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ اسیدها و بازها ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

با افزودن ۲۵ میلی‌لیتر هیدروبرمیک اسید به ۱۷۵ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید، حجم محلول نهایی برابر با ۲۰۰ میلی‌لیتر می‌شود. با استفاده از pH محلول‌ها، غلظت یون‌های موجود در آن‌ها را محاسبه می‌کنیم:

محلول هیدروبرمیک اسید : $pH_{HBr} = -log[H^+] = ۱ \Longrightarrow [H^+] = ۰/۱\ mol.L^{-۱}$

محلول نهایی : $pH_{\text{محلول نهایی}} = -log[H^+] = ۱۳/۴ \Longrightarrow [H^+] = ۴ \times ۱۰^{-۱۴}\ mol.L^{-۱} \Longrightarrow [H^+] \times [OH^-] = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow$

$[OH^-] \times ۴ \times ۱۰^{-۱۴} = ۱۰^{-۱۴} \Longrightarrow [OH^-] = ۰/۲۵\ mol.L^{-۱}$

واکنش خنثی شدن هیدروبرمیک اسید با پتاسیم هیدروکسید به‌صورت زیر است:

$$HBr(aq) + KOH(aq) \rightarrow H_۲O(l) + KBr(aq)$$

در ۲۵ میلی‌لیتر محلول هیدروبرمیک اسید، مقدار $۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$ مول یون هیدرونیوم وجود دارد. در ۲۰۰ میلی‌لیتر از محلول نهایی نیز مقدار ۰/۰۵ مول یون هیدروکسید وجود دارد. بنابراین در ۱۷۵ میلی لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید اولیه، مقدار $۵/۲۵ \times ۱۰^{-۲}$ مول یون هیدروکسید وجود داشته است که $۰/۲۵ \times ۱۰^{-۲}$ مول از آن در واکنش با هیدروبرمیک اسید خنثی شده است. همانطور که گفتیم، در ۱۷۵ میلی‌لیتر محلول پتاسیم هیدروکسید اولیه، مقدار $۵/۲۵ \times ۱۰^{-۲}$ مول پتاسیم هیدروکسید وجود داشته است. بر این اساس، جرم تقریبی یون پتاسیم را محاسبه می‌کنیم:

$$?\ g\ K^+ = ۵/۲۵ \times ۱۰^{-۲}\ mol\ K^+ \times \frac{۳۹\ g\ K^+}{۱\ mol\ K^+} = ۲/۰۵\ g$$

در محلول پایانی با حجم ۲۰۰ میلی‌لیتر، $۲/۵ \times ۱۰^{-۳}$ مول یون برمید وجود دارد که همه از به واسطه محلول اسیدی اولیه وارد این محلول شده است. چگالی محلول نیز برابر با ۱ گرم بر میلی‌لیتر بوده و بر این اساس، جرم محلول برابر با ۲۰۰ گرم می‌شود. در قدم آخر، درصد جرمی یون برمید را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{درصد جرمی} = \frac{\text{جرم حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{\text{جرم مولی حل‌شونده} \times \text{مول حل‌شونده}}{\text{جرم محلول}} \times ۱۰۰ = \frac{۲/۵ \times ۱۰^{-۳} \times ۸۰}{۲۰۰} \times ۱۰۰ = \text{درصد} ۰/۱$$

گروه آموزشی ماز

۸۸- یک نمونه ۱/۶ گرمی از گاز گوگرد تری‌اکسید را در مقداری آب حل کرده و حجم محلول مورد نظر را به ۴۰۰ میلی‌لیتر می‌رسانیم. برای خنثی کردن ۱۰۰ میلی‌لیتر از محلول ایجاد شده، به چند لیتر محلول ۰/۰۲ مولار سود نیاز داریم؟

($S = ۳۲$ و $O = ۱۶$: $g.mol^{-۱}$)

۱) ۰/۰۲۵ ۲) ۰/۰۵ ۳) ۰/۲۵ ۴) ۰/۵

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ خنثی شدن ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

اکسیدهای نافلزی، اغلب خاصیت اسیدی دارند. واکنش اکسیدهای اسیدی مختلف با آب که منجر به تولید اسیدهای مختلف و افزایش غلظت یون هیدرونیوم در محلول می‌شود، به شرح زیر است:

$$I)\ N_۲O_۵(s) + H_۲O(l) \rightarrow ۲HNO_۳(aq) \rightarrow ۲H^+(aq) + ۲NO_۳^-(aq)$$
$$II)\ CO_۲(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲CO_۳(aq) \rightarrow H^+(aq) + HCO_۳^-(aq)$$
$$III)\ SO_۳(g) + H_۲O(l) \rightarrow H_۲SO_۴(aq) \rightarrow ۲H^+(aq) + SO_۴^{۲-}(aq)$$

با توجه به معادله واکنش گاز گوگرد تری‌اکسید با آب، غلظت محلول سولفوریک اسید تولید شده طی این فرایند را محاسبه می‌کنیم:

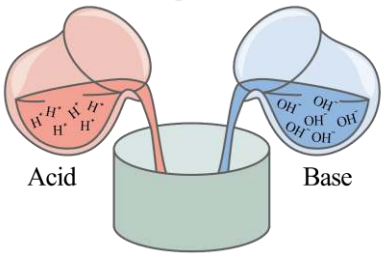
$$?\ mol\ H_۲SO_۴ = ۱/۶\ g\ SO_۳ \times \frac{۱\ mol\ SO_۳}{۸۰\ g\ SO_۳} \times \frac{۱\ mol\ H_۲SO_۴}{۱\ mol\ SO_۳} = ۰/۰۲\ mol$$

$$[H_۲SO_۴] = \frac{۰/۰۲\ mol\ H_۲SO_۴}{۰/۴\ L\ \text{محلول}} = ۰/۰۵\ mol.L^{-۱}$$

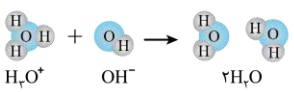
سدیم هیدروکسید یا سود، یک ماده بازی بوده و می‌تواند محلول‌های اسیدی را **خنثی** کند. در قدم بعد، غلظت محلول سود استفاده شده برای خنثی کردن محلول اسیدی را محاسبه می‌کنیم.

$$[OH^-] = ۱۰^{pH-۱۴} = ۱۰^{۱۲/۳-۱۴} = ۱۰^{-۱/۷} = ۲ \times ۱۰^{-۲}\ mol.L^{-۱}$$

در واکنش خنثی شدن، یون‌های هیدروژن محلول اسیدی با یون‌های هیدروکسید محلول بازی واکنش می‌دهند. توجه داریم که سولفوریک اسید، یک اسید دو ظرفیتی(دو پروتون‌دار) است. تصویر زیر، مبنایی از واکنش خنثی شدن اسیدها و بازها را نشان می‌دهد:



$$OH^-(aq) + H_۳O^+(aq) \longrightarrow ۲H_۲O(l)$$



www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

با توجه به غلظت محلول‌های اسیدی و بازی، حجم محلول سود مورد نیاز را محاسبه می‌کنیم.

$$M_a.n_a.V_a = M_b.n_b.V_b \Longrightarrow ۰/۰۵ \times ۱۰۰ \times ۲ = ۰/۰۲ \times V_b \times ۱ \Longrightarrow V_b = ۵۰۰\ mL$$

در رابطه بالا، مقدار M نشان دهنده غلظت هر محلول، مقدار V نشان‌دهنده حجم هر محلول و مقدار n نیز نشان‌دهنده ظرفیت اسیدی یا بازی هر ماده است.

با توجه به محاسبات انجام شده، در این فرایند ۰/۵ لیتر محلول بازی مصرف شده است.

گروه آموزشی ماز

۸۹- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: برخلاف خون موجود در رگ‌ها، محتویات معده خاصیت اسیدی داشته و pH آن‌ها کوچک‌تر از ۷ است.

ب: در شرایط یکسان، تعداد ذرات اسید یونیده نشده در محلول نیتریک اسید کمتر از محلول نیتروااسید است.

پ: در شرایط استاندارد(STP)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ در محلول‌های آبی برابر $۱۰^{-۱۴}$ است.

ت: هیدروسیانیک اسید، برخلاف سولفوریک اسید، یک اسید ضعیف بوده و مقدار ثابت یونش آن کوچک‌تر از صفر است.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «پ» و «ت» ۴) «الف» و «ت»

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ اسیدها و بازها ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

بررسی موارد:

«الف»: **خون موجود در رگ‌ها، خاصیت بازی** داشته و pH آن بزرگ‌تر از ۷ است؛ درحالی که **محتویات معده‌ی انسان خاصیت اسیدی داشته** و pH آن کوچک‌تر از ۷ است. محتویات موجود در روده‌های انسان نیز خاصیت بازی داشته و pH آن بزرگ‌تر از ۷ است. نمودار زیر، وضعیت اسیدی یا بازی بودن محتویات بدن انسان را نشان می‌دهد:

«ب»: در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت، **ثابت یونش نیتریک اسید از ثابت یونش نیتروااسید بزرگ‌تر بوده** و درنتیجه تعداد مولکول‌های یونیده نشده در محلول آبی نیتروااسید به مراتب بیشتر است. توجه داریم که واکنش یونش نیتروااسید در آب، برخلاف واکنش یونش نیتریک اسید، یک واکنش **تعادلی** است و محلول این ماده، شامل تعدادی از ذرات اسید یونیده نشده نیز خواهد بود.

«پ»: **در شرایط اتاق (دمای ۲۵°C)**، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ در محلول‌های آبی برابر $۱۰^{-۱۴}$ است. با تغییر دما، مقدار حاصل ضریب غلظت مولی این یون‌ها نیز دچار تغییر می‌شود. بر این اساس، می‌توان گفت که در شرایط استاندارد (دمای صفر درجه‌ی سانتی‌گراد) و یا دمای بدن انسان(دمای ۳۷°C)، حاصل‌ضرب غلظت مولی یون‌های OH^- و H^+ برابر با $۱۰^{-۱۴}$ نمی‌شود.

«ت»: **هیدروسیانیک اسید یک اسید ضعیف** با ثابت یونش $K_a = ۴/۹ \times ۱۰^{-۱۰}\ mol.L^{-۱}$ بوده و **سولفوریک اسید، یک اسید قوی ($\alpha = ۱$)** دو پروتون‌دار با ثابت یونش بسیار بزرگ است. توجه داریم که اسیدهای ضعیف دارای ثابت یونش کوچکی(کوچک‌تر از یک) هستند اما **مقدار ثابت یونش آن‌ها همواره بزرگ‌تر از صفر است.**

ثابت یونش اسیدها

ثابت یونش هر اسید، مولفه‌ای است که از آن برای مقایسه **قدرت** اسیدهای مختلف استفاده می‌شود. توجه داریم که **ثابت یونش اسیدهای ضعیف کمتر از $۱\ mol.L^{-۱}$** است. جدول زیر، ثابت یونش اسیدهای مختلف را نشان می‌دهد:

نام اسید	فرمول شیمیایی	ثابت یونش (K_a)	معادله یونش در آب
هیدرویدیک اسید	HI	بسیار بزرگ	$HI(aq) \rightarrow H^+(aq) + I^-(aq)$
هیدروبرمیک اسید	HBr	بسیار بزرگ	$HBr(aq) \rightarrow H^+(aq) + Br^-(aq)$
هیدروکلریک اسید	HCl	بسیار بزرگ	$HCl(aq) \rightarrow H^+(aq) + Cl^-(aq)$
سولفوریک اسید	$H_۲SO_۴$	بسیار بزرگ	$H_۲SO_۴(aq) \rightarrow H^+(aq) + HSO_۴^-(aq)$
نیتریک اسید	$HNO_۳$	بزرگ	$HNO_۳(aq) \rightarrow H^+(aq) + NO_۳^-(aq)$
هیدروفلوئوریک اسید	HF	$۵/۹ \times ۱۰^{-۴}$	$HF(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + F^-(aq)$
نیترو اسید	$HNO_۲$	$۴/۵ \times ۱۰^{-۴}$	$HNO_۲(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + NO_۲^-(aq)$
فورمیک اسید	HCOOH	$۱/۸ \times ۱۰^{-۴}$	$HCOOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + HCOO^-(aq)$
استیک اسید	$CH_۳COOH$	$۱/۸ \times ۱۰^{-۵}$	$CH_۳COOH(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CH_۳COO^-(aq)$
هیدروسیانیک اسید	HCN	$۴/۹ \times ۱۰^{-۱۰}$	$HCN(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + CN^-(aq)$

در جدول بالا قدرت اسیدی و ثابت یونش اسیدها از بالا به پایین کاهش می‌یابد.

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۹۰- جرم‌های برابر از باریم اکسید و آمونیاک را به طور مجزا در ۱ لیتر آب حل می‌کنیم. اگر درجه یونش آمونیاک در محلول حاصل از این فرایند برابر با ۰/۰۲ باشد، pH محلول آمونیاک تقریبا به اندازه ..... واحد ..... از محلول دیگر می‌شود.

$(Ba = ۱۳۷ \text{ و } O = ۱۶ \text{ و } N = ۱۴ \text{ و } H = ۱ : g.mol^{-۱})$

۱) ۱ ـ کمتر ۲) ۱ ـ بیشتر ۳) ۰/۶ ـ کمتر ۴) ۰/۶ ـ بیشتر

پاسخ: گزینه ۱ (سخت ـ خنثی شدن ـ مسئله ـ ۱۲۰۱)

واکنش‌های انجام شده طی انحلال باریم اکسید و آمونیاک در آب به‌صورت زیر است:

$$BaO(s) + H_۲O(l) \longrightarrow Ba(OH)_۲(aq) \xrightarrow{\text{یونش کامل}} Ba^{۲+}(aq) + ۲OH^-(aq)$$

$$NH_۳(g) + H_۲O(l) \xrightleftharpoons{\text{واکنش تعادلی}} NH_۴^+(aq) + OH^-(aq)$$

جرم آمونیاک و باریم اکسید حل شده در محلول‌ها را برابر با x گرم در نظر می‌گیریم و بر این اساس، غلظت یون هیدروکسید تولید شده در هرکدام از محلول‌ها را محاسبه می‌کنیم. ابتدا به سراغ محلول باریم هیدروکسید می‌رویم.

$$?\,mol\,BaO = x\,g\,BaO \times \frac{۱\,mol\,BaO}{۱۵۳\,g\,BaO} = \frac{x}{۱۵۳}mol \xrightarrow{\text{باریم هیدروکسید یک باز قوی است} \rightarrow \alpha=۱}$$

$$?\,mol\,OH^- = \frac{x}{۱۵۳}mol\,BaO \times \frac{۲\,mol\,OH^-}{۱\,mol\,BaO} = \frac{۲x}{۱۵۳}mol \xrightarrow{\text{محاسبه غلظت}} [OH^-] = \frac{\frac{۲x}{۱۵۳}mol}{۱\,L} = \frac{۲x}{۱۵۳}mol \cdot L^{-۱}$$

در مرحله بعد، غلظت یون هیدروکسید را در محلول آمونیاک محاسبه می‌کنیم.

$$?\,mol\,NH_۳ = x\,g\,NH_۳ \times \frac{۱\,mol\,NH_۳}{۱۷\,g\,NH_۳} = \frac{x}{۱۷}\,mol \xrightarrow{\text{آمونیاک یک باز ضعیف است} \rightarrow \alpha=۰/۰۲}$$

$$?\,mol\,OH^- = \frac{x}{۱۷}mol\,NH_۳ \times \frac{۰/۰۲\,mol\,OH^-}{۱\,mol\,NH_۳} = \frac{۲x}{۱۷۰۰}mol \xrightarrow{\text{محاسبه غلظت}} [OH^-] = \frac{\frac{۲x}{۱۷۰۰}mol}{۱\,L} = \frac{۲x}{۱۷۰۰}mol \cdot L^{-۱}$$

با توجه به غلظت‌های به‌دست آمده از یون هیدروکسید، داریم:

$$pH = log\frac{[OH^-]}{۱۰^{-۱۴}} \Longrightarrow pH_{\text{آمونیاک}} - pH_{\text{باریم هیدروکسید}} = log\frac{[OH^-]_{\text{آمونیاک}}}{۱۰^{-۱۴}} - log\frac{[OH^-]_{\text{باریم هیدروکسید}}}{۱۰^{-۱۴}} =$$

$$log\frac{[OH^-]_{\text{آمونیاک}}}{[OH^-]_{\text{باریم هیدروکسید}}} = log\left(\frac{\frac{۲x}{۱۷۰۰}}{\frac{۲x}{۱۵۳}}\right) = log\,(۰/۰۹) = log\left(\frac{۳\times۳}{۱۰۰}\right) = log۳ + log۳ - log۱۰۰ = ۰/۵ + ۰/۵ - ۲ = -۱$$

با توجه به محاسبات بالا، می‌توان گفت که pH محلول آمونیاک حدودا به اندازه ۱ واحد کمتر از محلول دیگر است.

گروه آموزشی ماز

۹۱- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) اگر غلظت یون هیدرونیوم در محلول یک اسید با غلظت اولیهٔ اسید برابر باشد، ثابت یونش آن اسید بسیار بزرگ است.
۲) یک نمونه از آب خالص، برخلاف نمونه‌ای از آب گازدار و آب‌نمک، اصلا جریان الکتریسیته را از خود عبور نخواهد داد.
۳) با افزودن مقداری آب خالص به محلول آبی از نیترواسید، درجه یونش اسید مورد نظر در محلول افزایش پیدا می‌کند.
۴) اگر K_a اسید HA بزرگ‌تر از HB باشد، با دانستن pH اسید HA، درباره pH اسید دیگر نمی‌توان اظهار نظر کرد.

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ اسیدها و بازها ـ مفهومی ـ ۱۲۰۱)

آب گازدار، همان محلول حاصل از انحلال گاز کربن دی‌اکسید در آب است که خاصیت اسیدی دارد. این محلول، حاوی کربنیک اسید بوده و یک **الکترولیت ضعیف** به شمار می‌رود. از طرفی می‌دانیم که به علت یونش آب خالص و حضور یون‌های هیدرونیوم و هیدروکسید در آن، این ماده جریان الکتریسیته را به **میزان کمی از خود عبور می‌دهد.**

رسانایی و ثابت یونش آب خالص

براساس آزمایش‌های انجام‌شده، نمونه‌ای از آب خالص که فاقد هر گونه حل‌شونده‌ای است، **رسانایی الکتریکی ناچیزی** دارد که وجود آن را به حضور مقدار بسیار اندکی از یون‌های هیدروکسید و هیدروژن در آب خالص نسبت می‌دهند. یون‌های مورد نظر، براساس واکنش زیر در آب تولید می‌شوند:

$$H_۲O(l) \rightleftharpoons H^+(aq) + OH^-(aq)$$

ثابت تعادل این واکنش به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K = K_W = [OH^-]\,[H^+]$$

آزمایش‌های مختلف نشان می‌دهد که مقدار K_W **در دمای اتاق**، برابر با $۱۰^{-۱۴} mol^۲.L^{-۲}$ است که این مقدار، همانند ثابت تعادل سایر واکنش‌ها، فقط و فقط تابع دما است.

www.biomaze.ir ۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ اسیدهای قوی به هنگام انحلال در آب به طور کامل یونیده می‌شوند در حالی که اسیدهای ضعیف طی یک فرایند تعادلی، به طور **جزئی** یونش پیدا می‌کنند و اندک یون‌های حاصل از یونش آن‌ها، با مولکول‌های اسید موجود در محلول، در حالت **تعادل** قرار می‌گیرند. بر این اساس، برای هر ترکیب اسیدی در دمای مشخص، می‌توان عبارت ثابت تعادل را نوشت. به ثابت تعادل فرایند یونش اسیدها، به اصطلاح **ثابت یونش اسیدی** می‌گویند. ثابت یونش اسید فرضی HA را در نظر بگیرید. مقدار این مولفه به‌صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$K_a = \frac{[H^+][A^-]}{[HA]} = \frac{M\alpha^2}{1-\alpha}$$

اگر غلظت یون هیدرونیوم با غلظت اولیهٔ اسید برابر باشد($[H^+] = M$)، درجه یونش اسید مورد نظر برابر با یک شده($\alpha = \frac{[H^+]}{M} = 1$) و در نتیجه ثابت یونش به بی‌نهایت میل می‌کند.

۳ نیتروواسید، یک اسید ضعیف است. با افزودن مقداری آب خالص به محلولی از نیتروواسید، غلظت این اسید در محلول مورد نظر کاهش پیدا می‌کند. برای محاسبه ثابت یونش اسید مورد نظر، از رابطه زیر استفاده می‌شود:

$$Ka = \frac{\alpha^2 \times M}{1-\alpha} \xrightarrow{\text{درجه یونش نیتروواسید اغلب کمتر از ۰/۰۵ است}} Ka = \alpha^2 \times M$$

همانطور که می‌دانیم، ثابت یونش اسیدها **فقط تابع دما** بوده و با تغییر غلظت اسید، مقدار Ka تغییر نمی‌کند. در چنین شرایطی، اگر غلظت اسید(M) با افزودن آب خالص به محلول کاهش پیدا کند، درجه یونش اسید افزایش پیدا می‌کند.

۴ **در شرایط یکسان از نظر دما و غلظت**، اگر ثابت یونش اسید HA از ثابت یونش اسید HB بزرگتر باشد، غلظت یون هیدرونیوم در محلول اسید HA بیشتر بوده و pH این محلول کوچک‌تر است. چون در عبارت داده شده، اطلاعاتی از غلظت دو اسید داده نشده است، پس مقدار pH این دو اسید را نمی‌توان مقایسه کرد و در این رابطه نمی‌توان اظهار نظر کرد.

گروه آموزشی ماز

۹۲- در شرایط استاندارد، ۴۴/۸ لیتر گاز HX را در ۸۰۰ میلی‌لیتر آب خالص حل می‌کنیم. درصد یونش مولکول‌های اسید در محلول ایجاد شده برابر با چقدر باشد، تا محلول ایجاد شده قابل استفاده در ساختار نیم‌سلول SHE شود؟

۱) ۶۰ ۲) ۸۰ ۳) ۲۰ ۴) ۴۰

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ انرژی و الکترون ـ مسئله ـ ۱۲۰۲)

اندازه‌گیری پتانسیل یک نیم‌سلول، به طور جداگانه ممکن نیست و این کمیت باید **به طور نسبی** اندازه‌گیری شود. شیمی‌دان‌ها برای دستیابی به این هدف، تصمیم گرفتند نیم‌سلول استاندارد هیدروژن(SHE) را به عنوان یک مبنا برای مقایسهٔ پتانسیل الکترودی سایر نیم‌سلول‌ها انتخاب کرده و پتانسیل آن را برابر با صفر در نظر بگیرند. الکترود یا نیم‌سلول هیدروژن، شامل یک الکترود فلزی از جنس پلاتین می‌شود که در محلولی با غلظت یک مولار از یون هیدروژن در دمای ۲۵ درجه‌ی سانتی‌گراد فرو برده شده است و گاز هیدروژن با فشار ۱ اتمسفر از روی آن عبور داده می‌شود. در قدم اول، شمار مول‌های گاز HX را محاسبه کرده و در مرحله بعد، غلظت این ماده را در آب به‌دست می‌آوریم.

$$?\,mol\,HX = 44/8\,L\,HX \times \frac{1\,mol\,HX}{22/4\,L\,HX} = 2\,mol$$

$$[HX] = \frac{\text{مول } HX}{\text{لیتر محلول}} = \frac{2}{0/8\,L\text{ محلول}} = 2/5\,mol.L^{-1}$$

اسید HX، یک اسید ضعیف بوده و در آب بر اساس واکنش تعادلی $HX(aq) \rightleftharpoons H^+(aq) + X^-(aq)$، یون‌های هیدروژن و X^- را تولید می‌کند. محلول بکار رفته در نیم‌سلول استاندارد هیدروژن، یک محلول اسیدی با غلظت یک مولار یون هیدروژن و $pH = 0$ است. بر این اساس، می‌توان گفت باید درجه یونش اسید مورد نظر در حدی باشد که **غلظت یون هیدروژن در محلول برابر با ۱ مول بر لیتر شود**. بر این اساس، داریم:

$$[H^+] = [HX] \times \frac{\text{درصد } \alpha}{100} = 2/5 \times \frac{x}{100} = 1\,mol.L^{-1} \Longrightarrow x = \text{درصد } 40$$

گروه آموزشی ماز

۹۳- یک نمونه ۳ گرمی از منیزیم را در واکنش اکسایش شرکت داده و الکترون‌های حاصل از این فرایند را روی سطح یک کره فلزی به شعاع $5cm$ قرار می‌دهیم. اگر این الکترون‌ها به‌صورت متقارن روی سطح کره پخش شوند، در هر سانتی‌متر از سطح این کره فلزی تقریبا چند عدد الکترون قرار خواهد گرفت؟ (عدد π را برابر ۳ در نظر بگیرید. $Mg = 24 : g.mol^{-1}$)

۱) $2/5 \times 10^{21}$ ۲) 5×10^{21} ۳) $2/5 \times 10^{20}$ ۴) 5×10^{20}

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ انرژی و الکترون ـ مسئله ـ ۱۴۰۲)

نیم‌واکنش اکسایش فلز منیزیم به‌صورت زیر است:

$$Mg(s) \rightarrow Mg^{2+}(s) + 2e^-$$

با توجه به معادله این نیم‌واکنش، محاسبه می‌کنیم که بر اثر اکسایش ۳ گرم منیزیم، چند عدد الکترون تولید می‌شود:

$$?\,\text{عدد } e^- = 3\,g\,Mg \times \frac{1\,mol\,Mg}{24\,g\,Mg} \times \frac{2\,mol\,e^-}{1\,mol\,Mg} \times \frac{6/02 \times 10^{23}\,\text{عدد } e^-}{1\,mol\,e^-} = 1/505 \times 10^{23}\,\text{عدد}$$

در قدم بعد، مساحت سطح یک کره با شعاع ۵ سانتی‌متر را محاسبه می‌کنیم:

$$\text{مساحت سطح کره} = 4 \times (r^2\pi) = 4 \times (25 \times 3) = 300\,cm^2$$

در قدم بعد، میزان تراکم الکترون‌ها را روی سطح کره محاسبه می‌کنیم:

$$\text{تراکم تعداد الکترون‌ها روی سطح کره} = \frac{\text{تعداد } e^-}{\text{مساحت سطح کره}} = \frac{1/505 \times 10^{23}\,\text{عدد}}{300\,cm^2} \simeq 5 \times 10^{20}$$

با توجه به محاسبات بالا، در هر سانتی‌متر مربع از سطح کره مورد نظر، تقریبا 5×10^{20} الکترون قرار می‌گیرد.

گروه آموزشی ماز

۹۴- کدام مطلب زیر درست است؟

۱) در واکنش هیدروکلریک اسید با فلزها، یون کلرید نقشی در فرایند اکسایش ـ کاهش ندارد.

۲) آخرین فلز واسطه موجود در تناوب چهارم، در مقایسه با آلومینیم، قدرت کاهندگی بیشتری دارد.

۳) در واکنش میان فلز روی با گاز اکسیژن، هر اتم از گونه کاهنده ۲ الکترون با $l = 2$ از دست خواهد داد.

۴) با قرار دادن منیزیم در محلول مس(II) سولفات، دما بالا رفته و مجموع غلظت کاتیون‌ها در محلول بیشتر می‌شود.

پاسخ: گزینه ۱ (آسان ـ انرژی و الکترون ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

واکنش فلزها با هیدروکلریک اسید به‌صورت زیر انجام می‌شود:

$$M(s) + nHCl(aq) \longrightarrow MCl_n(aq) + \frac{n}{2}H_2(g)$$

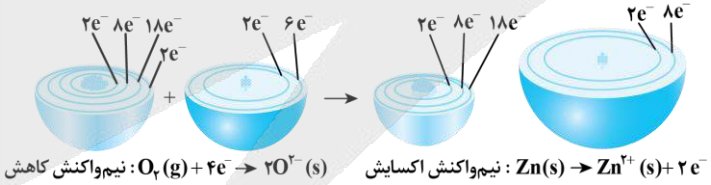
در این واکنش، فلزهایی که چند ظرفیت مختلف دارند، با **کمترین ظرفیت خود** در واکنش شرکت می‌کنند. در این واکنش، یون H^+ کاهش‌یافته و فلز اکسایش می‌یابد؛ بنابراین **در این فرایند یون کلرید اکسایش یا کاهش نمی‌یابد و در واکنش شرکت نمی‌کند**. می‌توان این واکنش را به‌صورت زیر نوشت:

$$M + nH^+ \longrightarrow M^{n+} + \frac{n}{2}H_2$$

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ آخرین فلز واسطه موجود در تناوب چهارم، **روی** است. روی در مقایسه با آلومینیم، قدرت کاهندگی(تمایل به از دست دادن الکترون و اکسید شدن) **کمتری** داشته و با تمایل کمتری الکترون‌های بیرونی‌ترین زیرلایه خود را از دست می‌دهد.

۳ واکنش میان فلز روی و گاز اکسیژن به‌صورت زیر است:



گونه کاهنده، گونه‌ای است که اکسایش یافته و سبب کاهش سایر گونه‌های شرکت‌کننده در واکنش می‌شود. در این واکنش، **فلز روی کاهنده** است. هر اتم روی دو الکترون از زیرلایه $4s$ از دست داده و به یون روی تبدیل می‌شود.

۴ با قرار دادن فلز منیزیم در محلول مس(II) سولفات، واکنش زیر انجام می‌شود:

$$Mg(s) + Cu^{2+}(aq) \rightarrow Mg^{2+}(aq) + Cu(s)$$

چون شمار کاتیون‌های مصرف شده در این واکنش با شمار کاتیون‌های تولید شده در آن برابر است، پس می‌توان گفت در طول انجام شدن این واکنش غلظت کاتیون‌های موجود در محلول تغییر نمی‌کند. از آن‌جا که طی واکنش تیغه منیزیم و یا هر عنصر دیگری که قدرت کاهندگی بیشتری نسبت به فلز مس داشته باشد با محلول مس(II) سولفات، دمای محلول مورد نظر افزایش پیدا می‌کند، می‌توان گفت تغییر آنتالپی(ΔH) این دسته از واکنش‌ها منفی بوده و انجام شدن آن‌ها با کاهش سطح انرژی واکنش‌دهنده‌ها همراه است.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

۹۵- چند مورد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: کاهش اثر نقص عضو، نیم‌رخی از افزایش سطح رفاه بوده و به دنبال رشد دانش و پیشرفت فناوری محقق شده است.

ب: با استفاده از یک لیمو و دو تیغه از جنس Zn و Cu، می‌توان بخشی از انرژی ذخیره شده در فلزها را آزاد کرد.

پ: پرکاربردترین شکل انرژی در استفاده از فناوری‌هایی مثل فناوری گرمایش آسان‌تر، انرژی الکتریکی است.

ت: اکسیژن نافلزی فعال است که با همه عناصر فلزی واکنش داده و آنها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ انرژی و الکترون ـ مفهومی و حفظی ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های «الف»، «ب» و «پ» درست هستند.

بررسی موارد:

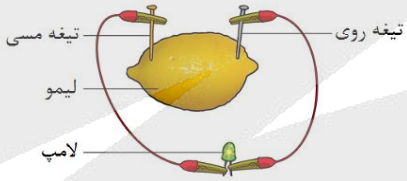
«الف»: تأمین روشنایی، گرمایش و سرمایش آسان‌تر، حمل و نقل سریع‌تر و ایمن‌تر، درمان و کاهش اثر نقص عضو و انتقال ایمن آب آشامیدنی، نیم‌رخی از افزایش سطح رفاه و آسایش را نشان می‌دهند که به دنبال رشد دانش و پیشرفت فناوری محقق شده‌اند. دو رکن اساسی تحقق این فناوری‌ها، **دستیابی به مواد مناسب** و **تأمین انرژی** است.

قلمروهای الکتروشیمی

انرژی الکتریکی، پرکاربردترین شکل انرژی مورد نیاز برای استفاده از فناوری‌های مختلف است. این دانش، علاوه بر تهیه مواد جدید و تأمین انرژی الکتریکی مورد نیاز برای صنایع، می‌تواند در راستای پیاده‌کردن اصول شیمی سبز نیز گام بردارد. برخی از قلمروهای علم الکتروشیمی به شرح زیر هستند:

- تأمین انرژی ← باتری‌ها و سلول‌های سوختی
- تولید مواد ← برقکافت و آبکاری
- اندازه‌گیری و کنترل کیفی ← دستگاه pHسنج دیجیتال

«ب»: با استفاده از یک لیمو و دو تیغه از جنس فلزهای روی و مس، می‌توان یک باتری لیمویی را ساخت. با استفاده از باتری‌های لیمویی، همانند سایر سلول‌های گالوانی، می‌توان بخشی از انرژی ذخیره شده در فلزها را آزاد کرد. تصویر زیر، نمایی از یک باتری لیمویی را نشان می‌دهد:



«پ»: انرژی الکتریکی، **پرکاربردترین** شکل انرژی مورد نیاز برای استفاده از فناوری‌های مختلف بوده و الکتروشیمی شاخه‌ای از علم شیمی است که در بهبود خواص مواد و تأمین انرژی نقش بسزایی دارد.

«ت»: اکسیژن نافلزی فعال است که قدرت اکسندگی بالایی داشته و با اغلب عناصر فلزی مثل آلومینیم، آهن و منیزیم واکنش داده و آن‌ها را به اکسید فلز تبدیل می‌کند. این عنصر نافلزی با برخی از عناصر فلزی مثل طلا و پلاتین که پتانسیل کاهشی استاندارد بسیار بالایی داشته و به این راحتی اکسایش پیدا نمی‌کنند، واکنش نمی‌دهد.

گروه آموزشی ماز

۹۶- **مجموع ضریب‌های استوکیومتری مواد در واکنش اکسایش-کاهش زیر چقدر بوده و به ازای مبادله ۰/۶ مول الکترون در این واکنش، چند مول از گونه اکسنده مصرف می‌شود؟ (گزینه‌ها را از راست به چپ بخوانید.)**

$$Cr_2O_7^{2-} + Sn^{2+} + H^+ \rightarrow Sn^{4+} + H_2O + Cr^{3+}$$

۱) ۲۸ – ۰/۱۵ ۲) ۲۸ – ۰/۱ ۳) ۳۰ – ۰/۱۵ ۴) ۳۰ – ۰/۱

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ انرژی و الکترون ـ مسئله ـ ۱۲۰۲)

موازنه را با اتم Cr آغاز کرده و به $Cr_2O_7^{2-}$ ضریب یک می‌دهیم و با توجه به آن، ضرایب Cr^{3+} و H_2O را مشخص می‌کنیم:

$$Cr_2O_7^{2-} + \cdots Sn^{2+} + \cdots H^+ \rightarrow \cdots Sn^{4+} + 7H_2O + 2Cr^{3+}$$

در مرحلهٔ بعد، با توجه به ضریب H_2O، به H^+ ضریب ۱۴ می‌دهیم، پس داریم:

$$Cr_2O_7^{2-} + \cdots Sn^{2+} + 14H^+ \rightarrow \cdots Sn^{4+} + 7H_2O + 2Cr^{3+}$$

در نهایت ضرایب یون‌های قلع را به کمک موازنهٔ بار پیدا می‌کنیم. اگر ضریب این یون‌ها را x فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$1 \times (-2) + x \times (+2) + 14 \times (+1) = x \times (+4) + 2 \times (+3) \rightarrow x = 3$$

در نتیجه معادلهٔ واکنش به‌صورت زیر می‌شود:

$$Cr_2O_7^{2-} + 3Sn^{2+} + 14H^+ \rightarrow 3Sn^{4+} + 7H_2O + 2Cr^{3+}$$

و مجموع ضریب‌های استوکیومتری برابر ۳۰ است. معادله نیم‌واکنش کاهش به‌صورت زیر است:

$$Cr_2O_7^{2-} + 14H^+ + \cdots e^- \rightarrow 2Cr^{3+} + 7H_2O$$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

تعداد الکترون‌ها را با استفاده از موازنهٔ بار به‌دست می‌آوریم:

$$-۲ + ۱۴ \times (+۱) + y \times (-۱) = ۲ \times (+۳) \rightarrow y = ۶$$

بنابراین به ازای هر مول گونهٔ اکسنده(یون $Cr_۲O_۷^{۲-}$)، ۶ مول الکترون مبادله می‌شود. بر این اساس، داریم:

$$?\, mol\ Cr_۲O_۷^{۲-} = ۰/۶\ mol\ e^- \times \frac{۱\ mol\ Cr_۲O_۷^{۲-}}{۶\ mol\ e^-} = ۰/۱\ mol$$

گروه آموزشی ماز

۹۷- یک قطعه فلز روی را در محلولی از مس(II) سولفات قرار می‌دهیم. اگر در طول یک بازه زمانی، ۳ مول الکترون بین گونه‌های شرکت کننده در این واکنش مبادله شده باشد، میزان تغییر جرم تیغه فلزی برابر با چند گرم می‌شود؟ (کل فلز تولید شده روی سطح تیغه رسوب می‌کند. $Zn = ۶۵$ و $Cu = ۶۴ : g.mol^{-۱}$)

۱) ۵ ۲) ۲/۵ ۳) ۳ ۴) ۱/۵

پاسخ: گزینه ۴ (آسان ـ انرژی و الکترون ـ مسئله ـ ۱۴۰۲)

معادله واکنش انجام شده به‌صورت زیر است:

$$CuSO_۴(aq) + Zn(s) \rightarrow ZnSO_۴(aq) + Cu(s)$$

با توجه به معادله‌ی این واکنش، هر مول یون $Cu^{۲+}$(معادل با ۶۴ گرم کاتیون $Cu^{۲+}$) موجود در محلول با جذب ۲ مول الکترون، به یک مول اتم مس تبدیل شده و روی سطح تیغه رسوب می‌کند و جرم تیغه را به اندازه ۶۴ گرم افزایش می‌دهد. در طول همین بازه، یک مول فلز روی(معادل با ۶۵ گرم فلز روی) اکسید شده و به شکل کاتیون وارد محلول می‌شود و جرم تیغه را به اندازه ۶۵ گرم کاهش می‌دهد. **برایند تغییر جرم تیغه در این فرایند، یک گرم کاهش جرم به ازای مبادله ۲ مول الکترون است.** بر این اساس، داریم:

$$?\, g\ \text{تغییر جرم} = ۳\ mol\ e^- \times \frac{۱\ g\ \text{تغییر جرم}}{۲\ mol\ e^-} = ۱/۵\ g$$

گروه آموزشی ماز

۹۸- برای تغییر مقدار emf سلول گالوانی روی-نقره، از کدام اقدام زیر نمی‌توان استفاده کرد؟

۱) جایگزین کردن الکترود روی با الکترود آهن
۲) تغییر غلظت کاتیون در ساختار نیم‌سلول نقره
۳) تغییر جرم تیغه فلز روی در نیم‌سلول روی
۴) تغییر دمای محیط انجام واکنش الکتروشیمیایی

پاسخ: گزینه ۳ (آسان ـ انرژی و الکترون ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

ساختار و ویژگی‌های سلول‌های گالوانی مشابه باتری‌ها است. یکی از ویژگی‌های مهم باتری‌ها، ولتاژ خروجی از آن‌ها است. برای اندازه‌گیری ولتاژ یک باتری، باید از وسیله‌ای به نام ولت‌سنج کمک بگیریم. به این منظور، قطب منفی باتری را به قطب منفی ولت‌سنج و قطب مثبت آن را نیز به قطب مثبت ولت‌سنج وصل می‌کنیم. در صورت اتصال قطب‌های ناهم‌نام باتری و ولت‌سنج به یکدیگر، عدد نشان‌داده‌شده توسط ولت‌سنج منفی شده و قرینه ولتاژ آن مولد توسط ولت‌سنج نشان داده می‌شود. با تغییر در هریک از اجزای موجود در سلول گالوانی، ولتاژ خروجی از سلول مورد نظر دچار تغییر می‌شود. برای مثال، اگر **غلظت** کاتیون در محلول‌های آندی و کاتدی تغییر کند و یا **جنس** تیغه‌های آندی و کاتدی دچار تغییر شود و یا **دمای محیط** افزایش یا کاهش پیدا کند، **مقدار ولتاژ خروجی** از سلول مورد نظر نیز دچار **تغییر** می‌شود. توجه داریم که **جرم تیغه‌های آندی و کاتدی به کار رفته در ساختار یک سلول گالوانی، هیچ تاثیری روی مقدار emf آن سلول ندارد.**

گروه آموزشی ماز

۹۹- کدام موارد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی سلول روی-مس، مخالف جهت حرکت آنیون‌ها در دیواره متخلخل آن است.
ب: نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن-نقره، کمتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن-نقره است.
پ: با قرار دادن یک تیغه مس در محلول آبی از نیتریک اسید، با گذشت زمان، نیم‌سلولی از مس ایجاد می‌شود.
ت: در سری الکتروشیمیایی عناصر فلزی، عنصر لیتیم در موقعیت بالاتری در مقایسه با عنصر روی قرار دارد.

۱) «الف» و «ب» ۲) «ب» و «پ» ۳) «پ» و «ت» ۴) «الف» و «ت»

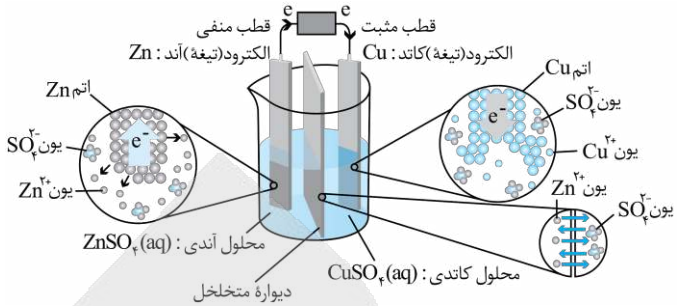
گزینه ۱ (متوسط ـ انرژی و الکترون ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

عبارت‌های «الف» و «ب» درست هستند.

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

بررسی موارد:

«الف»: تصویر زیر، سلول گالوانی روی ـ مس را نشان می‌دهد:



نیم‌واکنش کاهش یون‌های مس:

$$Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cu(s)$$

نیم‌واکنش اکسایش اتم‌های روی:

$$Zn(s) \rightarrow Zn^{2+}(aq) + 2e^-$$

همانطور که مشخص است، به هنگام کار کردن این سلول الکترون‌های موجود در مدار خارجی از سمت آند به طرف کاتد حرکت می‌کنند، درحالی که آنیون‌ها از خلال دیواره متخلخل از سمت کاتد به طرف آند حرکت می‌کنند. بر این اساس، به طور کلی می‌توان گفت جهت حرکت الکترون‌ها در مدار خارجی سلول‌های گالوانی **برخلاف جهت** حرکت آنیون‌ها از خلال دیواره‌ی متخلخل موجود در آن‌ها است.

«ب»: نیروی الکتروموتوری(emf) در یک سلول گالوانی، حداکثر اختلاف پتانسیلی است که یک سلول می‌تواند به وجود بیاورد. مقدار این اختلاف پتانسیل را با E° نیز نشان می‌دهند. برای پیداکردن مقدار emf یک سلول گالوانی، از روش‌های زیر می‌توان کمک گرفت:

✓ نیم‌سلول‌های سازندهٔ سلول را به یکدیگر متصل کرده و مقدار emf را به کمک ولت‌سنج اندازه‌گیری می‌کنیم.

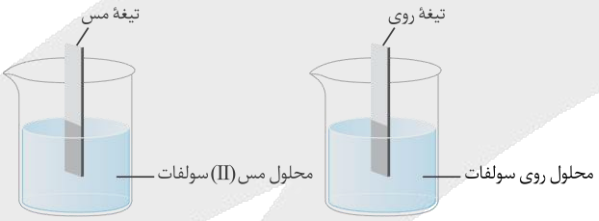
✓ ابتدا آند و کاتد سلول گالوانی مورد نظر را پیدا کرده و پس از آن E° آند را از E° کاتد کم می‌کنیم.

با توجه به توضیحات بالا، اگر کاتد دو سلول گالوانی یکسان باشد، سلولی که E° آند آن کوچک‌تر است، نیروی الکتروموتوری بیشتری نیز خواهد داشت. چون آهن در مقایسه با هیدروژن پتانسیل کاهشی کوچک‌تری(منفی‌تری) دارد، پس می‌توان گفت نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی آهن ـ نقره، بیشتر از نیروی الکتروموتوری سلول گالوانی هیدروژن ـ نقره است.

emf سلول‌های گالوانی

مقدار emf برای سلول‌های گالوانی همواره مقداری مثبت است. چنان‌چه ولت‌سنج مقدار E° یک سلول را با عددی منفی نشان داد و یا این که پس از محاسبه emf سلول، یک عدد منفی به‌دست آوردید، فقط به این معناست که موقعیت آند و کاتد سلول را به اشتباه تشخیص داده و قطب‌های ناهم‌نام سلول گالوانی و ولت‌سنج را به یکدیگر وصل کرده‌اید.

«پ»: با قراردادن یک تیغه فلزی در محلولی که حاوی کاتیون‌های آبپوشیده آن فلز باشد، یک نیم‌سلول ایجاد می‌شود. برای مثال، تصاویر زیر نیم‌سلول‌هایی از عناصر مس و روی را نشان می‌دهد:



پس از قرار دادن یک تیغه از جنس فلز مس در محلول نیتریک اسید، فلز مس با محلول اسیدی **واکنش نداده** و کاتیون‌های آن وارد محلول نمی‌شوند، پس یک نیم‌سلول ایجاد نمی‌شود. این در حالی است که اگر یک فلز با پتانسیل کاهشی منفی را وارد محلول اسیدی کنیم، اتم‌های آن فلز به تدریج اکسایش یافته و در قالب کاتیون وارد محلول می‌شوند. علاوه بر اکسایش اتم‌های فلزی، در طول این بازه یون‌های هیدروژن موجود در محلول اسیدی نیز کاهش یافته و به‌صورت گاز هیدروژن در می‌آیند و از محلول خارج می‌شوند. با گذشت زمان، کل یون‌های هیدروژن موجود در محلول اسیدی مصرف شده و محلولی ایجاد می‌شود که حاوی کاتیون‌های فلز مورد نظر بوده و یک تیغه فلزی از جنس فلز نیز در آن قرار گرفته است. چنین سامانه‌ای، یک **نیم‌سلول** از آن فلز به شمار می‌رود.

«ت»: **پتانسیل کاهشی لیتیم** در مقایسه با سایر عناصر فلزی **کمتر** بوده و به همین خاطر، در سری الکتروشیمیایی عناصر فلزی، عنصر لیتیم در موقعیت **پایین‌تری** در مقایسه با عنصر روی و سایر فلزات قرار دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۰- کدام مطلب زیر نادرست است؟

۱) گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول $CuSO_4$، بیشتر از گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول Ag_2SO_4 است.

۲) در سری الکتروشیمیایی، گونه کاهنده در سمت راست و گونه اکسنده در سمت چپ نیم‌واکنش‌ها نوشته می‌شود.

۳) بازده تولید انرژی الکتریکی در نیروگاه حرارتی، نسبت به بازده تولید انرژی در سلول‌های سوختی کمتر است.

۴) واکنش‌هایی که در برخی از باتری‌های لیتیمی انجام می‌شوند، از نوع واکنش‌های برگشت‌پذیر هستند.

WWW.ArefOnline.ir

پاسخ: گزینه ۱ (متوسط ـ انرژی و الکترون ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

هرچقدر که تفاوت پتانسیل کاهشی استاندارد فلز واکنش‌دهنده با یون‌های فلزی موجود در محلول **بیشتر** باشد، **مقدار گرمایی که در واکنش فلز با محلول مورد نظر آزاد می‌شود، بیشتر خواهد بود.** چون پتانسیل کاهشی استاندارد نقره بیشتر از پتانسیل کاهشی مس است، گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول $CuSO_4$، کمتر از گرمای حاصل از واکنش آهن با محلول Ag_2SO_4 می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۲ در سری الکتروشیمیایی طبق قرارداد، نیم‌واکنش‌ها به‌صورت کاهشی نوشته می‌شوند؛ در نتیجه در این جدول **گونه اکسنده** (گونه‌ای که الکترون گرفته و کاهش پیدا می‌کند)در سمت واکنش‌دهنده‌ها (**سمت چپ** معادله) و **گونه کاهنده** در سمت فراورده‌ها (**سمت راست** معادله) نوشته می‌شود. هرچه پتانسیل کاهشی گونه‌ای منفی‌تر باشد، گونه سمت راست معادله کاهشی آن، کاهنده قوی‌تری خواهد بود.

سری الکتروشیمیایی

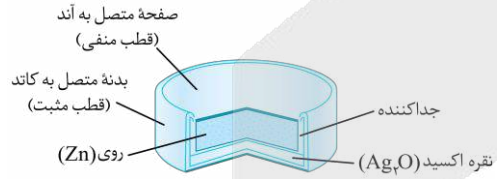
در سری الکتروشیمیایی، پتانسیل کاهشی مربوط به نیم‌واکنش‌های کاهش نوشته شده است. در این سری، گونه‌ای با پتانسیل کاهشی استاندارد منفی‌تر در پایین جدول و گونه‌ای با پتانسیل کاهشی استاندارد مثبت‌تر در بالای جدول قرار گرفته است. نیم‌واکنش کاهش، نیم‌واکنشی است که در آن یک ماده با گرفتن الکترون، به گونه‌ای با عدد اکسایش کمتر تبدیل می‌شود. **واکنش‌پذیرترین فلز در محلول‌های آبی، لیتیم است**؛ درنتیجه نیم‌واکنش زیر، کمترین(منفی‌ترین) پتانسیل کاهشی را دارد:

$$\underbrace{Li^+}_{\text{گونه اکسنده}}(aq) + e^- \rightarrow \underbrace{Li}_{\text{گونه کاهنده}}(s)$$

پتانسیل کاهشی استاندارد برای این نیم‌واکنش بالا را به‌صورت $E^\circ(Li^+/Li)$ نمایش می‌دهند و مقدار آن برابر با ۳/۰۴- ولت است. در این نیم‌واکنش، گونه Li^+، اکسنده بوده و با جذب الکترون به گونه‌ای با عدد اکسایش کمتر(Li) تبدیل شده است. **هرچه پتانسیل استاندارد کاهشی تولید یک گونه منفی‌تر باشد، گونه ذکر شده کاهنده قوی‌تری است.**

۳ از آن‌جا که در سلول‌های سوختی، انرژی شیمیایی سوخت‌ها به طور **مستقیم** به انرژی الکتریکی تبدیل شده و برخلاف نیروگاه‌ها، در این روش چند مرحله متوالی از تبدیل انرژی صورت نمی‌گیرد، **اتلاف انرژی** به‌صورت گرما **کم‌تر** است و درصد بیشتری از انرژی شیمیایی ذخیره‌شده در سوخت مورد نظر به انرژی الکتریکی تبدیل می‌شود.

۴ با رشد و پیشرفت چشمگیر صنایع، نیاز و تقاضا برای ساخت باتری‌ها با ویژگی‌های گوناگون و کاربرد معین افزایش یافته است. شیمی‌دان‌ها در پی پاسخ به این نیازها، توانستند به فناوری ساخت باتری‌های جدید دست یابند. در این فناوری، نقش فلز لیتیم پررنگ است؛ زیرا لیتیم در میان فلزها دارای کمترین چگالی و منفی‌ترین مقدار پتانسیل کاهشی استاندارد است. این ویژگی‌های لیتیم سبب شد راه برای ساخت باتری‌های سبک‌تر(بخاطر چگالی کم لیتیم)، کوچک‌تر و با توانایی ذخیره بیشتر انرژی(بخاطر پتانسیل کاهشی استاندارد منفی لیتیم) هموار شود. باتری دگمه‌ای از جمله باتری‌های لیتیمی است که در شکل‌ها و اندازه‌های گوناگون به کار می‌رود. این باتری‌ها قابلیت شارژ شدن را ندارند. دسته‌ای دیگر از باتری‌های لیتیمی، آن‌هایی هستند که در تلفن و رایانه همراه به کار می‌روند و می‌توان آنها را بارها شارژ کرد و در آن‌ها **واکنش‌های برگشت‌پذیر** انجام می‌شود. نوع دیگری از **باتری‌های دگمه‌ای**، باتری‌های روی-نقره است. ساختار این باتری‌ها نیز به‌صورت زیر است:



گونه کاهنده

$$Zn(s) + Ag_2O(s) \rightarrow ZnO(s) + 2Ag(s)$$

گونه اکسنده

این باتری‌ها، انواعی از سلول‌های گالوانی به شمار می‌روند.

گروه آموزشی ماز

۱۰۱- اگر مدتی پس از شروع واکنش الکتروشیمیایی در سلول آلومینیم-مس، اختلاف جرم الکترود کاتد و الکترود آند به $7/38g$ برسد، در طول این مدت چند گرم از جرم الکترود آند کاسته شده است؟

(جرم الکترودهای استفاده شده در ابتدای واکنش یکسان بوده است. $Cu = 64 : g.mol^{-1}$ و $Al = 27$)

۱) ۰/۸۱ ۲) ۱/۶۲ ۳) ۲/۸۸ ۴) ۵/۷۶

پاسخ: گزینه ۲ (متوسط ـ انرژی و الکترون ـ مسئله ـ ۱۲۰۲)

در سلول گالوانی مورد نظر، آلومینیم در نقش آند بوده و مس در نقش کاتد است. ابتدا نیم‌واکنش‌های انجام شده را نوشته و با یکسان کردن تعداد الکترون مبادله شده در این دو نیم‌واکنش، واکنش کلی سلول را مشخص می‌کنیم. در این رابطه، داریم:

نیم واکنش آندی : $Al(s) \rightarrow Al^{3+}(aq) + 3e^- \xrightarrow{\text{طرفین } \times 2} 2Al(s) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 6e^-$

نیم واکنش کاتدی : $Cu^{2+}(aq) + 2e^- \rightarrow Cu(s) \xrightarrow{\text{طرفین } \times 3} 3Cu^{2+}(aq) + 6e^- \rightarrow 3Cu(s)$

واکنش کلی سلول : $2Al(s) + 3Cu^{2+}(aq) \rightarrow 2Al^{3+}(aq) + 3Cu(s)$

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

با شروع واکنش، از جرم الکترود آند کاسته شده و به جرم الکترود کاتد افزوده می‌شود؛ بنابراین در زمان مورد نظر داریم:

$$\text{اختلاف جرم الکترودها} = \text{جرم افزوده شده به الکترود کاتد} - \text{جرم کاهش یافته از الکترود آند} = ۷/۳۸g$$

اگر در بازهٔ زمانی موردنظر $۲x$ مول Al به‌صورت $Al^{۳+}$ وارد نیم‌سلول آندی شود، $۵۴x$ گرم از جرم آند کاسته شده(این مقدار را با $-۵۴x$ گرم مشخص می‌کنیم) و $۱۹۲x$ گرم بر جرم کاتد مسی(این مقدار را با $+۱۹۲x$ گرم مشخص می‌کنیم) افزوده می‌شود. بنابراین داریم:

$$\text{اختلاف جرم الکترودها} = ۱۹۲x - (-۵۴x) = ۲۴۶x = ۷/۳۸g \rightarrow x = \frac{۷/۳۸}{۲۴۶} = ۰/۰۳\ mol$$

بنابراین جرم خورده شده از الکترود آند برابر است با:

$$?\ g\ Al = (۲ \times ۰/۰۳)\ mol\ Al \times \frac{۲۷\ g\ Al}{۱\ mol\ Al} = ۱/۶۲\ g$$

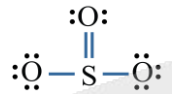
گروه آموزشی ماز

۱۰۲- در ساختار یک اسید چرب، ۱۸ اتم کربن وجود داشته و مجموع عدد اکسایش این اتم‌های کربن برابر با ۲۴- است. شمار پیوندهای اشتراکی در ساختار هر مولکول از این ماده، چند برابر شمار این پیوندها در مولکول $SO_۳$ است؟

۱) ۱۱/۵ ۲) ۱۲/۵ ۳) ۱۲ ۴) ۱۳

پاسخ: گزینه ۴ (متوسط ـ انرژی و الکترون ـ مسئله ـ ۱۲۰۲)

ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید به‌صورت زیر است:



فرمول شیمیایی کلی یک اسید چرب را بدون داشتن هیچ اطلاعاتی در رابطه با سیرشده بودن و یا نبودن آن، می‌توان به‌صورت $C_xH_yO_۲$ در نظر گرفت. در ساختار این مواد، ۲ اتم اکسیژن به همراه تعدادی اتم کربن و هیدروژن وجود دارند. طبق فرض سوال، در این ماده ۱۸ اتم کربن وجود دارد که مجموع عدد اکسایش آن‌ها برابر با ۲۴- است، پس فرمول شیمیایی آن به‌صورت $C_{۱۸}H_yO_۲$ می‌شود. بار الکتریکی این مولکول برابر با صفر بوده و بر این اساس، **مجموع عدد اکسایش اتم‌ها در ساختار یک اسید چرب برابر با صفر است**. در این رابطه داریم:

$$\text{مجموع عدد اکسایش اتم‌ها} = ۰ \Longrightarrow \text{مجموع عدد اکسایش اتم‌های کربن} + \big(۲ \times (-۲)\big) + \big(y \times (+۱)\big) \Longrightarrow ۰ = (-۲۴) + y - ۴$$
$$\Longrightarrow y = ۲۸$$

با توجه به محاسبات بالا، در ساختار این ماده ۲۸ اتم هیدروژن وجود داشته و فرمول شیمیایی این اسید چرب به‌صورت $C_{۱۸}H_{۲۸}O_۲$ است. بر این اساس، در رابطه با تعداد پیوندهای موجود در ساختار این ماده داریم:

$$\text{شمار پیوندهای اشتراکی} = \frac{\big(\text{تعداد اتم‌های } C \times ۴\big) + \big(\text{تعداد اتم‌های } O \times ۲\big) + \big(\text{تعداد اتم‌های } H \times ۱\big)}{۲} = \frac{(۱۸ \times ۴) + (۲ \times ۲) + (۲۸ \times ۱)}{۲}$$
$$= ۵۲ \text{ پیوند}$$

همانطور که دیدیم، در ساختار مولکول گوگرد تری‌اکسید نیز ۴ پیوند اشتراکی وجود دارد، پس مقدار نسبت خواسته شده برابر با ۱۳ می‌شود.

گروه آموزشی ماز

۱۰۳- چه تعداد از عبارت‌های زیر درست است؟

الف: در آبکاری قطعه‌ای از جنس فلز مس با فلز نقره، قطعه مسی را به قطب منفی باتری متصل می‌کنند.

ب: در سلول برقکافت سدیم کلرید مذاب، عنصری در سمت کاتد تولید می‌شود که در دمای اتاق حالت گاز دارد.

پ: در فرایند برقکافت مقداری منیزیم کلرید مذاب، فراوردهٔ کاتدی نسبت به الکترولیت مذاب چگالی کمتری دارد.

ت: چون اتم‌های سدیم بسیار پایدارتر از یون‌های سدیم هستند، برای تهیه فلز سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد.

ث: در سلول نورالکتروشیمیایی که در تهیه گاز $H_۲$ کاربرد دارد، عدد اکسایش سیلیسیم در سمت کاتد تغییر می‌کند.

۱) ۱ ۲) ۲ ۳) ۳ ۴) ۴

پاسخ: گزینه ۲ (سخت ـ سلول‌های الکترولیتی و خوردگی ـ مفهومی ـ ۱۲۰۲)

عبارت‌های «الف» و «پ» درست هستند.

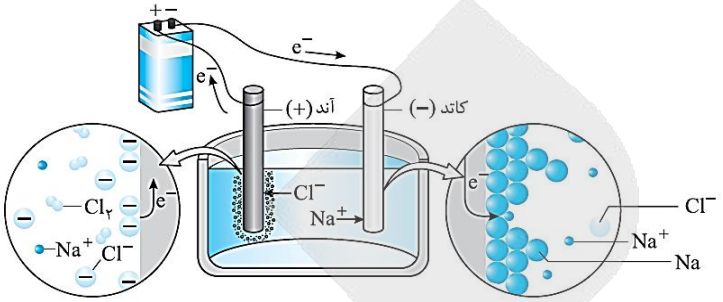
بررسی موارد:

«الف»: **در فرآیند آبکاری، قطعه‌ای که آبکاری می‌شود را به قطب منفی(کاتد) و روکش فلزی را به قطب مثبت(آند) متصل می‌کنند.** در سلول داده شده، جسم مسی باید به قطب منفی مولد وصل شود.

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

پوشاندن سطح یک فلز با لایه نازکی از فلز دیگر را **آبکاری** می‌گویند و این فرایند، در **نوعی سلول الکترولیتی** انجام می‌پذیرد. طی این فرایند، فلز پوشاننده در نقش آند بوده، اکسایش می‌یابد(جرم آن کاهش می‌یابد) و به قطب مثبت باتری متصل می‌شود و جسمی که روکش فلزی بر روی آن ایجاد می‌شود، رسانا بوده و در نقش کاتد ظاهر می‌شود. توجه داریم که الکترولیت فرایند آبکاری، دارای یون‌های فلز پوشاننده است. همچنین نیم‌واکنش‌های اکسایش و کاهش، هر دو مربوط به فلز پوشاننده هستند؛ درنتیجه **غلظت الکترولیت** استفاده شده در فرایند آبکاری، **ثابت** می‌ماند.

«ب»: با توجه به قدرت کاهندگی بالای سدیم، از برقکافت سدیم کلرید محلول در آب، **نمی‌توان** برای به‌دست آوردن فلز سدیم و گاز کلر استفاده کرد. تصویر زیر، نمایی از سلول الکترولیتی مربوط به برقکافت سدیم کلرید مذاب را نشان می‌دهد:

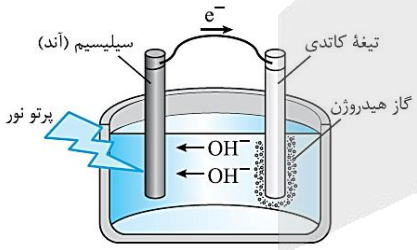


در سمت **کاتد** این سلول، **فلز سدیم** با حالت مذاب تولید شده و در سمت **آند** آن گاز **کلر** آزاد می‌شود. از عنصر کلر، برای میکروب‌زدایی آب استفاده می‌شود.

«پ»: در برقکافت منیزیم کلرید مذاب، فراوردهٔ کاتدی فلز $Mg(l)$ است که **چگالی کمتری** از الکترولیت مذاب یعنی $MgCl_2(l)$ دارد و در نتیجه، طی این فرایند فلز منیزیم مذاب **بر روی سطح** الکترولیت قرار می‌گیرد.

«ت»: فلز سدیم، یک کاهنده قوی است که در طبیعت به حالت آزاد(به حالت عنصری) یافت نمی‌شود. این عنصر در ترکیب‌های طبیعی و گوناگون خود، **تنها** به شکل یون سدیم وجود دارد. این واقعیت نشان می‌دهد که یون های سدیم بسیار پایدارتر از اتم‌های سدیم هستند. به همین، دلیل برای تهیه فلز سدیم باید انرژی زیادی مصرف کرد.

«ث»: ساختار نوعی سلول **نورالکتروشیمیایی** که در تهیه گاز H_2 کاربرد دارد، به‌صورت زیر است:



نیم‌واکنش آندی : $Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 4H^+(aq) + 4e^- \ , \ E^\circ = -0/84V$

نیم‌واکنش کاتدی : $4H_2O(l) + 4e^- \rightarrow 2H_2(g) + 4OH^-(aq) \ , \ E^\circ = -0/83V$

واکنش کلی : $Si(s) + 2H_2O(l) \rightarrow SiO_2(s) + 2H_2(g) \ , \ emf = 0/01V$

در سمت **کاتد** این سلول، عدد اکسایش اتم **هیدروژن** تغییر می‌کند درحالی که در سمت **آند** آن، عدد اکسایش اتم **سیلیسیم** تغییر می‌کند. در واقع، در نیم‌واکنش آندی این سلول اتم سیلیسیم اکسید می‌شود.

گروه آموزشی ماز

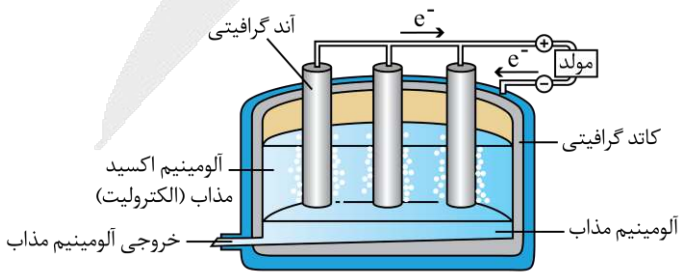
۱۰۴- مجموع جرم تیغه‌های کربنی بکار رفته در سلول مورد استفاده برای فرایند هال برابر با ۷۲۰ گرم است. این تیغه‌های کربنی به چه قطبی از مولد متصل بوده و از آن‌ها برای استخراج حداکثر چند گرم آلومینیم می‌توان استفاده کرد؟ ($C = 12 : g.mol^{-1}$ و $Al = 27$)

معادله واکنش موازنه شود. $Al_2O_3(l) + C(s) \rightarrow Al(l) + CO_2(g)$

۱) مثبت ـ ۱۲۱۵ ۲) منفی ـ ۱۲۱۵ ۳) مثبت ـ ۲۱۶۰ ۴) منفی ـ ۲۱۶۰

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ سلول‌های الکترولیتی و خوردگی ـ مسئله ـ ۱۲۰۲)

تصویر زیر، نمایی از سلول هال را نشان می‌دهد:



www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir

در این سلول الکترولیتی، **تیغه‌های گرافیتی** در نقش **آند** بوده و به قطب **مثبت** مولد وصل می‌شوند. در مجاورت این تیغه‌ها، اتم‌های کربن اکسید شده و گاز کربن دی‌اکسید تولید می‌شود. **بدنه ظرف** نیز از جنس **گرافیت** بوده و در نقش **کاتد** قرار می‌گیرد. در مجاورت با بدنه ظرف نیز یون‌های آلومینیم الکترون گرفته و به آلومینیم مذاب کاهش پیدا می‌کنند. واکنش انجام شده در این سلول به‌صورت زیر است:

$$۲Al_۲O_۳(l) + ۳C(s) \rightarrow ۴Al(l) + ۳CO_۲(g)$$

با توجه به جرم کربن مصرف شده، جرم فلز آلومینیم تولید شده در این واکنش را محاسبه می‌کنیم.

$$?\ g\ Al = ۷۲۰\ g\ C \times \frac{۱\ mol\ C}{۱۲\ g\ C} \times \frac{۴\ mol\ Al}{۳\ mol\ C} \times \frac{۲۷\ g\ Al}{۱\ mol\ Al} = ۲۱۶۰\ g$$

فلز آلومینیم نقش کلیدی در صنایع گوناگون داشته و فناوری تولید آن، بسیار ارزشمند است. از این عنصر فلزی در ساخت لوازم خانگی، هواپیما و کشتی استفاده می‌شود. فرایند هال به علت مصرف مقدار زیادی انرژی الکتریکی، هزینه‌ی بالایی دارد؛ از این رو با بازیافت فلز آلومینیم می‌توان ضمن افزایش عمر یکی از مهم‌ترین منابع **تجدیدناپذیر** طبیعت، برخی از هزینه‌های تولید این فلز را نیز کاهش داد. برای نمونه تولید قوطی‌های آلومینیمی از قوطی‌های کهنه، فقط به ۷٪ از انرژی لازم برای تهیه همان تعداد قوطی از فرایند هال نیاز دارد.

گروه آموزشی ماز

۱۰۵- کدام مطلب زیر نادرست است؟

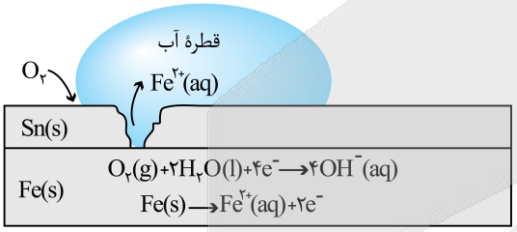
۱) در ساختار نوعی از آهن که برای تهیه قوطی کنسرو استفاده می‌شود، فلزی با $E^\circ < ۰$ در سطح قرار گرفته است.
۲) تمایل اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیطی که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند، بیشتر از محیط خنثی است.
۳) قیراندود کردن و روکش دادن، از جمله روش‌هایی هستند که به طور کامل جلوی خوردگی آهن را می‌گیرند.
۴) در معادله واکنش خوردگی آهن، تغییر عدد اکسایش گونه کاهنده، ۱/۵ برابر هر اتم از گونه اکسنده است.

پاسخ: گزینه ۳ (متوسط ـ سلول‌های الکترولیتی و خوردگی ـ مفهومی ـ ۱۴۰۲)

وسایل آهنی در هوای مرطوب و در مجاورت با اکسیژن موجود در هوا دچار **خوردگی** می‌شوند. ساده‌ترین راه برای جلوگیری از خوردگی آهن، ایجاد یک پوشش محافظ است تا از رسیدن اکسیژن و رطوبت هوا به آهن جلوگیری کند. این پوشش با روش‌هایی مانند رنگ زدن، قیراندود کردن و روکش دادن ایجاد می‌شود. باید توجه داشت که چنین روش‌هایی **نمی‌توانند به طور کامل** از خوردگی پیشگیری کنند؛ زیرا به تدریج رطوبت و اکسیژن از روزنه‌های موجود در این پوشش‌ها به درون فلز نفوذ کرده و به سطح آهن می‌رسند و خوردگی دوباره آغاز می‌شود.

بررسی سایر گزینه‌ها:

۱ یکی از راه‌های محافظت از آهن در مقابل خوردگی، پوشاندن سطح آن با فلزهای دیگر است. **آهن گالوانیزه** (**آهن سفید**) و **ورقه‌های حلبی**، نمونه‌هایی از ورقه‌های آهنی پوشیده‌شده با سایر فلزات هستند. به ورقه‌های آهنی که سطح آن‌ها با لایه نازکی از فلز قلع پوشیده شده باشد، حلبی گفته می‌شود. تصویر زیر، یک قطعه حلبی را نشان می‌دهد:



$$Fe^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Fe(s)\ ,\quad E^\circ = -۰/۴۴V$$
$$Sn^{۲+}(aq) + ۲e^- \rightarrow Sn(s)\ ,\quad E^\circ = -۰/۱۴V$$

قبل از ایجاد خراش در سطح حلبی، فلز قلع به عنوان یک پوشش محافظ از خوردگی آهن جلوگیری می‌کند. توجه داریم که در این شرایط خود قلع نیز به خاطر ایجادشدن یک لایه متراکم از اکسیدهای قلع در سطح آن، دچار خوردگی نمی‌شود. می‌دانیم که پتانسیل کاهشی استاندارد(E°) قلع، کوچک‌تر از صفر است.

۲ **تمایل مولکول‌های اکسیژن به گرفتن الکترون، در محیط‌های اسیدی** (محیط‌هایی با $pH < ۷$ که رنگ کاغذ pH را سرخ می‌کنند)، **بیشتر** از محیط‌های **خنثی** است و به همین خاطر، فلز آهن در محیط‌های اسیدی در مقایسه با محیط‌های خنثی با سرعت بیشتری خورده می‌شود. نیم‌واکنش کاهش آب در محیط‌های اسیدی به‌صورت مقابل است: $O_۲(g) + ۴H^+(aq) + ۴e^- \rightarrow ۲H_۲O(l)\ ;\ E^\circ = +۱/۲۳\ V$

۴ واکنش کلی انجام‌شده در هنگام زنگ‌زدن آهن به‌صورت $۴Fe(s) + ۳O_۲(g) + ۶H_۲O(l) \rightarrow ۴Fe(OH)_۳(s)$ است. برای انجام‌شدن این واکنش، **حضور مولکول‌های آب و اکسیژن الزامی است**. توجه داریم در معادله‌ی واکنش کلی خوردگی آهن، تغییر عدد اکسایش گونه‌ی کاهنده (اتم آهن) برابر با ۳+ و تغییر عدد اکسایش گونه‌ی اکسنده (اتم اکسیژن) برابر با ۲− است.

گروه آموزشی ماز

www.biomaze.ir
۱۴۰۳ - ۱۴۰۴
WWW.ArefOnline.ir